EMCI 2022

XV ENCUENTRO INTERNACIONAL

XXIII ENCUENTRO NACIONAL

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

LIBRO DE ACTAS

COMPILADORES:
Carrere, Lucía Carolina
Escher, Leandro Gabriel
Gaitán, María Mercedes
Gemignani, María Alicia
Klimovsky, Ernesto
Pita, Gustavo de Dios

Facultad de Ingeniería UNER

UTN PARANÁ

4, 5 Y 6 DE OCTUBRE

PARANÁ, ENTRE RÍOS

EMCI 2022

XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

Libro de Actas

Diciembre 2022

Universidad Nacional de Entre Ríos

4, 5 y 6 de octubre de 2022, Paraná, Entre Ríos

Compiladores:
Carrere, Lucía Carolina
Escher, Leandro Gabriel
Gaitán, María Mercedes
Gemignani, María Alicia
Klimovsky, Ernesto
Pita, Gustavo de Dios

UNER Facultad de Ingeniería

UTN PARANÁ

Libro de actas: XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería; compilación de Carrere, Lucía Carolina [*et al.*]. - 1a ed - Paraná: Universidad Nacional de Entre Ríos. UNER 2023.
Libro digital, PDF.

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-698-549-3

1. Matemática. 2. Educación. 3. Ingeniería
II. Carrere, Lucía Carolina, comp.

CDD 510

Diseño de tapa: Andrea Celeste Villaverde

Andrés Pazos 406, CP 3100, Paraná Entre Ríos

Comisiones

Comisión Permanente

Marys M. Arlettaz
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma B. Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Scardigli
Sandra Baccelli
Silvia Seluy
Marta Graciela Caligaris
María Mercedes Simonetti de Velázquez
Martha Rosso

Comisión Organizadora Local

Lucía Carolina Carrere
Gustavo De Dios Pita
Leandro Escher
María Mercedes Gaitán
María Alicia Gemignani
Ernesto Klimovsky
Eduardo Zamboni

Miembros Honorarios

Veremundo Fernández
Carlos Enrique Wüst
Teresa Haydée Codagnone
María Inés Lecich

Comisión Evaluadora

Marys Arlettaz
Sandra Baccelli
Marisa Batisti
Beatriz Bouciguez
Marta Caligaris
Nori Cheein de Auat
Leandro Escher
Job Flores
Mercedes Gaitán
María Alicia Gemignani
Ernesto Klimovsky
Lucas Maggiolini
Milton Martin
Alberto Miyara
Ana María Narvaez
Magdalena Pagano
Sonia Pastorelli
Gustavo De Dios Pita
Emiliano Ravera
Martha Rosso
Mónica Scardigli
Silvia Seluy
Maria Mercedes Simonetti
Mercedes Suarez
Liliana Taborda
Stella Vaira

Avales institucionales

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional San Nicolás

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Santa Fe

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Villa María

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Concepción del Uruguay

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías Universidad Nacional de Santiago del Estero

Facultad de Ciencias Agropecuarias Universidad Nacional de Entre Ríos

Facultad de Ingeniería y Facultad de Ciencias Hídricas Universidad Nacional del Litoral

Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Mar del Plata

Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Misiones

Auspiciante

Municipalidad de Paraná

MUNICIPALIDAD DE
PARANÁ

Introducción

Ingeniería… Cálculos… Números… Y en este caso, el veintitrés y el quince, vigésimo tercero nacional y decimoquinto internacional de un acontecimiento que convoca a formadores e investigadores que, además de saber de cifras y ecuaciones, están involucrados en la Enseñanza y el Aprendizaje de todo eso que llamamos Matemática.

Encontrarse en cada edición del EMCI, hace honor a su sigla; es una convocatoria para compartir experiencias y difundir contribuciones sobre Educación Matemática en Carreras de Ingeniería a sabiendas de que, quienes concurren al convite académico, tienen la responsabilidad de enseñar los conocimientos formales y rigurosos de la disciplina a quienes eligen estudiar Ingeniería.

A un ritmo cada vez más vertiginoso, los avances tecnológicos e ingenieriles siguen su curso, con vigencia finita y hasta efímera. Sin embargo, en toda esa vorágine se sigue hablando un mismo lenguaje, común y preciso: el que proporciona la Matemática, dando fundamentos sólidos y trascedentes a fenómenos naturales, y como soporte acreditado y confiable de otras ciencias que la referencian para sus aplicaciones e investigaciones.

Latinoamérica, y en particular Argentina, necesitan profesionales de la Ingeniería que estudian hoy para actuar en un futuro mediato, que los requerirá competentes y con capacidad de aprendizaje permanente. Es por ello que Educar en Matemática a estudiantes que aspiran a contribuir a su país desde la Ingeniería, resulta imprescindible y posee un valor agregado: es imprescriptible.

Dicen que la Matemática está en todos lados… Y si es así, no cabe duda de que hay que tener la preparación necesaria para encontrársela.

La Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos con orgullo recibieron a profesionales de la docencia que aportan sus valores y saberes, comprometidos con la Educación y los sueños de realización de nuevas generaciones. En este libro se recopilan los trabajos que dan cuenta de la tarea de estos profesionales.

Tabla de Contenido

EJE: ARTICULACIÓN E INGRESO A LAS CARRERAS 1

Análisis Interactivo de Superficies Cuádricas Utilizando el Programa de Lenguaje Simbólico Mathematica....2
TIAGO SPERANZA, HÉCTOR D. MARTÍN

Migración a un Currículum por Competencias en el Módulo de Ingreso a la Facultad de Ingeniería de la UNNE 9
MILENA M. BALBI, CLAUDIA V. BENEYTO, JIRINA C. TIRNER, MARTA B. V. GIRAUDO

Recurso didáctico responsivo en el aprendizaje activo de Matemática para Ingeniería 18
ARIAS SILVIA E., DIAZ DÁVILA LAURA C., HIRSCHFELD GISELA, DEL BONO DANA

El Seminario Universitario como Espacio de Articulación de las Competencias de Egreso del Secundario con las de Acceso a la Universidad 27
PINTOS EDITH SUSANA , NAVAS LAURA EVANGELINA

Experiencia de aprendizaje adaptativo en el ciclo inicial de Ingeniería en Energías Renovables 35
ALEJANDRO DUARTE FURIATI, MATÍAS SALOMONE CAYAFFA, ELISA RODRÍGUEZ INFANZÓN, PIERINA COSTA

Enseñanza de polinomio y función polinómica en la escuela secundaria y su implicancia en la utilización de estos temas en una facultad de ingeniería 42
AGUSTINA BAYÉS, VIVIANA COSTA

EJE: APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA 50

Modelo con reducción de incógnitas para la resolución estática de entramados planos....51
HÉCTOR D. MARTÍN, CLAUDIO N. MAGGI, MARCELO T. PIOVAN, MARCOS N. PERESON

Implementación de un modelo de actividad para que Estudiantes de Ingeniería integren saberes en Análisis Matemático II promoviendo el desarrollo de Competencias 59
ZENIQUEL, MANUEL. SALAJ, CARLOS J. GEORGETTI, MARCO A. BALBI MILENA M.

La Formación de Ingenieros desde una Nueva Perspectiva: Una Experiencia Piloto....71
FERREYRO, MARIANO, BOUCIGUEZ, MARÍA BEATRIZ

Modelos Matemáticos con Ecuaciones Diferenciales. Tecnología y Formación en Competencias....78
S. VAIRA, E. HAYE, L. TABORDA

Estudio del crecimiento poblacional en Ingeniería Ambiental usando Álgebra Lineal 85
SONIA VALERIA JACAMO, M.R. CASTRO

El uso de algoritmos en Scilab para la enseñanza y
el estudio de dinámica de rotores 94
Fernando D. Palmieri, Andreas E. Klempnow, Wadi P. Chiapparoli

Eje: Experiencias de cátedra 106

¿Qué opinan los estudiantes sobre el uso de GeoGebra
en Análisis Matemático I?.....107
Betina Williner, Adriana Favieri

Tareas interdisciplinarias en Cálculo en Varias Variables.....116
Gabriela Righetti, Silvia Seminara

Experiencia del Estudio de Números Complejos a partir de
un Ejemplo de Aplicación.....127
Carlos A. Chiuro, Fernando A. Otero

Evaluación Formativa para el Aprendizaje de Transformaciones de
Funciones Elementales según el Enfoque Basado en Competencias.....134
Valeria Iliana Bertossi, Cristian Ricardo Bernal

Una metodología de aprendizaje invertido:
en busca de un rol más activo del estudiante 146
María Andrea Aznar, Stella Maris Figueroa, María Laura Distéfano

Curso de apoyo para rendir examen final:
Experiencia virtual de retención en una asignatura de Matemática.....154
Mariana S. Vagge, Laura B. Langoni

Virtualidad y Evaluación: Un desafío para materias masivas de matemática 164
Di Domenicantonio Rossana, García Mabel, Langoni Laura,

Ajuste de curvas utilizando un recurso educativo digital de diseño propio.....174
Marta Caligaris, Georgina Rodriguez, Lorena Laugero

Tipo de pregunta STACK para la plataforma Moodle:
Una introducción mediante ejemplo 187
Jorge Omar Morel, Joel Alberto Martínez, Leonardo Eichelberger Pereira Da Silva

Uso del Padlet como recurso innovador en Análisis Matemático 1.....197
Paola Andrea Vilchez, María Agostina Cagnina, Graciela del Valle Echevarría

Aproximación Computacional al Álgebra Lineal:
Enseñanza de Transformaciones Lineales con Aplicaciones en Carreras de Ingeniería 205
Eduardo A. Gago, Paola A. Szekieta, Ada E. Mascheroni, Matías F. Romero.

Modelización Computacional de un Sistema de
Flujo de Fluido en la Enseñanza de Matemática Superior.....216
Eduardo A. Gago, Marcelo M. Zurbriggen, Matías F. Romero

Colaboración docente y educación remota de emergencia: una oportunidad
para repensar la necesidad de la formación continua y
el trabajo interdisciplinario 225
Javier Smidt, María de las Mercedes Trípoli

Física en Clases de Matemática en Pandemia: Suma de Vectores 234
María de las Mercedes Trípoli y Patricia Torroba

Predicciones matemáticas a partir de modelos “defectuosos”:
una experiencia en pandemia 242
Alberto Miyara, Rosana Cassan

La Teoría del Cambio Conceptual en la enseñanza de Matemática Superior 252
Eduardo A. Gago, Caren L. Brstilo, Vanina A. Amaya, Carolina G. Pozzebon

Preguntas Calculadas en Moodle. Caso de Máximos y Mínimos
en Funciones Polinómicas 263
Carlos Berejnoi

Una Aproximación al Estilo de Aprendizaje de los Estudiantes de Ingeniería en
Análisis Matemático I, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (UNSa) 270
Borré, Claudia

Pragmatismo Inclusivo en la Educación Matemática 278
Pedro M. A. Santucho, Claudia A. Roitman

Actividades de investigación para el estudio del Método de Mínimos Cuadrados
en un curso de Algebra Lineal en Carreras de Ingeniería 289
Viviana Angélica Costa

Enseñanza híbrida post-pandemia: amalgamar la virtualidad y la presencialidad 297
Araceli E. Hernandez, Federico D. Kovac

Aplicación de distintos métodos numéricos para la resolución
de un problema de ingeniería estructural 307
Juan M. Franco, Magali S. Londero

La inclusión de apps en el aula de Estadística para el desarrollo de
competencias en estudiantes de Ingeniería 318
Lorena V. Belfiori, María C. Kanobel, Mariana S. García

Gamificación e impresoras 3D en matemáticas: herramientas didácticas
para aumentar la motivación y participación de los estudiantes en un curso virtual 325
Solange Milesi, Joaquín Ruíz, Solange Gualpa, Emiliano P. Ravera

Implementación de evaluaciones individuales virtuales en un
curso presencial de Cálculo Vectorial: lo que la pandemia nos dejó 332
Carolina Carrere, Iván Lapyckyj, Gustavo de Dios Pita, Emiliano P. Ravera

Adaptación de un curso de matemáticas presencial a la virtualidad:
desafíos y soluciones en el contexto de la pandemia 340
Carolina Carrere, Leandro Escher, Alberto Miyara, Emiliano P. Ravera

Gestión de la Clase Virtual Sincrónica en Matemática:
Optimizando el Aprendizaje Colaborativo en las Carreras de Ingeniería 347
Arce Andrea, Kanobel Cristina

EJE: INVESTIGACIÓN EDUCATIVA 356

Aula invertida: ¿una metodología posible para mejorar la enseñanza en la nueva presencialidad? 357
María Carmen Quercia, Sandra Graciela Baccelli, María Laura Distéfano

Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis: invariantes operatórios mobilizados por futuros engenheiros em atividades problematizadoras e contextualizadoras 364
Alessandro Rosa Silva, Gabriel Loureiro de Lima, Eloiza Gomes

Representações semióticas de objetos matemáticos e seus significados em uma Transposição Contextualizada na Transferência de Calor 373
Rieuse Lopes Pinto, Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini

Identificación de estilos de aprendizaje en estudiantes de ingeniería de los primeros años....382
Roxana G. Ramírez, Melina B. Zapata, Graciela E. Yugdar Tófalo, Jorge R. Brandolin

Evaluación múltiple opción con grado de seguridad en pruebas de matemática en carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica de Uruguay región Centro Sur. 392
Pierina Costa Alanis, Elisa Rodríguez Infanzón, Alejandro Duarte Furiati, Matías Salomone Cayaffa.

Estudio sobre la mediación digital en pandemia del profesorado de Matemática del Nivel Superior 399
María C. Kanobel, Débora M. Chan, María G. Galli, Roxana Ramirez

Los Trabajos Prácticos de Laboratorio como motivadores del aprendizaje y favorecedores de competencias en un entorno virtual 408
Eduardo De Santis, Cecilia Puccinelli, Sandra Ramirez, Sonia Pastorelli

Evaluación de los Resultados del Aprendizaje Mediado por Tecnología 417
Sandra C. Ramirez, Olga E. Scagnetti, Eva S. Casco

Innovación en la Enseñanza de las Ciencias para el Abordaje de Sistemas Complejos 424
Eduardo A. Gago, Paola A. Szekieta, Ada E. Mascheroni, Lucas I. D'Alessandro

Consideraciones sobre la enseñanza y el uso del Teorema Central del Límite. Alternativas al uso de reglas mecánicas....434
Barrea Leonardo, García, Román,

Modelización del mecanismo biela-manivela en un curso de Algebra y Geometría Analítica 441
Mario Di Blasi Regner

Desarrollo de la competencia resolución de problemas en una actividad de modelización en estudiantes de carreras de ingeniería en un curso de Probabilidad y Estadística....448
Alvarez Mario, Paskosky Pablo

Caracterización de argumentos utilizados en libros de texto de Álgebra Lineal sobre tópicos vinculados con transformaciones lineales 457
Gagliardo, Alejandra, Montenegro, Fabiana

Revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando el método PRISMA 467
Montenegro, Fabiana, Gagliardo, Alejandra, Demarchi, Analía

Rúbrica para evaluar la comunicación en matemática.....477
Adriana G. Favieri, Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodríguez; Milton T. Martin

Propuesta Híbrida para el Desarrollo de Competencias en Matemática.....484
Analía Rueda, Cecilia De Munno, Sandra Segura

Evaluación del aprendizaje competencial : Diseño, implementación y Resultados del taller Complementario de Aprobación Directa.....491
Dádamo M., De Federico S., Cánaves, G.

Mediación y Evaluación de un Resultado de Aprendizaje en Álgebra.....503
Ana María Narvaez, Gabriela Tomazelli, Noemí Vega

La Evaluación de Competencias y el Uso de Tecnologías.....513
María E. Rodriguez, Eva Casco, Aldana Tibaldo, Romina Durunda

Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales para la Modelación Matemática en Ingeniería.....518
Natali, Osvaldo, Pastore, Liliana B, Roitman, Claudia A., Stump, Pablo

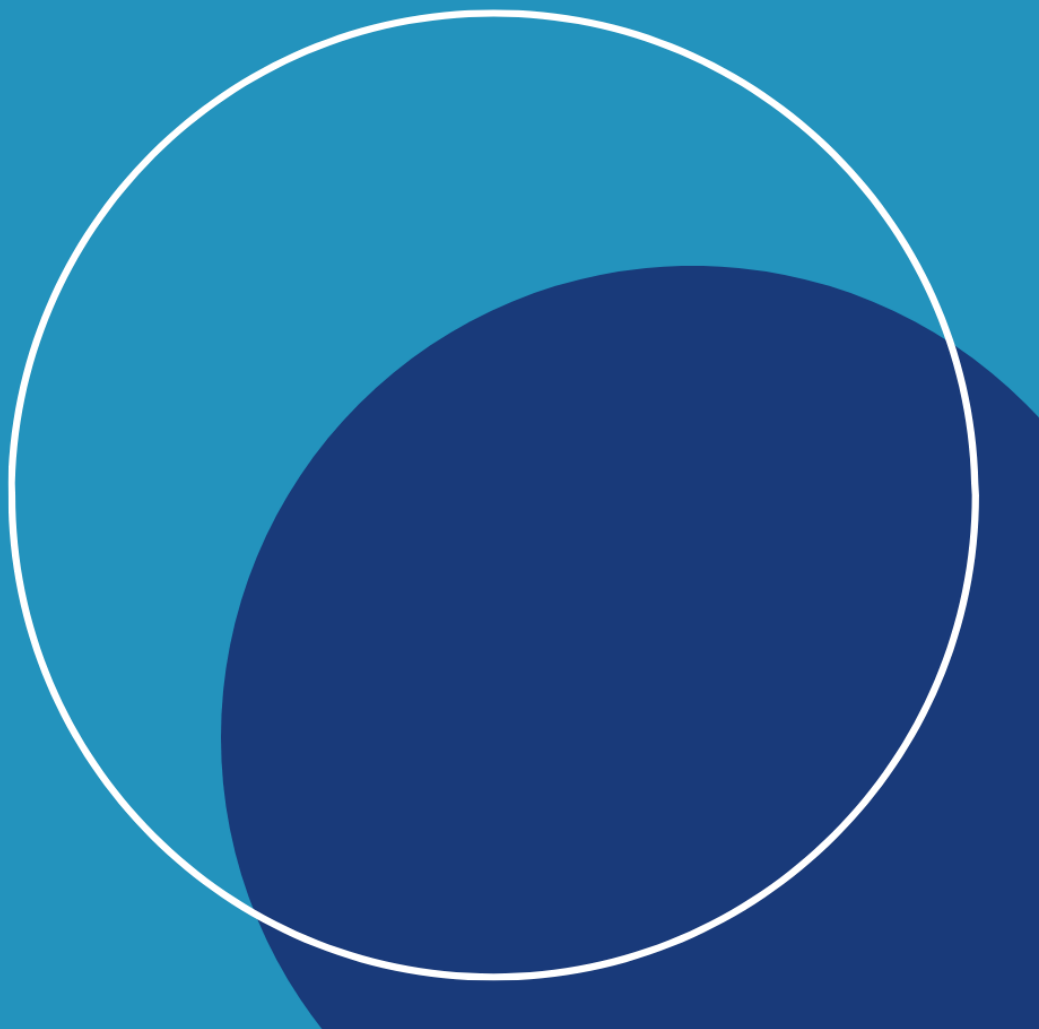
Situación problemática en R Studio: Instrumento de aprendizaje para la prueba de Bondad de Ajuste de Pearson 526
Marisa Battisti Arduin, Nanci Odetti, Flavio Lovatto

Enfoque por Competencias en la Enseñanza de Distribuciones Probabilísticas Aproximadas Utilizando Recursos Diseñados en GeoGebra.....534
Diana R. Kohan, Marisa Battisti Arduin

Una mirada actual al estudio de la Matemática en carreras de Ingeniería 541
Abud, Daniel Juan Alberto

EMCI 2022

Eje: Articulación e ingreso a las carreras



EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Análisis Interactivo de Superficies Cuádricas Utilizando el Programa de Lenguaje Simbólico Mathematica

Tiago Speranza[1], Héctor D. Martín[1]
[1]Grupo de Diseño Mecánico GRUDIM, Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional
Calle 44 n° 1000, Reconquista, Santa Fe, Argentina
{tsperanza602166, hmartin}@comunidad.frrq.utn.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presenta el resultado de la utilización del software Mathematica para la visualización y análisis de las superficies cuádricas, estudiadas en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, de la carrera Ingeniería Electromecánica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Reconquista. También se explora la posibilidad de incorporar esta herramienta como recurso didáctico a la hora del dictado de clases por su contenido visual.

Palabras Clave: Superficies Cuádricas, Álgebra y Geometría Analítica, Visualización dinámica, Interactividad, Software Mathematica.

1 Introducción

En la Facultad Regional Reconquista se realizan talleres en los cuales los alumnos aprenden a utilizar el programa de lenguaje simbólico Mathematica. Estos talleres se desarrollan semanalmente durante los tres primeros años de la carrera. Los alumnos deben realizar prácticos relacionados a materias del año en que están cursando. En primer año se vinculan las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I, Química y Física. En segundo año Análisis Matemático II, Física II y estabilidad. Por último, en tercer año las asignaturas son Probabilidad y estadística, Matemática para Ingeniería Electromecánica y Mecánica.

En el presente trabajo se muestra una aplicación que ha realizado el alumno de segundo año, con un tema de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. Esta materia es de cursado anual, con una carga horaria de 5 horas semanales para la teoría y trabajos prácticos. Es una asignatura clave que suministra los conocimientos y técnicas necesarias para el desarrollo del razonamiento sobre el álgebra para poder aplicarlo para resolver problemas durante la carrera y posteriormente en la vida profesional.

En la tercera unidad de esta materia se trabaja con las superficies cuádricas resultado del análisis de la ecuación general de segundo grado con tres variables. El objetivo de esta unidad es implementar lo aprendido en las unidades anteriores para graficar estas superficies y estudiar sus propiedades mediante la proyección de estas sobre los planos coordenados (trazas). Estas propiedades obtenidas son el nombre de la cuádrica, orientación (eje focal), y puntos importantes (centro, vértices, focos, etc.). [1] [2] [3]

1.1 Taller del programa Mathematica

Para poder realizar este trabajo, fueron necesarios los conocimientos adquiridos durante el taller del programa Mathematica. Este taller está dirigido a los alumnos de los tres primeros años de la carrera Ingeniería Electromecánica de la Facultad Regional Reconquista. En cada uno de los cursos se realizan trabajos prácticos utilizando el

software, integrando en los mismos temas de diversas asignaturas.

El espacio curricular posee características didácticas innovadoras, ya que el mismo se desarrolla fuera del horario de cursado, no posee obligatoriedad de asistencia, la modalidad es del tipo taller: se plantean problemas de las asignaturas del mismo nivel, con el apoyo presencial y virtual del docente. Cabe destacar que los trabajos prácticos planteados se aprueban mediante un coloquio para poder rendir la asignatura vinculada. Los temas de aplicación planteados pueden ser el inicio de trabajos de investigación en el futuro, como ocurre con el presente trabajo.

1.2 Superficies cuádricas

Como se mencionó anteriormente, una superficie cuádrica surge de la expansión del cuadrado de un cuatrinomio cuyos términos son las variables x, y, z, y un término independiente. Esto resulta en la ecuación general para una superficie cuádrica, sin términos rectangulares la siguiente ecuación:

$$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0 \quad \textbf{(1)}$$

Donde el signo y proporción entre los coeficientes a, b y c determinan la forma de la superficie y por ende su nombre. En el práctico realizado sobre el tema se plantea a los alumnos que deduzcan el nombre de cada tipo de cuádrica presentada mediante la figura que se forma de la intersección de las superficies con los planos paralelos coordenadas (trazas).

2 Explicación y uso del aplicativo

El trabajo consta de un aplicativo en el programa descrito anteriormente que permite el ingreso de una ecuación cartesiana de una superficie cuádrica, de la forma descrita en (1), y luego obtener las trazas de los planos coordenados. Todo esto mediante el uso del comando Manipulate para crear un entorno dinámico con una interfaz intuitiva y fácil de utilizar.

Este aplicativo utiliza funciones que son declaradas previamente en el cuaderno. Éstas realizan las operaciones de reemplazo de variables para calcular las trazas, esta función se declara de manera general y luego se utiliza múltiples veces cambiando las variables para determinar las intersecciones con los distintos planos solicitados.

Poniendo como ejemplo la ecuación (2), para encontrar la traza en el plano paralelo a YZ se tiene que reemplazar las variables x por un valor conocido k_1, resultando en la ecuación (3). Ordenado un poco la ecuación queda de la forma (4).

$$x^2 + 2x + y^2 - z = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$k_1^2 + 2k_1 + y^2 - z = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$z = y^2 + k_1^2 + 2k_1 \quad \textbf{(4)}$$

Esta última ecuación es la de una parábola cuya ordenada al origen cambia conforme varía k_1. Realizando el mismo proceso se pueden hallar las trazas de los planos paralelos XZ y XY reemplazando las variables y y z por constantes k_2 y k_3, respectivamente. Estas trazas de la ecuación cuádrica descrita en (2) son (5) para el plano XZ y (6) para el plano XY.

$$z = x^2 + 2x + k_2^2 \quad \textbf{(5)}$$

$$x^2 + 2x + y^2 = k_3 \quad \textbf{(6)}$$

La ecuación (5) es la de una parábola cuya ordenada al origen cambia conforme varía k_2, a su vez, la ecuación (6) es la de una circunferencia cuyo radio cambia conforme varía k_3.

Una vez encontradas todas las trazas principales se puede deducir el nombre de la cuádrica en base a la cónica que se repite y a la otra cónica. En este ejemplo se determina que la cuádrica corresponde a un paraboloide circular o paraboloide de revolución.

Este procedimiento es automatizado por el aplicativo, el usuario solamente debe ingresar la ecuación de la cuádrica, especificar el plano que desea ver y asignar un valor a la constante k correspondiente. Al instante aparecerá en pantalla un gráfico 3D con la superficie indicada siendo intersecada por el plano descrito.

El ingreso de datos se realiza mediante una interfaz (detalle en Fig.1) donde se pone la ecuación de la forma (1), pero sin igualar a cero ya que esto se hace internamente. Debajo de esta casilla están las opciones para generar las trazas, que se visualizan tildando la casilla correspondiente y modificando el valor k perteneciente a cada plano para observar su efecto en la traza. Adicionalmente están disponible las opciones para cambiar la opacidad del gráfico 3D, la resolución de los ejes y el tamaño de la imagen resultante. También se incluye un botón "Reset" que reestablece la opacidad al 100% y hace que todas las constantes k valgan cero (valor inicial).

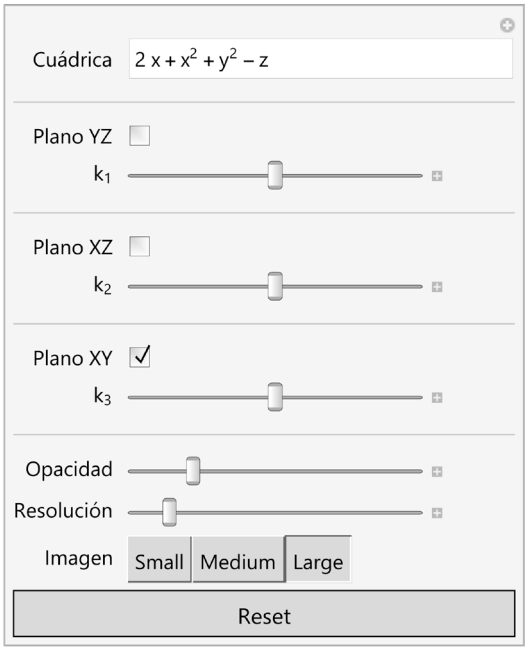


Fig. 1. Interfaz para el ingreso de datos, manipulación de constantes, habilitación de planos y opciones de visualización.

Al ingresar la ecuación de la cuádrica, el aplicativo mostrará el gráfico 3D de la superficie. Por defecto los planos paralelos no están seleccionados y todas las constantes k valen cero (detalle en Fig.2).

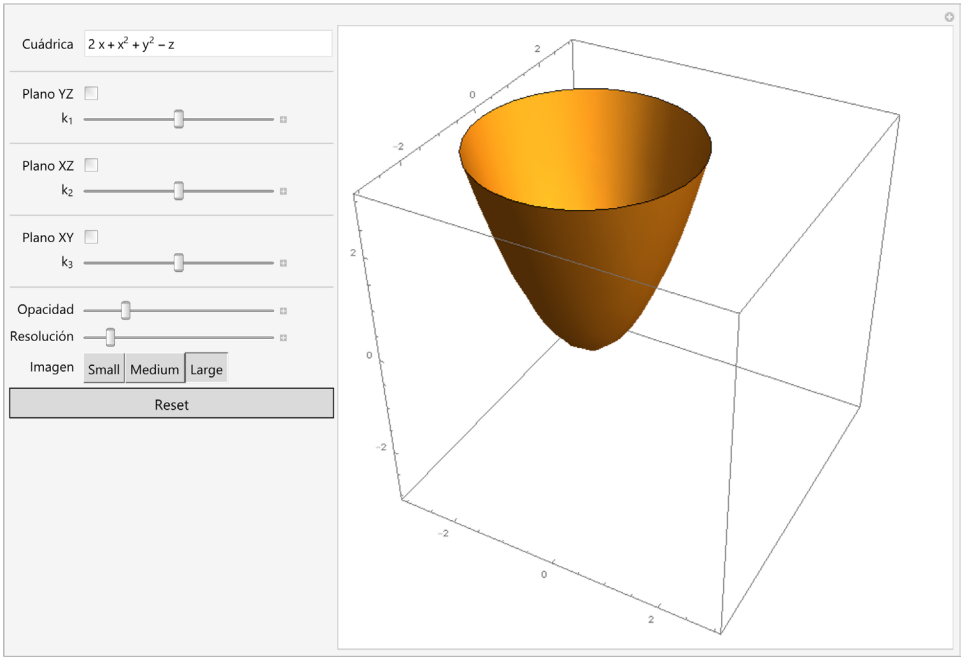


Fig. 2. Gráfico 3D de la superficie ingresada, ningún plano seleccionado.

Al seleccionar un plano se genera un nuevo gráfico de la superficie de color naranja y el plano indicado de color azul, al lado de este gráfico se crea la traza correspondiente al plano y valor de k seleccionado. La ecuación de la cónica obtenida en esta traza está en la parte superior de este gráfico (detalle en Fig.3).

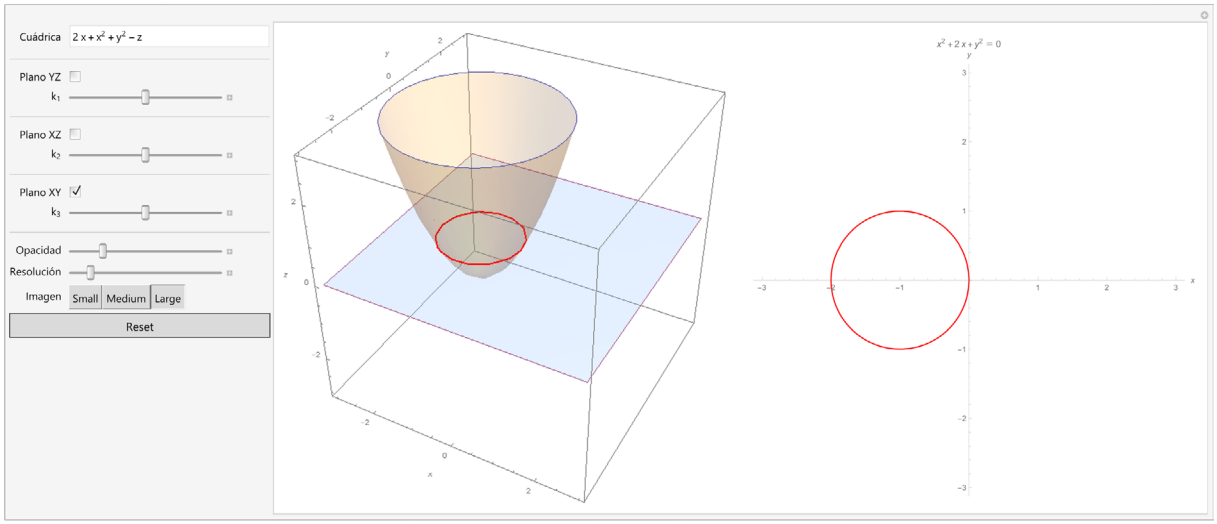


Fig. 3. Gráfico de la cuádrica intersecada por el plano XY para un valor de $k_3 = 0$ y una opacidad del 20%.

También es posible activar y desactivar la cantidad de planos que se deseen y ajustar sus valores k para observar la forma, esta acción generará las trazas en el orden correspondiente a la estructura de la interfaz, es decir, primero se mostrará la traza del plano YZ, luego la del XZ y finalmente la del XY. En la Fig.4 se muestra un ejemplo de la cuádrica atravesada por 3 planos coordenados con distintos valores de constantes k.

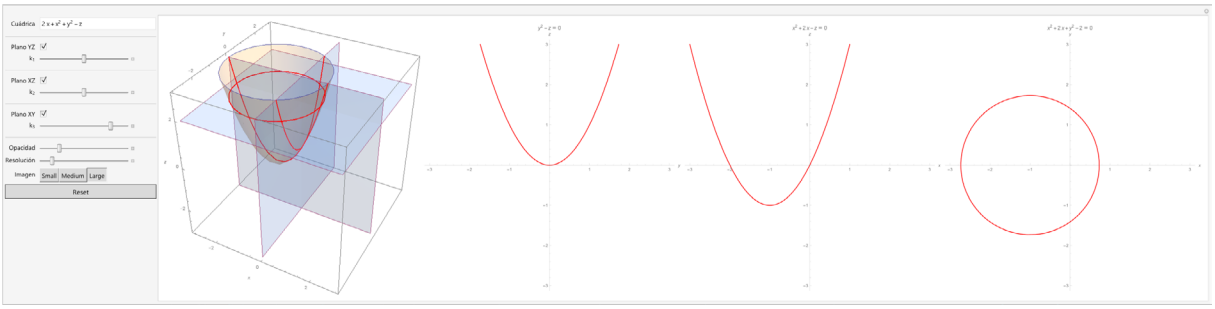


Fig. 4. Misma superficie cuádrica intersecada simultáneamente por múltiples planos coordenados, con valores $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 2$, opacidad del 20% y una resolución de 3 unidades por eje.

También se puede rotar el gráfico 3D para poder visualizar mejor la forma en que estos planos interactúan con la superficie. En la Fig.5 se detalla esta acción al rotar la cuádrica para ser analizada desde otro ángulo, los valores k son los mismos detallados anteriormente, pero la opacidad se la ha reducido al 10% para visualizar mejor estas intersecciones. Nótese que los ejes están denominados como X, Y, y Z en todo momento para que el usuario tenga una referencia a la hora de evaluar las interacciones.

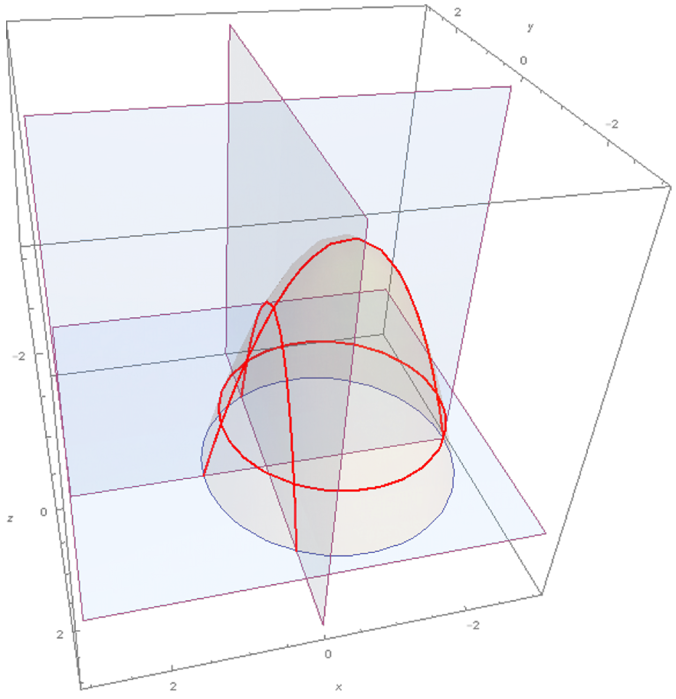


Fig. 5. Superficie rotada para un mejor análisis visual, con las características detalladas anteriormente.

3 Ejemplos

A continuación, en las Figs. 6, 7 y 8 se muestran las intersecciones de los planos coordenados con la superficie de un paraboloide hiperbólico, un tipo de superficie cuyas trazas son dos parábolas y una hipérbola, respectivamente, dándole el aspecto de "silla de montar". Esta clase de superficie es utilizada en la arquitectura por sus propiedades de distribución de fuerzas sobre toda el área, reduciendo la necesidad de material de construcción para lograr mejores estructuras. Y aunque no lo parezca a simple vista, es una superficie reglada.
En la Fig.9 se muestra la superficie intersecada por los tres planos coordenados, arrojando las trazas correspondientes.

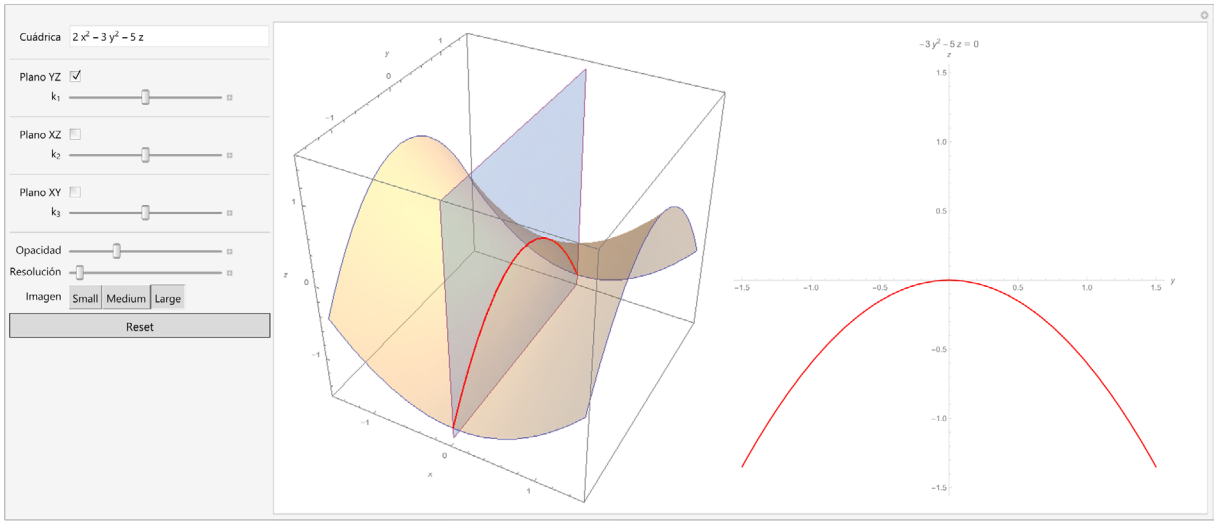


Fig. 6. Paraboloide hiperbólico intersecado por el plano YZ con un valor $k_1 = 0$. Resultando en una parábola negativa.

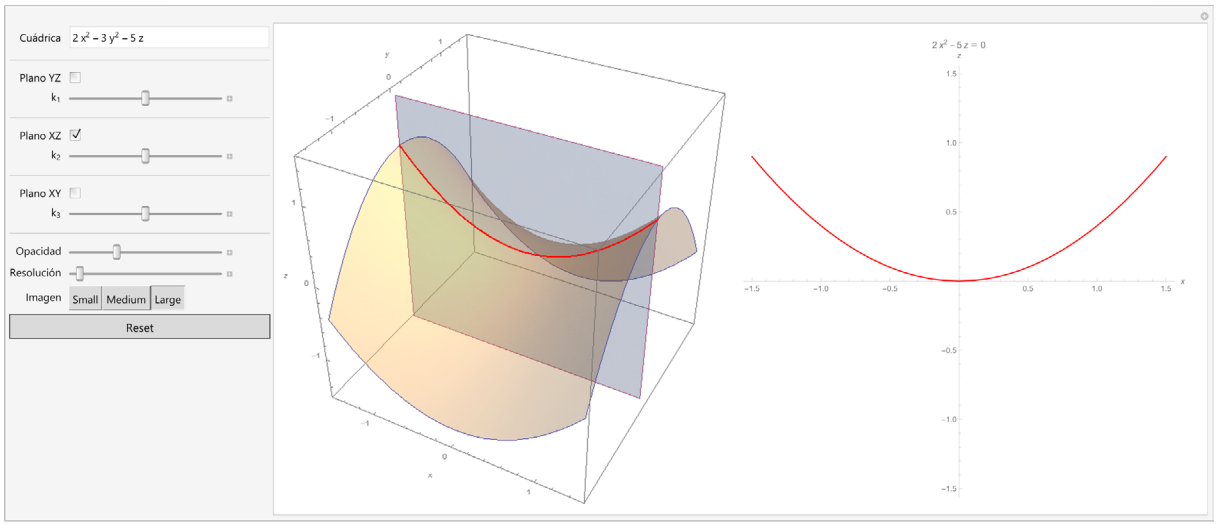


Fig. 7. Paraboloide hiperbólico intersecado por el plano XZ con un valor $k_2 = 0$. Resultando en una parábola positiva.

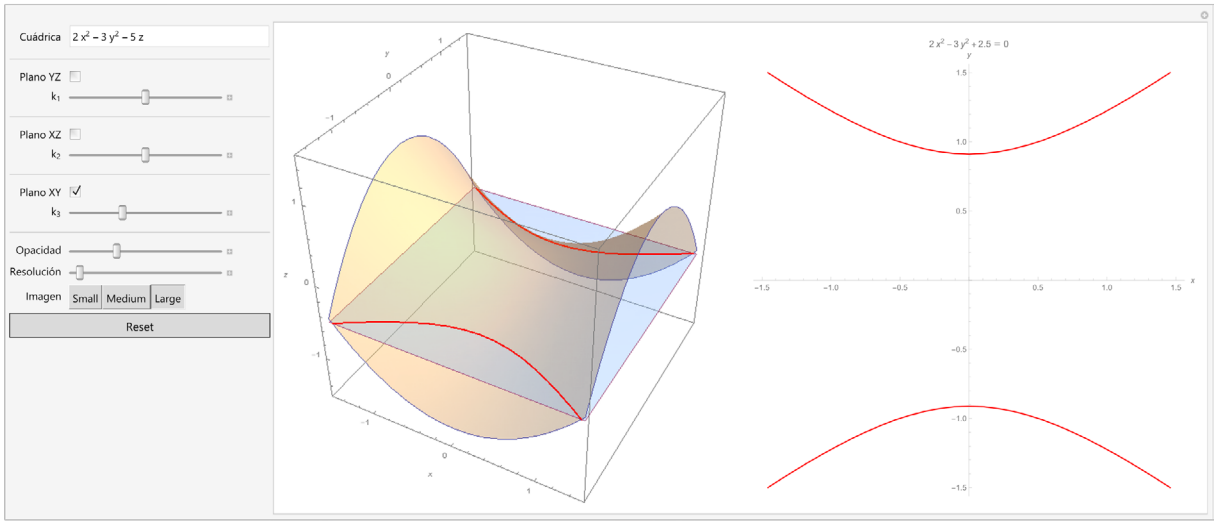


Fig. 8. Paraboloide hiperbólico intersecado por el plano XY con un valor k_3 = -0,5. Resultando en una hipérbola vertical.

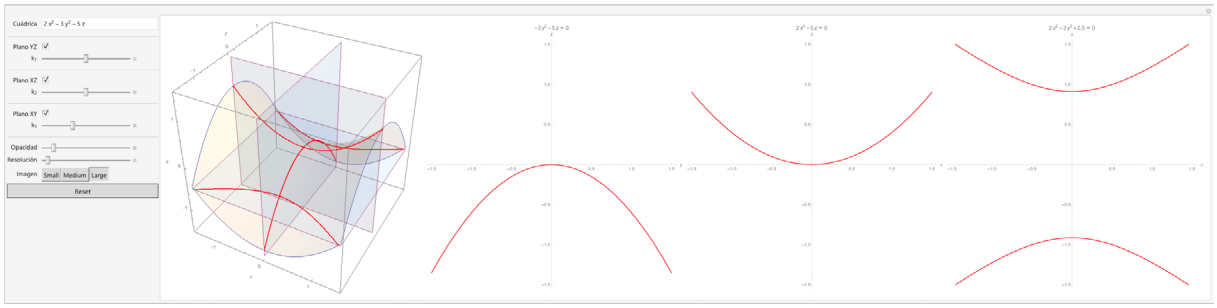


Fig. 9. Paraboloide hiperbólico simultáneamente intersecado por todos los planos anteriores.

4 Conclusiones

En este trabajo se expone una forma dinámica para representar y analizar superficies cuádricas de manera interactiva, esta herramienta podrá ser utilizada por los alumnos a la hora de corroborar sus cálculos hechos a mano y de este modo tener una mejor comprensión de este tema estudiado en la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica.

También aprovechando la capacidad del programa Mathematica para renderizar superficies tridimensionales, surgen más aplicaciones del trabajo presentado, un ejemplo es en el análisis de funciones de varias variables que se estudia en Análisis Matemático II, una asignatura de segundo año de la carrera. [4]

Referencias

1. Lehmann, C.H.: Superficies. *Geometría Analítica*. Limusa, pp. 389-433 (1989)
2. Grossman, S.I.: *Álgebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericano, S.A de C.V. (1988)
3. Nasini, A.E.; López, R.: *Lecciones de Álgebra y Geometría Analítica*. EUCA. (1982)
4. Thomas, G.B.: Derivadas parciales. *Cálculo Varias Variables*. Addison-Wesley, pp. 747-833. (2010)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Migración a un Currículum por Competencias en el Módulo de Ingreso a la Facultad de Ingeniería de la UNNE

Milena M. Balbi[1], Claudia V. Beneyto[2], Jirina C. Tirner[3], Marta B. V. Giraudo[4]
[1 - 2 - 4] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste
Av. Las Heras 727 - Resistencia - Provincia del Chaco
milenabalbi@gmail.com , claubeneyto06@yahoo.com.ar , martabvgiraudo@gamil.com
[3] Laboratorio de Mecánica de Suelos, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste
Av. Las Heras 727 - Resistencia - Provincia del Chaco
jtirner@ing.unne.edu.ar

Resumen. Este trabajo forma parte del proyecto de investigación acreditado, denominado PI 19 D004: Aplicaciones ingenieriles de los temas matemáticos del ciclo básico de las carreras de ingeniería de la UNNE en contexto regional. Se centra en el Módulo de Ingreso a la carrera de ingeniería del 2022, que se planificó, con modificaciones respecto a los años anteriores. Se seleccionaron los contenidos y las competencias, y se definió que el módulo forme parte de las condiciones de cursado de dos asignaturas del primer cuatrimestre, Álgebra y Geometría, y Análisis Matemático I. Para brindar al ingresante un espacio formal donde puede obtener o afianzar las herramientas matemáticas básicas necesarias para comenzar las asignaturas del primer año. Definir desde el ingreso las competencias, los resultados de aprendizaje y las rúbricas que describen el rendimiento académico del ingresante, es necesario para que comiencen el primer año preparados para cursar las materias de la carrera.

Palabras Clave: Ingreso, Aplicaciones, Matemática, Competencias, Rúbricas.

1 Introducción

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación, acreditado por la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), denominado PI 19 D004: Aplicaciones ingenieriles de los temas matemáticos del ciclo básico de las carreras de ingeniería de la UNNE en contexto regional.

El grupo de investigación interdisciplinario, está formado por profesores e ingenieros de los Departamentos de Matemática, Mecánica Aplicada y Construcciones, de la Facultad de Ingeniería de la UNNE. Surge como iniciativa de docentes de las asignaturas matemáticas del 1º año, para relacionar sus saberes con situaciones concretas de la ingeniería, donde se emplea la matemática como herramienta.

Algunos docentes del equipo de investigación, son miembros también del Instituto de Matemática Educativa (IME) de la Facultad de Ingeniería, de la UNNE.

En esta Facultad, se comenzó durante el año 2021, con el proceso de cambio curricular hacia un currículo por competencia para la formación del futuro ingeniero, lo que motivó la investigación acerca de las competencias de ingreso, que son las puertas de entrada a las materias matemáticas del 1er año. Éstas ya se encuentran en el cambio hacia la formación por competencias, de allí que se considera necesario analizar este período de clases adelantado, desde las competencias.

Esta propuesta expone el análisis de la puesta en práctica de las competencias, resultados de aprendizaje y rúbricas, del primer resultado de aprendizaje de los ingresantes (en adelante R.A.1), cuya herramienta de evaluación es el coloquio-parcial escrito..

2 Módulo de Matemáticas del Ingreso a la Facultad de Ingeniería de la UNNE

2.1 Creación del Módulo: La Necesidad del Ingreso a la Facultad de Ingeniería como Puente entre el Nivel Secundario y la Universidad

Con el objeto de disminuir la deserción y mejorar el bajo rendimiento que se observa históricamente entre los alumnos de primer año de esta facultad [1], la Secretaría Académica, con el apoyo de los Departamentos de Ciencias Básicas, viene realizando algunos cambios de índole pedagógico desde el año 2000. El impacto de los cambios, se vio reflejado en los resultados favorables de las cohortes de ingresantes correspondientes a los años 2007 al 2010, como se puede observar en la Tabla 1 [2]:

Tabla 1. Referencias comparativas correspondientes al decenio 1998-2007 y a los años 2008, 2009, 2010.

	1998/2007	2008	2009	2010
Cantidad de Ingresantes	1094 - 100%	139 - 100%	183 - 100%	175 - 100%
Retención estudiantil	501 - 46%	100 - 72%	137 - 75%	121 - 69%
Muy buen rendimiento	203 - 19%	36 - 26%	47 - 26%	59 - 34%

A continuación, se mencionan algunas de las innovaciones realizadas desde el año 1999 [3]:

a. Anticipo del inicio de clases, desde el 1º de febrero, para los alumnos de primer año.

b. Inclusión de los temas introductorios (denominado cursillo de nivelación en períodos académicos anteriores), como parte integrante de las materias de primer año.

Estas medidas, que se adoptaron hasta el día de hoy, se consideran muy importantes, porque introdujeron la obligatoriedad de la asistencia a las clases preparatorias.

Durante el año 2006 el IME y la Secretaría Académica de la Facultad de Ingeniería, implementan políticas de gestión y educativas determinantes, que se suman a las mencionadas anteriormente, tendientes a disminuir la deserción en el primer año [4]. Las mismas se desarrollan a través de distintos programas en los Departamentos de Ciencias Básicas y consisten en:

a. Inicio adelantado de clases para primer año, luego denominado Curso de Nivelación y actualmente Módulo de Matemáticas para Ingresantes.
b. Inclusión de algunos temas de carácter pedagógico en este período inicial (por ejemplo, proporcionalidad*)*.
c. Talleres de afianzamiento de conocimientos para los alumnos, desde el Departamento de Matemática. Apoyo de grupos de trabajo, por equipos docentes que realizaron talleres de afianzamiento de conocimientos y seguimiento casi personalizado de alumnos que lo requirieran.
d. Fraccionamiento de los parciales, evaluándose semanalmente los saberes.

Durante el año 2015, se designaron a estudiantes avanzados, como *tutores académicos*. Su tarea es acompañar al docente del módulo y, por otro lado, establecer una relación más estrecha con el ingresante, como un par.

Este conjunto de acciones tiene como meta facilitar el ingreso a la carrera y promover la permanencia de los estudiantes universitarios, es por este motivo que se plantea la idea de construir un *puente* [5] que tienda a estos objetivos, mediante las distintas herramientas, estrategias y actividades que se fueron elaborando año a año.

Actualmente, el Módulo de Matemáticas para el Ingreso a Ingeniería no es obligatorio, ya que el ingreso es irrestricto, desde el año 1983 con el retorno a la democracia.

Basado en las investigaciones que nos preceden, resulta beneficioso y necesario establecer un período de ingre-

so con alguna reglamentación, que genere en los ingresantes responsabilidad y compromiso para asistir a clases y medir los saberes alcanzados mediante coloquios, es por eso que año a año se revisan y evalúan las acciones, implementando nuevas si se considera necesario, para diseñar el período de enseñanza y aprendizaje destinado a los ingresantes.

Para el año 2022 se planificó, con algunas modificaciones respecto a los años anteriores, ya que en este período no sólo se seleccionaron los contenidos y las competencias, sino que se definió que el módulo forme parte de las condiciones para regularizar y promocionar dos asignaturas del primer cuatrimestre, Álgebra y Geometría, y Análisis Matemático I, de esta manera se logra brindar al ingresante un espacio formal donde puede obtener o afianzar las herramientas matemáticas básicas necesarias, para comenzar las asignaturas matemáticas del primer año.

2.2 Formación por competencias en el módulo de matemáticas

Hace aproximadamente 25 años se comenzó a trabajar en el Proyecto de "Modernización de la Enseñanza de las Ingenierías", llevado adelante por Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), con la colaboración del Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI) de la Agencia Española de Cooperación Internacional. [6]

Ese trabajo se plasmó en 1996, con la publicación titulada "Unificación Curricular en la Enseñanza de las Ingenierías en la República Argentina", conocido como "Libro Azul", base del posterior trabajo publicado en el año 2000, denominado "Propuesta de Acreditación de Carreras de Grado de Ingeniería en la República Argentina", conocido como el "Libro Verde". [7]

Ambos Libros constituyen la esencia de las posteriores Resoluciones del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la República Argentina, que fijaron el modelo y estándares de la enseñanza de la ingeniería en nuestro país. Estas Resoluciones fueron utilizadas desde el año 2001 en los procesos de acreditación de carreras en Argentina. [8]

La definición de los estándares de las carreras de ingeniería, se plasman durante el año 2018, con la concreción del Libro Rojo del CONFEDI, en él se cita:

> *"A principios del año 2005, este consejo concluye que Hay consenso en cuanto que el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer. El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo." [9]*

Los procesos que se enuncian en esta breve recopilación histórica, son el punto de partida de las necesidades de interpelación para llevar adelante la migración a un diseño por competencias en la etapa de ingreso del estudiante.

Actualmente, en el ingreso a la Facultad de Ingeniería se trabaja con el diseño curricular basado en objetivos y contenidos, es por esto que la migración a un diseño por competencias no solo cuestiona la práctica de la enseñanza, la evaluación y el cómo se ve al estudiante, sino que cala más profundo.

Este proceso de cambio, se plasma en la tesis elaborada por la Profesora Milena Balbi, para obtener el título de magister, en 2014. Donde manifiesta:

> *"La enseñanza basada en un currículo por competencias favorecería la formación de estrategias de pensamiento y de conocimiento, promoviendo la actitud de "querer aprender" más allá del "querer aprobar", colaborando con la toma de conciencia del aprendizaje logrado, mediante la relación entre lo que se conocía y el nuevo conocimiento que se incorporó, sumado a ambientes de trabajo áulico que propicien la producción de conocimientos.*
>
> *Para poder tratar sobre la enseñanza por competencias se puede comenzar a analizar la noción de competencia que propone Perrenoud como "capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos". La complejidad del problema es patente para la educación superior: se trata de formar estudiantes que tendrán que saber hacer determinadas cosas (probablemente sin ulteriores instancias formales de formación –nadie a quien "tirar el fardo" más adelante) apoyados en determinados conocimientos, pero no sólo en ellos. Gran parte del problema radica en que el pasaje de la*

adquisición de un conjunto de conocimientos al dominio de una competencia no es algo lineal, y debemos admitir que este proceso es bastante poco conocido para la mayoría de los docentes universitarios." [10]

No es tema menor, que los ingresantes a ingeniería, deben poner en acción funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc., desde este período de ingreso para comenzar las asignaturas del primer cuatrimestre, con la experiencia previa de haber tenido un proceso de aprendizaje con una propuesta pedagógica que incluye actividades necesarias para su desarrollo.

Teniendo en cuenta los aportes de experiencias llevadas a cabo en la Universidad Nacional de Cuyo, "las Competencias Específicas corresponden a un conjunto de conocimientos, actitudes, valores y habilidades específicos relacionados entre sí, que permiten desempeños satisfactorios a toda persona que aspire a estudiar una determinada carrera universitaria, o sea los conocimientos y capacidades complejas e integradas, propias de la/s área/s disciplinar/es vinculada/s a una carrera, requeridas para el ingreso y permanencia.[11]

Es por esto que, a partir del análisis de los documentos antes expuestos, se definieron las competencias de ingreso para la Facultad de Ingeniería de la UNNE:

- *CI 1:* Analizar una función o un fenómeno físico y/o químico sencillo a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas.
- *CI 2:* Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos.
- *CI 3:* Transferir el conocimiento científico de física, química y matemática a situaciones problemáticas variadas.
- *CI 4:* Planificar e implementar estrategias de aprendizaje para desempeñarse como estudiante.

A partir de estas competencias, fue necesario redactar los resultados de aprendizaje, entendiendo que estos se diferencian de las competencias, en que su elaboración, además de ser sencilla, define claramente el saber que el estudiante debería alcanzar. Tampoco son las rúbricas, porque éstas últimas definen los niveles del resultado de aprendizaje alcanzado. El Resultado de Aprendizaje, tal como define CONFEDI (2017), describe lo que se espera que "sepan" y "sepan hacer" los estudiantes al finalizar un determinado período de aprendizaje, está relacionado con las habilidades, conocimientos y conductas que deben adquirir a lo largo de su carrera [12].

Se podría decir, entonces que los resultados de aprendizaje, representan un puente entre las competencias y las rúbricas. Y según Jerez, Hasbún y Rittershaussen, "En síntesis, los Resultados de Aprendizaje se gestionan a nivel de módulo, curso o asignatura y un conjunto de resultados permiten dar cuenta de una competencia, las cuales orientan el diseño curricular o plan de estudios" [13]

En este sentido, se definieron los resultados de Aprendizaje y las Rúbricas para el Módulo de Matemáticas para Ingresantes a Ingeniería 2022.

Para este trabajo se centró el estudio en el resultado de aprendizaje 1 y en la competencia específica 1.3, utilizando la rúbrica definida en la Tabla 2, de elaboración propia.

2.3 Desarrollo del módulo en 2022

El Módulo de Matemáticas para Ingresantes a Ingeniería 2022, tuvo una duración de cinco semanas, desde el 7 de febrero al 11 de marzo.

Los trabajos de evaluación se llevaron a cabo en diferentes momentos:

- *Test de Diagnóstico*, al comenzar el Módulo.
- *Coloquios semanales,* uno por semana aproximadamente, sobre los temas que se trabajaron durante la misma.
- *Test Integrador*, al finalizar el Módulo.

Se hace necesario y primordial el análisis de esta etapa, para conocer las características de los ingresantes, qué competencias específicas alcanzaron respecto a los saberes, con el objeto de relacionar con las alcanzadas en las asignaturas matemáticas del primer año, en el marco del proyecto de investigación PI 19D004, ya que son los objetivos de este proyecto:

- *Promover* la enseñanza de la matemática, mediante el enfoque por Competencias.
- *Implementar* acciones de mejora y fortalecimiento académico, para los alumnos del 1° y 2° año.
- *Propiciar* espacios de construcción colectiva e interdisciplinaria del conocimiento matemático.

Tabla 2. Resultado de aprendizaje R.A. 1 y rúbricas para el módulo de matemáticas para los ingresantes de 2022.

	Resultado de Aprendizaje (RA)	**Rúbrica**				
		Criterios	Principiante 3 puntos	Básico 5 Puntos	Competente 7 puntos	Avanzado 10 puntos
	R.A. 1 Aplica propiedades y conceptos para resolver actividades modelizando situaciones con polinomios y empleando las condiciones de cada conjunto numérico.	C.E. 1.3: Resuelve operaciones con conjuntos numéricos, aplicando propiedades y usando otras representaciones **15% (0,15)**	No demuestra interés en resolver las actividades	Identifica los datos de las actividades presentadas en los materiales, pero tiene dificultad en reconocer las operaciones matemáticas, propiedades y representacio-nes que intervienen en el problema.	Reconoce con interés el concepto matemático que representa la situación, de manera adecuada por medio de las operaciones matemáticas, propiedades y representaciones sin considerar las condiciones del contexto.	Identifica los datos de la actividad con mucho interés, elaborando el modelo matemático que representa la situación, de manera adecuada por medio de las operaciones matemáticas, propiedades y representaciones considerando las condiciones del contexto.
C.I. 2 y C.I.3						
		C.E. 1.4: Modeliza situaciones problemáticas empleando polinomios y sus propiedades. **20% (0,2)**	No demuestra interés en resolver las actividades	Identifica los datos del problema presentados en los materiales del aula virtual, pero tiene dificultad en reconocer polinomios que intervienen en el problema.	Reconoce con interés el modelo matemático que representa la situación, de manera adecuada por medio de polinomios sin considerar las condiciones del contexto.	Identifica los datos del problema con mucho interés, elaborando el modelo matemático que representa la situación, de manera adecuada por medio de polinomios considerando las condiciones del contexto.

En cada eje temático del módulo se plantean problemas en contexto ingenieril, con el objeto de introducir al ingresante a algunos términos y actividades básicas que usa el ingeniero.

En este análisis, se trabajó con el Eje temático 1, conjuntos numéricos: operaciones con diferentes conjuntos numéricos, racionalización, proporcionalidad y regla de tres. Donde se desarrollaron situaciones problemáticas físicas, también de suma importancia para la formación del futuro ingeniero. Porque es la base de la matemática que brinda las herramientas necesarias para desarrollar los siguientes ejes temáticos, y los saberes de las asignaturas del primer año.

Los temas que se desarrollaron y que son evaluados con este instrumento, corresponden al Según Tobón Tobón, Pimienta Prieto y García Fraile, los criterios de evaluación "son las pautas o parámetros que dan cuenta de la competencia y posibilitan valorarla de acuerdo con los retos del contexto social, laboral, profesional, investigativo y/o disciplinar actuales y futuros. Los criterios de desempeño permiten determinar cuándo la actuación de la persona es idónea en determinadas áreas". [14]

De manera que, el instrumento de evaluación diseñado para evaluar el RA1, consta de cuatro ejercicios, con sub ítems, que hacen un total de seis actividades, que se analizan según las competencias de ingreso, el resultado de aprendizaje y las rúbricas, de la Tabla 2.

Las actividades propuestas apuntan a lo más básico del razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo), posibilitado por algunos conocimientos fundamentales afianzados por las matemáticas escolares, es el centro de la alfabetización matemática. Según el documento de PISA [15] entre éstos conocimientos fundamentales se encuentran:

- entender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas;
- apreciar el poder de la abstracción y la representación simbólica;
- identificar las estructuras matemáticas y sus regularidades.

A continuación, se muestra el instrumento en la Fig. 1:

FACULTAD DE INGENIERÍA — Primer Parcial 15/02/2022
UNNE — Modulo de Matemáticas

NOMBRE Y APELLIDO: _____T1

DNI: _____CALIFICACION: _____

1) Resolver aplicando propiedades. Indicar a que conjunto numérico corresponde el resultado.

$a)\ \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \times \frac{\sqrt{3^3} \times 2^{\left(-\frac{4}{2}\right)}}{\frac{1}{3^2} \times 2} \times 4$ b) $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right) \times \sqrt{3} - \frac{4}{5}$

2) Resolver aplicando propiedades.

a) $\log_3 \frac{\sqrt{27}}{9}$

3) Racionalizar la siguiente expresión

a) $\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ b) $\frac{5^{1/2}}{\sqrt{2}-3}$

4) si un vehículo ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

Fig.1. Instrumento de Evaluación denominado: Primer Parcial.

Con el objetivo de realizar el seguimiento del rendimiento de los ingresantes, se observaron las resoluciones efectuadas para cada ejercicio, por estudiante, considerando cada desarrollo a la luz de las rúbricas.

Con la planilla de las competencias de ingreso, el resultado de aprendizaje y las rúbricas, se analizaron las actividades, y se interpelaron tanto la forma de evaluar, cómo la manera de asignar el puntaje. Pero a la hora de comparar con las rúbricas, se define claramente hasta dónde llegan las producciones y que se debe trabajar.

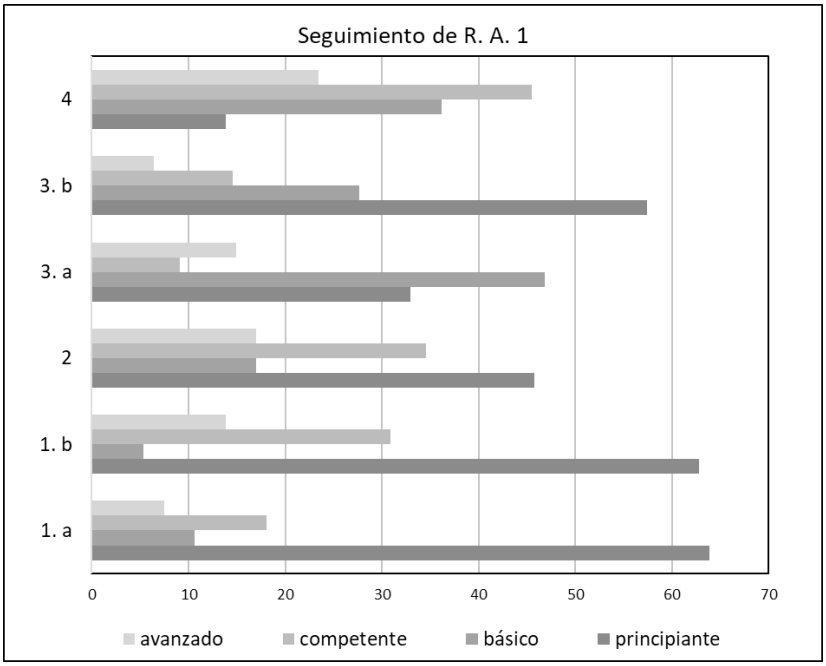


Fig. 2. Gráfica que muestra el análisis efectuado sobre las evaluaciones de los estudiantes desde las rúbricas, definidas para la competencia específica C.E. 1. 3, correspondiente al resultado de aprendizaje R.A. 1, que tributa a las competencias de ingreso C.I. 2 y C.I. 3.

A continuación, se detallan los indicadores para las rúbricas consideradas para el R. A. 1, en el instrumento de evaluación:

- *Principiante:* el estudiante no resuelve, o resuelve con muchos errores los ejercicios, no coloca la simbología (paréntesis, símbolo igual, etc.), y no respeta la jerarquía de las operaciones.
- *Básico:* el estudiante no llega al resultado, o llega a un valor sin colocar los símbolos, ejecuta las operaciones de manera desordenada. Se nota que hace mecánicamente las cuentas, no llega a la mínima expresión.
- *Competente:* el estudiante llega al resultado, colocando la mayoría de los símbolos, pero no escribe las conclusiones pedidas, y omite las unidades.
- *Avanzado:* el estudiante realiza el ejercicio perfectamente, con todos los pasos, empleado las unidades del contexto.

2.4 La Mirada del Docente:

El cambio de la evaluación por objetivos y contenidos, a las rúbricas no es sencillo de realizar por parte de los docentes.

Es interesante aclarar cuáles fueron los puntos tenidos en cuenta por el cuerpo docente, a la hora de unificar criterios en la corrección y en las autoevaluaciones realizadas una vez efectuadas las devoluciones a los alumnos.

Por un lado, se valoró que un ejercicio fue bien resuelto, cuando el alumno realizó bien los cálculos, sin escribir con la rigurosidad matemática en lo que respecta a los símbolos.

Se ponderó el puntaje correspondiente al ejercicio del temario, aunque haya sido copiado con errores.

Se observó, que frecuentemente, las consignas no están claras para la comprensión del alumno, y el docente corrige desde su perspectiva, de acuerdo a lo que se esperaba que resuelva. Por ejemplo, se considera la totalidad del puntaje, solo cuando llega a la mínima expresión, y esto no figura en el enunciado.

En los problemas de aplicación de regla de tres simple, los docentes observaron que es un tema consabido por los estudiantes, ya que lo plantearon con seguridad, colocando las unidades, simplificando, y llegando al resultado. Realizaron los pasos de resolución de problemas, planteo, solución y discusión del resultado, colocando la respuesta al mismo.

Se observó, también que la mayoría de los estudiantes no termina de leer las consignas y resuelve mecánicamente un ejercicio, llegando al resultado numérico, pero no coloca las conclusiones solicitadas.

Una observación de los docentes, es que, en esta etapa, los ingresantes en general, no separan términos.

3 Conclusiones y trabajos futuros

La Universidad es la etapa del aprendizaje de los estudiantes en la que aprenden a aprender, es decir, desarrollan habilidades para producir saberes, reconstruyendo o reorganizando conocimientos previos, pero también es importante que se enriquezcan con una variedad de competencias que le permitan "hacer" con ese conocimiento.

> *"Ese "hacer" es básicamente para un ingeniero, resolver problemas. Es ésta una actividad que favorece la utilización del conocimiento para lograr el objetivo, pues como señala Camilloni: "Resolver problemas es una tarea que pone en juego tanto el uso de los conocimientos que se poseen sobre los temas acerca de los que versan las preguntas y que están implicados en los problemas planteados cuanto el de los conocimientos acerca de las estrategias cognitivas que son más adecuadas para desarrollar los procesos de pensamiento que conducen a analizar el problema, identificarlo y solucionarlo."[16]*

Desde el ingreso, es necesario definir las competencias, los resultados de aprendizaje y las rúbricas que describen el rendimiento académico del ingresante, para que comiencen el primer año preparados para cursar las materias Álgebra y Geometría y Análisis Matemático I, y las otras asignaturas. También le da un marco al período de ingreso, sumándose al proceso de cambio curricular.

Los objetivos del proyecto PI D004/19 suman a este análisis presentado, aportando la mirada ingenieril, desde el ingreso, para los temas que se desarrollan en este período.

Los docentes de la etapa del Módulo de Matemáticas para Ingresantes a Ingeniería, junto con los Tutores Académicos, evalúan los aprendizajes por medio de rúbricas, tomando consciencia y reflexionando sobre cómo están evaluando, y esto los lleva a proponer mejoras en las prácticas evaluativas

Los futuros trabajos que dan continuación a este, tienen que ver con los resultados de aprendizajes y rúbricas del Módulo mencionado, analizando todas las evaluaciones, para posteriormente seguir con las materias del primer año.

Referencias

1. Mahave, A.; Parisi, M.; Ojeda, N.; Arriola, E.; Cruz de Mena, N.; Giraudo, M.; Balbi, M., Kosteski, L.: Decrecimiento de la población estudiantil durante el primer año de la carrera de ingeniería. Relevamiento correspondiente a los diez últimos años. *Revista del Instituto de Matemática.* N° 7, pp. 3-7 (2008).
2. Mahave, A.; Ojeda, N.; Balbi, M.; Giraudo, M.: Ingresantes a la Facultad de Ingeniería - Año 2011; Informe de avance. *Revista del Instituto de Matemática.* N° 15, pp. 14 (2012).
3. Mahave, A.; Tamburini, H.; Parisi, M.; Acevedo, M.; Ojeda, N.: La Formación matemática del ingeniero con vistas a mejorar la calidad. Informe Final P.I. 472 D. Instituto de Matemáticas. Facultad de Ingeniería. UNNE (2002).
4. Mahave, A.; Parisi, M.; Ojeda, N.; Arriola, E; Giraudo, M.; Balbi, M.: Rendimiento Académico de los Ingresantes en la Facultad de Ingeniería en el Año 2008. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas, Secretaría General de Ciencia y Técnica*, UNNE, 2009.
5. Biolatto, R.; Boccardo, L.; Lesquiuta, M. C.: Acceso y Permanencia en una Educación de Calidad el Ingreso a la Universidad, un Puente a Atravesar - Congreso Iberoamericano de Educación- Bs. As. (2010).
6. García, M: Proyecto estratégico de reforma curricular de las ingenierías. *UTN Universidad Regional Bahía Blanca. Utec Noticias.* Número 22 - septiembre 2005.: https://www.frbb.utn.edu.ar/utec/22/index.php. Accedido 6 de septiembre 2022.
7. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería - CONFEDI: Mosaico de historias. Libro azul y Libro verde. https://confedi.org.ar/libro-azul-y-libro-verde/. Accedido 6 de septiembre 2022.
8. Morano, M.: Documento de CONFEDI, XXXVII. Reunión Plenaria - Santa Fe (2005 a 2007).
9. Giordano Lerena, R.: Cirimelo, S. [editores]: Libro Rojo de CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda

generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina, (2018).
10. Balbi, M.: Enseñanza por Competencias y su Ambiente de Trabajo, para el Ingreso a 1º año en la Facultad de Ingeniería de la UNNE. Tesis para optar al título de magíster en la enseñanza de la matemática - UNNE, Sáenz Peña, Chaco, Argentina, p. 25 (2014).
11. Zalba, E. M. et al: Competencias Para el Ingreso y Permanencia en la Universidad: Una Propuesta Para la Articulación Curricular Entre el Nivel Superior y el Nivel Medio de Enseñanza: La Experiencia De La Universidad Nacional de Cuyo. https://www.academia.edu/5021681/COMPETENCIAS_PARA_EL_INGRESO_Y_PERMANENCIA_EN_LA_UNIVERSIDAD_UNA_PROPUESTA_PARA_LA_ARTICULACI%C3%93N_CURRICULAR_ENTRE_EL_NIVEL_SUPERIOR_Y_EL_NIVEL_MEDIO_DE_ENSE%C3%91ANZA_LA_EXPERIENCIA_DE_LA_UNIVERSIDAD_N ACIONAL_DE_CUYO. Accedido el 11 de abril de 2022.
12. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería - CONFEDI. Marco conceptual y definición de estándares de acreditación de las carreras de ingeniería. Oro Verde. (2017)
13. Jerez, O.; Hasbún H.; Rittershaussen, S.: El Diseño de Syllabus en la Educación Superior: Una Propuesta Metodológica. Universidad Nacional de Chile (2015).
14. Tobón Tobón, Pimienta Prieto y García Fraile, J.: Secuencias didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias. México: Pearson Educación (2010).
15. Rafael Benjumea, R. [Coordinador de la publicación]: Marco para prueba de matemáticas PISA 2021, p.22. https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:b7f0ba60-38ec-4523-af38-5b4d752fec96/pisa-2021-mr-matem-ticas-es.pdf. Accedido el 6 de septiembre de 2022.
16. Balbi, M.: Enseñanza por Competencias y su Ambiente de Trabajo, para el Ingreso a 1º año en la Facultad de Ingeniería de la UNNE. Tesis para optar al título de magíster en la enseñanza de la matemática - UNNE, Sáenz Peña, Chaco, Argentina, p.108 (2014).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Recurso didáctico responsivo en el aprendizaje activo de Matemática para Ingeniería

Arias Silvia E.[1], Diaz Dávila Laura C.[1], Hirschfeld Gisela[2], Del Bono Dana[3]
[1]Departamento de Computación. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1611, CP X5016GCA, Córdoba, Argentina
silvia.arias@unc.edu.ar; laura.diaz@unc.edu.ar
[2]Departamento Universitario de Informática
Av. Valparaíso s/n esq. Enf. Gordillo Gómez, CP 5000, Córdoba, Argentina
gise320@gmail.com
[3]C.E.S.E.R. (Centro de Estudios Superiores de Entre Ríos)
Alsina 816, CP 3100, Paraná, Entre Ríos, Argentina
danadbon@gmail.com

Resumen. En el marco de un proyecto de investigación cuyo objetivo es superior, este trabajo comparte los avances del desarrollo de un recurso didáctico adaptativo, actualmente en fase de prueba, que pretende consolidarse como promotor potencial del aprendizaje para contribuir a paliar las dificultades en la articulación entre el nivel medio y la universidad, en Matemática para Ingeniería. Además se muestran los resultados de una investigación previa que justificó la elección de este recurso como estrategia responsiva para facilitar el aprendizaje activo. Su finalidad última es la mejora en el aprendizaje de las disciplinas CTIM (Ciencias-Tecnologías-Ingeniería-Matemática).

Palabras Clave: Aprendizaje, Aplicación interactiva, Articulación nivel medio- nivel universitario, Disciplinas CTIM.

1 Introducción

1.1 Antecedentes

El trabajo comparte resultados en el avance del proyecto vigente: "Un Enfoque Integral para Propiciar Cursos Abiertos On Line desde la Universidad Nacional de Córdoba", en la categoría de "Proyecto Consolidar III". Este equipo contó con el acompañamiento de dos "Proyectos Formar" de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y un proyecto Consolidar de la Facultad de Ciencias de la Comunicación, en el marco del Programa "Apropiación Social del Conocimiento y la Tecnología".

Los proyectos de investigación involucrados son acreditados y financiados por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba (U.N.C.).

1.2 Contexto Actual

El equipo de Investigación continúa trabajando luego de repensar nuestros objetivos en función de las fortalezas de los integrantes y el contexto vigente, para alcanzar los logros que aún están pendientes y finalizar el plan de trabajo del proyecto actual mencionado en el resumen, y rediseñar sus nuevas orientaciones a líneas futuras que ponen

énfasis en un enfoque multidisciplinario de la Inteligencia Artificial para dar solución a problemas emergentes que impactan significativamente en la mejora de calidad de vida de las personas; en el marco de las recomendaciones de la UNESCO de noviembre de 2021[1] en la conferencia 41 de Naciones Unidas a la que adhirieron 68 países miembros.

El presente trabajo se realiza en el marco del "Proyecto Consolidar" dirigido por la Dra. Laura C. Díaz Dávila cuyo objeto de estudio es la Enseñanza Superior (ES) en contextos de masividad, escenario áulico en el cual la comunicación personal entre el docente y el estudiante se ve impedida en razón del número de participantes. El proyecto vigente referenciado ut supra, con una perspectiva multidisciplinaria, desarrolla acciones de formación de investigadores en tecnologías novedosas como: plataformas educativas, software, blockchain y herramientas de Inteligencia Artificial; coadyuvando a diferentes encuadres del contexto tecnológico actual caracterizado por vertiginosos cambios en educación y el aprendizaje colaborativo. En marco de las pedagogías emergentes y los ambientes virtuales, propendiendo a un prototipo MOOC, cuyo objeto de aprendizaje asocia disciplinas académicas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (CTIM - STEM science, technology, engineering and mathematics); usando Tecnologías Inteligentes de Explotación de la Información (TIEI) para procesos decisionales en la gestión de Educación Superior (ES).

La finalidad es favorecer la apropiación del conocimiento [2], acordando con la declaración del Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) de 2005, al que se sumó el Consorcio del Sistema de Información Universitaria (SIU) en 2013.

En Argentina, el acceso a las Universidades públicas y el desgranamiento [3] asociado a la masividad despierta el interés por ofrecer propuestas creativas acordes a esta realidad. Alineado con las conclusiones de la Conferencia Regional en Educación Superior de América Latina y el Caribe (CRES) 2008.

El aula virtual [4], implementada como complemento y apoyo de la enseñanza presencial, conformó un espacio para la construcción de nuevos conocimientos a través de diferentes propuestas de comunicación, acceso a información y vinculación de contenidos, reafirmando el desafío de pensar en los aprendizajes más allá de las paredes del aula.

En este escenario la enseñanza cabalga entre dos estadios, pasaje de normalidad a pandemia por un lado y ahora de pandemia a post pandemia, por el otro; de modo transversal y en tiempos récords para los cambios en educación.

Las Instituciones Educativas en particular de la que somos parte, "La Superior", no se ha escatimado esfuerzo para capacitarse y brindar una Educación Virtual de Calidad tanto por parte de los Docentes como de los alumnos. Bedoya [5] expresa: "diversas universidades desarrollaron talleres y programas de capacitación para entrenar al personal académico y a los estudiantes sobre el uso de este tipo de plataformas y para el desarrollo de habilidades de aprendizaje en línea". Al llevar adelante el proceso de enseñanza- aprendizaje y el hecho de experimentar en el uso de herramientas tecnológicas con independencia, le han permitido ir adquiriendo eficientemente conocimientos y un "saber hacer" autónomo que ha impulsado al estudiante como agente activo y de primera línea en su formación

La Sociedad toda ha entendido que el valor de cualquier institución educativa reside en sus miembros y en su compromiso con ser mejores personas, cada vez mejor formadas y preparadas para afrontar los retos del futuro.

En esta realidad, la educación se ha realizado desde la horizontalidad, aunando esfuerzos en un trabajo de equipo, colaborando todos y cada uno de los actores (autoridades, docentes y estudiantes) para sustentar su objetivo y un mejoramiento continuo. En el contexto de Pandemia, Bedoya [5], referencia: "la educación en línea o asistida por tecnología también ha requerido de retroalimentación constante por parte del personal y los estudiantes, para apoyar los procesos de calidad de la educación y monitorear los procesos de aprendizaje y enseñanza".

Son los tiempos difíciles los que evidencian el carácter y aquello de lo que estamos hechos. Bedoya [5] manifiesta lo siguiente: "la educación superior se ha visto afectada por esta pandemia, debido al cierre o acceso restringido a los campus universitarios y los desafíos que implica garantizar los procesos de enseñanza-aprendizaje e investigación bajo otras modalidades".

Que esta virtualidad vino para quedarse en algunos casos con educación combinada (B-learning) para articular en el sistema educativo entre niveles y en general llegar a ciudadanos que accedan a formación de calidad, asíncronas y con certificaciones de la UNC.

Esto no es solamente en nuestro país sino en la "aldea global". Capano y Pritoni [6] denominan "gobernanza híbrida" y qué en cada Región o país toma diferentes modalidades de implementación.

Córdoba "La Docta" como se ha dado a conocer en nuestra Argentina, la cual a su vez se destaca por su nivel Educativo en América Latina, no puede ni debe dejar de transmitir un mensaje de civismo y solidaridad en estos momentos, ofreciendo desde la Universidad Nacional de Córdoba lo que mejor sabemos hacer adecuándolo a los tiempos que corren de post-Pandemia y de iniciación de un conflicto entre dos países muy cercano a transformarse en un conflicto mundial.

Que esta virtualidad vino para quedarse en algunos casos con educación combinada (B-learning) para articular en el sistema educativo entre niveles y en general llegar a ciudadanos que accedan a formación de calidad, asíncronas y con certificaciones de la UNC.

En este contexto de post pandemia, se debate en las universidades la noción de "Universidad híbrida" y reactualiza la pregunta del modelo de Universidad que necesitan nuestras sociedades latinoamericanas [7].

Se permite en el presente artículo, mencionar que durante el 2021 despedimos a dos investigadores principales: Laura Mónica Vargas (Doctora en Ciencias de la Ingeniería - Master en Comunicaciones - Especialista en Docencia Universitaria - con sólida formación matemática) y José Luis Galoppo (Master en Sistemas y Redes de Comunicaciones - Especialista en Docencia Universitaria - Coordinador del Ciclo de articulación de Matemática en la FCEFyN). Estas irreparables pérdidas nos conmina a ofrecer un homenaje en sus memorias.

2 La tecnología como mediación del aprendizaje

La incorporación de las tecnologías a la educación en su línea de tiempo fue recorriendo diversos e inéditos campos de investigación, que permiten nuevas formas de experimentación en la enseñanza. Así pues, se desarrollan los entornos de e-learning, b-learning y m-learning y su evolución hacia los MOOC actuales. Surgen los blogs, wikis, clickers y CMS, o más recientemente los wearables (pequeños dispositivos electrónicos que se incorporan en nuestro cuerpo) en el aula. La explosión de herramientas y metodologías con la incorporación de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) hacen que su utilización en la educación sea un campo todavía de profusa investigación, surgiendo gran cantidad de líneas de investigación, por mencionar alguna de ellas: Aprendizaje mejorado por tecnología, tutores inteligentes, aprendizaje colaborativo asistido por ordenador, entornos virtuales 2D o 3D para el aprendizaje, realidad aumentada y juegos serios o ludificación (gamificación) educativa.

En este contexto, surgen iniciativas dentro de la comunidad científica y educativa de contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza, animando a los estudiantes a mejorar su participación, a seguir sus propias vías de aprendizaje e intereses, a fomentar su curiosidad, o motivarles en sus estudios [8].

Los nuevos paradigmas educativos utilizando redes sociales y videos otorgan herramientas básicas para la formación actual.

Las plataformas tradicionales como Manhattan, Claroline, Moodle y Sakai [9] [10], se han ido quedando atrás en sus servicios, en cuanto a la masividad de la enseñanza y la interactividad con los videos se refiere [11].

En esta investigación para favorecer acceso, continuidad y permanencia, mitigando el desgranamiento fueron surgiendo distintas y novedosas herramientas TICs que fueron captando nuestro interés en explorarlas y aplicarlas al objeto de estudio, como progresión de lo presentado en el EMCI 2021[12], hendiendo siempre desde un abordaje multidisciplinar.

En nuestra propuesta subyace utilizar los beneficios prácticos y ventajas que aporta el uso del nuevo estándar HTML5 en las páginas web y los de una educación mixta, o formación combinada [Blendend Learning] en el aula y con el grupo clase, no sólo desde el punto de vista de la presencialidad, que pueda ser sincrónica y asincrónica; en donde los alumnos de los cursos masivos con mejor formación puedan mediante esta herramienta alcanzar el aprendizaje necesario en el tiempo que dispongan, mientras que los docentes [13] puedan aplicar una educación más personalizada hacia aquellos estudiantes que así la requieran.

Priorizando su aplicación en esta etapa a la enseñanza de Matemática en los Ciclos Nivelatorio y Básico de las carreras de Ingeniería de la UNC, facilitando afianzar en los alumnos conceptos y procedimientos. Atento a ofrecer un recurso didáctico "responsivo" o adaptativo como fuente de motivación y participación en su proceso de aprendizaje que mediante animaciones simplifique la comprensión en temas donde los estudiantes presenten inconvenientes en la elaboración del conocimiento, corroborando resultados de lo antes generado en papel a partir de una ecuación para explorar qué sucede al modificar parámetros a través de las distintas visualizaciones gráficas y su proceso inverso. Sin tiempo y espacio específico practicar sobre la tarea académica, esclarecer dudas en su interpretación; todo de modo amigable, interactivo y atemporal. Siempre con la idea de brindar como promotora potencial de nuevos aprendizajes y con la atención que hoy en día la misma despierta en los jóvenes de esa edad, una herramienta visual diferente al video, como lo es la animación interactiva.

3 Aspectos metodológicos: descripción, integración y selección de herramientas

3.1 Descripción

HTML5, recoge todas las ventajas que introdujo el XHTML y elimina bastante restricciones y limitaciones, a saber:

- El código es más sencillo y simplificado, por lo que carga más rápido las páginas en el navegador.
- La mayoría de los navegadores de los teléfonos Smartphone y las tabletas, son compatibles con él.
- La página escrita en este lenguaje es priorizada por el buscador Google, respecto a otras con el mismo contenido pero escritas usando otros lenguajes.
- Permite la Geolocalización del usuario.
- Introduce infinidad de opciones como insertar directamente video (no flash), música, y casi cualquier elemento, que hasta la versión 5 eran vedados a las páginas web; es decir es posible insertar directamente videos en las páginas sin tener que acudir a los iframes o usar la etiqueta object.
- Los plugins, widgets y botones que ofrecen los desarrolladores de las redes como Facebook, Twitter y otras, escritos en HTML5 funcionan excelentemente, con más opciones que los clásicos en XHTML o que los iframes.

Para responder a las necesidades y aprovechando las ventajas planteadas se proyecta el desarrollo de una página web, para lo cual se emplearán las siguientes herramientas de desarrollo: HTML5 [14] [15] [16], JavaScript [17] [18], CSS [19], CANVAS [20] y BOOTSTRAP [21].

3.2 Integración y selección

Esto se logra luego de una investigación exploratoria según especificidad del requerimiento en particular, y la herramienta que mejor se adapte a la resolución eficiente del mismo.

La aplicación web estará destinada al estudiante de manera que pueda participar en la misma a través de diversas animaciones interactivas, generación de gráficos a partir de una ecuación y viceversa. Permitiéndole al alumno esclarecer dudas y practicar sobre temas que le presenten dificultades, esto de un modo interactivo, amigable y atemporal.

El propósito es lograr que mediante su propia curiosidad pruebe las distintas posibilidades y resultados que puede dar una operación, y que gracias a la exploración obtenga una idea más certera, concreta y concisa de los temas en estudio, es decir, construya su conocimiento y adquiera competencias.

El desarrollo de la fase beta se basa en HTML5 y la aplicación CCS y Bootstrap. Se probaron además las diversas herramientas disponibles para la animación de las funciones y sus aplicaciones, por un parte se trabajó con javascript – css, y por otro con canvas.

En su versión final, a través de su dirección electrónica, será ofrecido como una herramienta más de estudio, sumando a la bibliografía y demás recursos didácticos utilizados en la asignatura.

4 Contribuciones Obtenidas / Esperadas

4.1 Aplicación responsiva para el aprendizaje activo

Se muestra el estado de avance de las herramientas elegidas, que constituyen en sí mismas una contribución directa a la formación en un área emergente, en cuanto a que los estudiantes “fabrican” sus herramientas web y las comparten transformándolos en lo que conocemos en la actualidad como “Producer”, es decir productores + usuarios de éstos recursos TIC.

A modo de ejemplo a continuación se presentan porciones de código de la Aplicación y salidas preliminares en diferentes módulos y estadios de desarrollo:

Algoritmo 1. Una porción de código a ser utilizada para planos paralelos, invocada por las funciones desarrolladas para la aplicación.

```
var c = document.getElementById("rectangulos");
var cxt = c.getContext("2d");
cxt.fillStyle = "#123456"; // Definimos el color para rellenar el rectangulo
cxt.fillRect(30,10,50,100); // Dibuja un rectangulo relleno - fillRect(x,y,wi-
dth,height)
cxt.strokeStyle = "red"; // Definimos el color para pintar el borde
cxt.strokeRect(70,32,100,50); // Dibuja el borde del rectangulo - stroke-
Rect(x,y,width,height)
cxt.fillRect(145,25,70,70); // Dibuja un rectangulo relleno del ultimo color
definido con fillStyle
cxt.fillStyle = "rgba(220,220,10,0.7)"; // Definimos otro color para rellenar
el rectangulo
cxt.fillRect(180,10,100,100); // Dibuja un rectangulo relleno
cxt.clearRect(30,10,20,20); // Borra el contenido que hubiese en el area
del rectangulo definido
cxt.strokeRect(190,20,80,80); // Dibuja el borde del rectangulo de definido
por ultima vez con strokeStyle.  on var c = document.getElementById("mi-
canvas");
```

Algoritmo 2. Porción de que se utiliza para incluir una imagen en canvas además de la función de canvas necesaria para incrustar la imagen es necesaria la función de javaScript para crear imágenes y por su puesto hay que definir la ruta de la imagen. A demás es necesario usar el evento onload sobre la imagen para que la imagen se dibuje cuando ya esté cargada, obviamente, porque en caso contrario se ejecutaría la función antes de que estuviese la imagen completamente cargada con lo que fallaría.

```
var c = document.getElementById("micanvas");
var cxt = c.getContext("2d");
var imagen = new Image(); // Crea una imagen para luego poder mostrarla
imagen.src = 'ruta/imagen.jpg'; // Se define la ruta de la imagen
imagen.onload = function(){ // Mediante el evento onload se espera a que se cargue
la imagen
    cxt.drawImage(imagen, 50, 50); // Dibuja la imagen en la posicion indicada
}
// Otra alternativa
var img = document.getElementById("imagen"); // Recupera una imagen del html me-
diante su id
cxt.drawImage(img, 50, 50, 200, 140); // Dibuja la imagen en la posicion indicada
y con un tamaño de 200x140
// Rellenar un objeto con una imagen
var patron = context.createPattern(imagen, repeat-x);
cxt.fillStyle = patron;
cxt.fillRect(10,10,200,200);
```

Algoritmo 3. Como no hay una función exclusiva para dibujar círculos sino que la función que hay es para dibujar arcos y si se quiere hacer un círculo pues habrá que usar un arco de 2π (utiliza radianes).

```
program var c = document.getElementById("micanvas");
var cxt = c.getContext("2d");
cxt.beginPath();
cxt.arc(60,60,40,0,Math.PI*2,true);  //arc(x,y,radio,angulo_inicio,angulo_
final,sentido[antihorario-true / horario-false])
cxt.closePath;
```

```
cxt.stroke();
cxt.beginPath();
cxt.arc(140,60,40,0,Math.PI,true); // Un arco de medio circulo en sentido
antihorario
cxt.closePath;
cxt.stroke();
cxt.beginPath();
cxt.arc(220,60,40,0,Math.PI*2,false); // Dibuja el circulo en sentido ho-
rario
cxt.closePath;
cxt.fill(); // Un circulo relleno
cxt.beginPath();
```

En el mismo sentido, a modo orientativo se muestran determinada salida del Sistema en su fase beta, capturas de pantalla en secuencia para dar idea del movimiento y animación, que la aplicación brinda. Fig. 1 y Fig. 2.

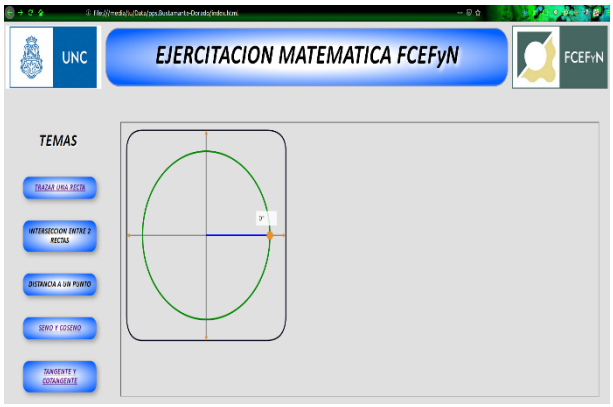


Fig. 1. Una gráfica que representa el comienzo del movimiento en sentido contrario a las agujas del reloj.

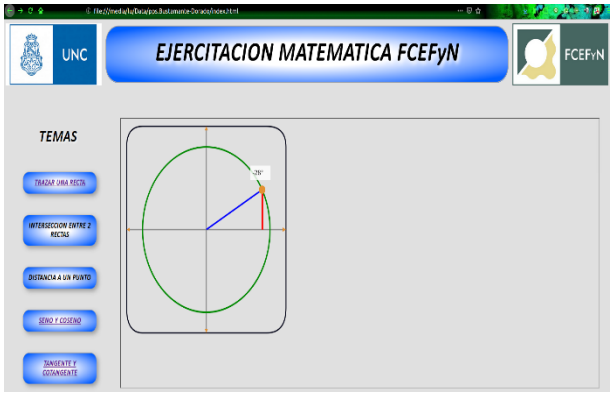


Fig. 2. Una gráfica que representa a modo de ejemplo una segunda instancia del movimiento.

4.2 Acciones previas a la elección del recurso de aprendizaje

En este apartado se muestran algunos resultados de la investigación preliminar que dio luz a la elección de la aplicación presentada. Esencialmente se comparten aquellos hallazgos que contribuyen a fundamentar los avances de esta línea de investigación en proceso. Se materializan a través del interrogante disparador para indagar acerca de las percepciones que los jóvenes tienen sobre sus preferencias en el uso de recursos multimedia: "¿Qué recursos digitales prefieren los estudiantes universitarios en sus clases on line?". Este trabajo ser realizó durante 2020, 2021 y parte de 2022 en el marco del Proyecto "Un enfoque integral para propiciar cursos abiertos on line desde la UNC"

y participaron en él investigadores de formación interdisciplinaria. Sus resultados fueron publicados. Fig. 4.

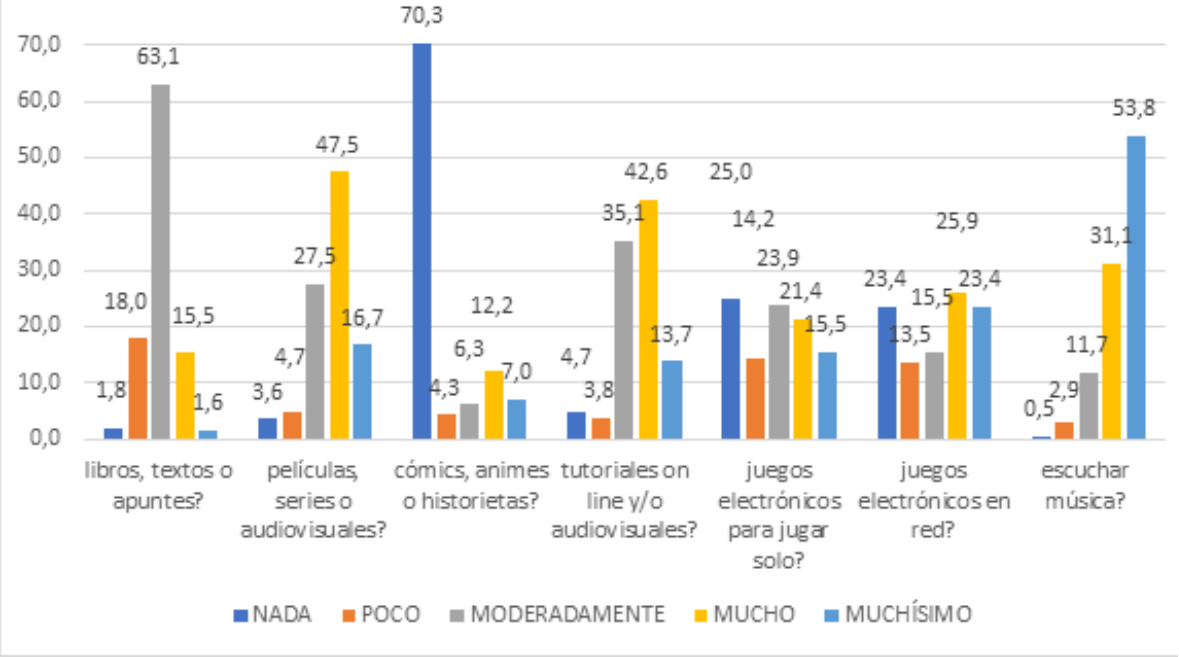


Fig. 4. Gráfica en diagrama de barras con las preferencias de los estudiantes.

La percepción de los estudiantes resultó ser la siguiente: en la composición de audiovisuales educativos, la música parece ser un estímulo altamente valorado por los estudiantes de ingenierías (“mucho” y “muchísimo” suman el 84,9%). Le siguen las películas, series y audiovisuales (64,2%), los tutoriales audiovisuales (56,3%) y los juegos electrónicos en red (49,3%). Los cómics, animés e historietas son el estímulo menos seleccionado (el 70,3 % de los encuestados responde que no le gustan). Por su parte, la valoración de la lectura de textos y libros se concentra en un 63,1 % como un estímulo moderadamente preferido.

5 Conclusiones y trabajos futuros

La aplicación, en su fase beta, constituye una herramienta que nos remite a revisar paradigmas educativos y repensar formas adaptativas que incorporen elementos asociados a las competencias del saber hacer como estrategia para el robustecimiento de las del saber conocer. Este tipo de recursos tecnológicos, orientado a m-learning, a su vez remite al uso de dispositivos móviles de manera parcial o total.

La incorporación de mobile learning está preferentemente orientada a situaciones en las que el estudiante no se encuentra en un lugar fijo o predeterminado, o cuando aprovecha las oportunidades que ofrecen las tecnologías móviles; todo lo cual fundamenta nuestro próximo foco de uso de la aplicación como objetivo inmediato de trabajos a futuro.

Por otra parte, en el contexto de los cambios relativos a educación a través del tiempo, emerge como abanderado este concepto de “aprendizaje activo” al que ya se remitió a lo largo del trabajo, y que es uno de los fundamentos del que derivan las innovaciones metodológicas del proceso de convergencia Europeo. Es así que el enmarque teórico basal de nuestra aplicación tecnológica, el aprendizaje activo, se fundamenta en la creencia acerca de la importancia que los procesos de aprendizaje de los estudiantes estén centrados en: “hacer cosas y pensar sobre las cosas que están haciendo” [22].

Atendiendo a la finalidad última de esta investigación, se puede considerar que los distintos Objetos Virtuales

de Aprendizaje, como material de apoyo, que se han ido desarrollando en la evolución del Proyecto Consolidar, contribuyen fuertemente al desarrollo de MOCC desde la UNC y, éstos a paliar las dificultades de la articulación entre el nivel medio y la universidad en Matemática para Ingeniería.

Sin embargo, es importante resaltar que sólo si se ofrece una mayor y mejor accesibilidad, resulta posible alcanzar el objetivo de favorecer la mejora en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes de nivel medio que quieran ingresar a las universidades en áreas de las disciplinas CTIM, independientemente de su lugar de residencia o de origen y de la disponibilidad de horarios estructurados; manteniendo los estándares de calidad.

Además de los cambios paradigmáticos que emergen en este contexto, no menos importante es resaltar que hoy se concibe a la construcción de MOOC como una gran maquinaria cuyas piezas se imbrican para producir una mejora en la accesibilidad y la calidad del aprendizaje: docentes, expertos en medios audiovisuales, en plataformas educativas, en desarrollo de software, especialistas en educación, psicólogos, psicopedagogos, expertos en inteligencia artificial, en redes y comunicaciones, se aúnan en una inmensa lista que capacita recursos humanos en todas las disímiles disciplinas que abreva este desarrollo.

Resta hacer apreciaciones sobre la problemática en general, inmersa en el contexto actual que a lo largo del trabajo se han puesto en evidencia, la primera está en relación con la incorporación de recursos audiovisuales y nuevas plataformas educativas más acordes a los paradigmas de aprendizaje on line que emergen como insoslayables en el contexto de la pandemia mundial y, que prometen ser las bases de esta "nueva cotidianeidad del día después".

Referencias

1. "Recomendación sobre la ética de la Inteligencia Artificial*". UNESCO. 41ª sesión de la Conferencia General*. (2021).
2. Britos, J.; Díaz L.; Morales, S.; Vargas, L., Vignoli, A.; Hirschfeld, G.; Presman, T.: "Los MOOC como propuesta para la estandarización de la calidad educativa". Actas XI. *Congreso de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación.* (2016).
3. Wietse de Vries; Arenas, P.; Muñoz, J.; Saldaña, I.: ¿Desertores o decepcionados?, distintas causas para abandonar los estudios universitarios. *Revista de la Educación Superior*. (2011).
4. Manso, M.; Pérez, P.; Libedinsky, M.; Light, D. y Garzón, *M.:* Las TIC en las aulas. Experiencias Latinoamericanas. *Paidós*. (2011).
5. C. Bedoya-Dorado, G. Murillo-Vargas, y C. H. González-Campo, «Gestión universitaria en tiempos de pandemia por COVID-19: análisis del sector de la educación superior en Colombia », *estud.gerenc., vol. 37, n.º 159, pp. 251-264*. (2021).
6. Capano, G., y Pritoni, A. Varieties of hybrid systemic governance in European Higher Education. *Higher Education Quarterly, 73(1), 10-28*. (2019).
7. Pardo Kuklinski, H., y Cobo, C. Expandir la universidad más allá de la enseñanza remota de emergencia. Ideas hacia un modelo híbrido post-pandemia. *Barcelona: Outliers School*. (2020).
8. Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A., y Hall, C. NMC Informe Horizon 2016. *Edición Superior de Educación. Austin, Texas: The New Media Consortium.* (2016).
9. Swope, J.: A comparison of five free MOOC platforms for educators. *EdTech Web site.* http://www.edtechmagazine.com/higher/article/2014/02/comparison-five-free-mooc-platformseducators2015. (2015).
10. Murphy's, D.: The open source LMS battle hots up. *EduBlog Web site*. http://opob.edublogs.org/2013/05/02/the-open-source-lms-battle-hots-up/2015. (2015).
11. Britos J.; Arias, S.; Hirschfeld, G.: "Los MOOC un desafío para Latinoamérica". *X Congreso de Tecnología en Educacion & Educacion en Tecnología.* (2015).
12. Galoppo,J.; Zaballo, G.; Arias, S.; Diaz Dávila, L.: "Percepciones de los estudiantes sobre materiales audiovisuales para el aprendizaje de matemática en el ingreso a las carreras de Ingeniería". *EMCI 2021*. (2021).
13. Camós C. M.; Lion C.; G., Guglielmone M.: "La tecnología como mediadora en la educación matemática: una experiencia con ingresantes universitarios". *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 22. (2016).
14. https://www.w3schools.com/html/html5_intro.asp
15. MacDonald, M.: HTML5: The Missing Manual, *WordPress: The Missing Manual: The Book That Should Have Been in the Box*. O'Reilly, 2da edición. (2014).
16. https://www.tutorialspoint.com/html5/index.htm

17. Sawyer McFarland, D.: Javascript. *Javascript: The Missing Manual*. O'Reilly. (2008).
18. https://www.learn-js.org/
19. https://www.w3schools.com/css
20. https://www.canva.com/
21. https://getbootstrap.com/
22. Bonwell, Charles C.; Eison, James A. Active Learning: Creating Excitement in the Classroom. *ASHE-ERIC Higher Education Reports.* (1991).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

El Seminario Universitario como Espacio de Articulación de las Competencias de Egreso del Secundario con las de Acceso a la Universidad

Pintos Edith Susana [1], Navas Laura Evangelina[1]
[1]Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Concepción del Uruguay, UTN
Ingeniero Pereira 676 - C. del Uruguay – Entre Ríos
{pintoss, navasl}@frcu.utn.edu.ar

Resumen. El presente trabajo deriva de la reflexión que en el equipo del Seminario universitario se ha venido realizando en el marco de la articulación del nivel Secundario con el ingreso al ámbito universitario. El Seminario representa una instancia para reconocer los puntos de partida y necesidades de apoyo a los ingresantes, desarrollar situaciones de aprendizaje que fortalezcan aquellos conocimientos y capacidades académicas necesarios para dar los primeros pasos de su formación, con el propósito de avanzar con mayor regularidad en las materias de primer año ofreciendo experiencias que contribuyan a la profundización del aprendizaje de contenidos prioritarios para transitar el proceso de la formación específica. Se ha diseñado la propuesta vinculando competencias ya adquiridas con las nuevas a adquirir, a modo de sostener la continuidad en la educación; entendiendo que, articulando se logrará incrementar los niveles de aprendizaje significativo tanto sobre los contenidos curriculares como en el logro de objetivos transversales.

Palabras Clave: Articulación nivel secundario universidad, Competencias de egreso, Competencias de acceso, Estilos de aprendizaje, Modos de representación.

1 Introducción

La transición secundaria universidad es, para la mayoría de los estudiantes, un camino problemático y dificultoso, deberán pasar por diversas etapas, originándose situaciones conflictivas que condicionarán inevitablemente en su desempeño académico. El Seminario Universitario tiene como objetivo mejorar esta transición para lo cual, se organizó y desarrolló el asesoramiento pedagógico-didáctico de una propuesta orientada a colaborar en una mayor y mejor inserción de estudiantes en la universidad, orientado a trabajar estrategias de aprendizaje, comprensión lectora y trabajo en equipo.

Este proceso pedagógico y de gestión implica realizar acciones que faciliten el tránsito y la movilidad de los estudiantes entre los distintos niveles de la oferta educativa; de modo que los estudiantes puedan conocer y explorar áreas nuevas en torno a carreras del nivel superior. Apunta a disminuir la deserción en los primeros años de la educación superior.

La presunción es que, articulando competencias asociadas a los perfiles de los egresados de la escuela secundaria con las competencias de acceso al nivel universitario y luego con las genéricas de la formación de ingeniería, se logrará incrementar los niveles de aprendizaje significativo en los estudiantes tanto sobre los contenidos curriculares como en el logro de objetivos transversales. También mejorará significativamente la adquisición de competencia y habilidades para aprender a aprender, crear conocimiento colaborativamente en espacios virtuales, articular pensamiento crítico y creativo en forma escrita, habilidades de acceso y uso de información, entre otras.

El Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI) de la República Argentina nace en marzo de 1988 a partir de la inquietud de conformar un ámbito en el cual se debatan y propicien, a partir de expe-

riencias propias, soluciones a las problemáticas universitarias planteadas. Se organiza con el propósito de: coordinar el accionar de las Unidades Académicas de la Ingeniería, propiciando sistemas de interrelación; articulando las normativas correspondientes, coordinando, compatibilizando y fomentando actividades conjuntas de desarrollo, y capacitación de recursos humanos; entre otras. Considerando no sólo la formación profesional (el "saber"), sino también, ordenar las Competencias Requeridas para el Ingreso a las carreras de Ingeniería, orientando a la educación de nivel medio respecto de las competencias que deberían desarrollar en sus estudiantes, previendo su continuidad en los estudios en el ámbito universitario con la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer") [1]. Esto se ve claramente y es asumido así por las universidades a partir de la Declaración de Bolonia de 1999 [2] y la declaración de "la educación como un servicio público" de la Convención de Salamanca de 1994 [3], y la consecución plena de una mayor compatibilidad y comparabilidad que los sistemas de educación superior requieren un impulso continuo.

2 Fundamentación

La transición desde un modelo educativo centrado en la enseñanza hacia un modelo centrado en el aprendizaje, supone un gran "cambio cultural" para la Universidad como institución educativa. Entre los pilares fundamentales de dicho cambio se encuentra la llamada "renovación metodológica". Con esta renovación se pretende evitar el riesgo de realizar un cambio exclusivamente formal, olvidándonos de lo que ocurre en la realidad de las aulas universitarias. (Fernández March, 2006) [4].

Los procesos de enseñanza y de aprendizaje en esta nueva era del conocimiento, requieren necesariamente un cambio de paradigma; el profesor debe dejar de ser el centro del proceso para facilitar que el estudiante sea el dinamizador de su propio proceso de aprendizaje.

Los estudiantes de las nuevas generaciones necesitan múltiples estímulos para realizar procesos, utilizan literatura digital, realizan búsqueda rápida de la información desde cualquier dispositivo, reciben y procesan información de manera rápida, prefieren ejemplos antes que teoría y gráficos en lugar de texto, entre otros. Frente a este contexto el docente requiere además del conocimiento correspondiente a su área, mejorar sus competencias didácticas, mejorar sus habilidades en el uso de herramientas tecnológicas como así también desarrollar competencias investigadoras e innovadoras que requiere un proceso constante de actualización (Pujol, 2020) [5].

A su vez, el estudiante, por su parte requiere (Sancho y Borges, 2011) [6] competencias que se pueden agrupar en cuatro dimensiones: Instrumental, Cognitiva, Relacional y Metacognitiva. En esta última es importante que los estudiantes sean capaces de reflexionar y autoevaluarse para adoptar estrategias que le permitan mejorar sus procesos de estudio y aprendizaje. Se hizo necesario el docente, no como el transmisor de conocimiento, sino un interlocutor entre la información y el conocimiento, un facilitador que logrará que los estudiantes aprendan a ser autogestores de su propio aprendizaje (Ruiz Méndez, 2013) [7]. La tarea de enseñar se ubicó en coordenadas temporo-espaciales diferentes a las habituales e implicó un proceso de rediseño y planificación de la propuesta pedagógica teniendo en cuenta tres dimensiones articuladas: la pedagógica, la tecnológica y la comunicacional a través de un espacio virtual (Pujol, 2020).

La propuesta se centra en los estudiantes de ingeniería, poniendo énfasis en el desarrollo de competencias de acceso al nivel universitario, clasificadas en competencias básicas, transversales, específicas y actitudinales, cuyo objetivo es el logro de la autonomía en el aprendizaje y las destrezas cognitivas generales, articuladas con las competencias genéricas del egresado de ingeniería clasificadas en competencias tecnológicas y competencias sociales, políticas y actitudinales.

De modo tal, que la responsabilidad del aprendizaje dependa directamente de la actividad, implicación y compromiso del estudiante, generando aprendizajes más profundos, significativos y duraderos que faciliten la transferencia a contextos más heterogéneos.

3 Desarrollo y planteo del trabajo

Es en el ingreso principalmente y en los primeros cursos universitarios que los estudiantes adquieren los organizadores previos (lenguaje simbólico y pensamiento lógico), requeridos para lograr un aprendizaje significativo de

los contenidos de las disciplinas básicas. Esta realidad plantea claramente carencias de formación en lo cognitivo, metacognitivo y socio-afectivo de los alumnos ingresantes (Sottil, 2003) [8]. El hecho de que los estudiantes hayan adquirido determinadas competencias durante su formación previa, no necesariamente implica que las tendrán disponibles cuando se las demande. Es necesario actualizarlas, re trabajarlas, y contextualizarlas a través de la aplicación en situaciones nuevas.

Este trabajo es el resultado de la experiencia del dictado del Seminario Universitario previo al comienzo de la facultad brindado a los estudiantes de las diferentes escuelas secundarias. En el mismo, se pretende diagnosticar el nivel operatorio de los alumnos, sus conocimientos previos respecto de la matemática, la física y las capacidades relacionadas con la lectura y comprensión de textos, a la vez de concientizarlos sobre el nivel de base que se les exige, mejorar el rendimiento y promover actitudes de compromiso y responsabilidad. Se describen las estrategias pedagógicas para la transferencia que realizan en el aula los docentes involucrados y la integración vertical - horizontal de cátedras.

El mencionado curso está diseñado según lo establecido en la Resolución N° 1639/2016 C.S. [9] referida al Seminario Universitario que reglamenta las condiciones de ingreso a las carreras de grado en todo el ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional. Ésta, habilita a los Consejos Directivos de cada Facultad Regional a realizar las actividades complementarias que considere necesarias para garantizar la permanencia de los estudiantes de las diferentes carreras. El objetivo general de dicha resolución promueve facilitar la inserción del aspirante a la vida universitaria y nivelar los conocimientos en matemática y física.

Las modalidades que incluye el Seminario Universitario en la Facultad Regional de Concepción del Uruguay son:

- Para ingresar a la Carrera en marzo: anticipado (agosto- noviembre), mientras cursan su último año de Secundaria, con una duración de 16 semanas o Intensivo (enero- febrero) del año de ingreso, con una duración de 7 semanas.
- Para ingresar a la Carrera en agosto: Extensivo (marzo-julio) del año de ingreso, con una duración de 16 semanas, al que acceden todos los aspirantes que aún no han aprobado algunas de las modalidades anteriores.

Durante los años 2020, 2021 y 2022 las modalidades de cursado fueron adaptándose a las circunstancias sociales del ASPO que comenzó en marzo del año 2020; esto permitió que la cursada fuera presencial en las modalidades: Seminario intensivo (enero-febrero) y el inicio del Extensivo (marzo-julio) de 2020, para luego adaptarse a un formato 100% virtual con presentaciones a través de la plataforma zoom, con trabajos y evaluaciones parciales en Moodle. Esta nueva realidad exigió al equipo de docentes y tutores que están a cargo de implementar el seminario diseñar una nueva propuesta educativa que se adaptó al entorno virtual. Con la vuelta a la presencialidad en enero de 2022, quedó de manifiesto que prácticas implementadas durante las modalidades virtuales debían seguir aplicándose en el dictado del Seminario.

3.1 Propuesta metodológica

Se parte de la idea de promover una continuidad en la adquisición de las competencias de acceso para el logro de las competencias de egreso, por considerarlas fundamentales en el desarrollo de la gestión del propio aprendizaje. La reflexión posterior al dictado durante la pandemia permitió realizar un diseño de propuesta metodológica orientadora del curso, que implica trabajar con aula invertida a través de la plataforma Moodle y el planteo de problemáticas disparadoras, buscando el aprendizaje autónomo.

En la tabla 1 se presentan con las competencias seleccionadas para realizar la vinculación propuesta.

Tabla 1. Vinculación de competencias.

Competencias de Nivel Medio	Competencias de Acceso al Nivel Superior	Competencias genéricas de Egreso de Estudiantes de ingeniería
Competencia matemática y competencia básica en ciencias y tecnologías - Identificar la matemática y buscar situaciones en las que se pueden implicar con ejemplos concretos. - Representar un concepto o relación matemática de distintas formas y utilizar el cambio de representación *Comunicación lingüística* - Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los otros compañeros *Aprender a aprender y tecnológica* - Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para construir conocimientos. - Aprendizaje permanente: entornos virtuales de aprendizaje, recursos para el aprendizaje formal y no formal en las redes. *Aprender a aprender* - Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas *Competencia tecnológica* - Seleccionar y utilizar tecnologías distintas para gestionar y mostrar información, visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.	*Competencias básicas:* - Comprensión lectora. - Producción de textos. - Resolución de problemas. *Competencias transversales:* - Autonomía en el aprendizaje. Destrezas cognitivas generales. *Competencias específicas:* - Análisis de una función o un fenómeno físico y/o químico sencillo a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas. - Utilización de la computadora aplicando lógica procedimental en la utilización del Sistema Operativo y diversas aplicaciones como: Procesador de textos, Internet y Correo Electrónico.	*Competencias Tecnológicas* - Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería. - Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería. *Competencias sociales, políticas y actitudinales* - Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo. - Comunicarse con efectividad. - Aprender en forma continua y autónoma

En la búsqueda de dispositivos didácticos que "articulen de manera adecuada el tránsito entre los diferentes momentos del proceso de estudio", se busca "proteger al alumno de todo desconcierto y evitarle el encuentro con los sucesivos obstáculos epistemológicos…" Chevallard, Gascón y Bosch (1997) [10].

3.2 Metodología sugerida para la implementación de la propuesta

El objetivo general que se propone en el trabajo es desarrollar una propuesta de intervención para la enseñanza y el aprendizaje de trigonometría. La bibliografía utilizada para la confección del temario: Álgebra, trigonometría y geometría analítica (Dennis G. Zill-Jacqueline M. Dewar), fue elegida considerando darle continuidad con la utilizada en la cátedra de Análisis Matemático 1.

Para el inicio del año 2022 donde se retomaron las actividades presenciales, se evaluó la necesidad de reflexionar sobre el modo de capitalizar lo aprendido y plantear una metodología mixta donde se incorporen las aulas virtuales como complemento de las clases presenciales.

Los objetivos específicos que guían el trabajo son, no solo valorar la experiencia en los entornos virtuales, sino también darle continuidad a lo conseguido, analizando los significados y sentidos que los docentes le atribuimos a la enseñanza y el aprendizaje en entornos virtuales, para finalmente establecer relaciones significativas. Los

espacios virtuales no reemplazan la carga horaria presencial, sino que se promueven como un complemento para desarrollar allí algunas actividades específicas y compartir recursos.

Para trabajar las competencias básicas y transversales de acceso, se privilegian las prácticas compartidas, se plantea la resolución de actividades en pequeños grupos, se presentan ejercicios a través de la plataforma Moodle y se incorpora el uso de la tecnología con simuladores y creaciones de situaciones a través de la geometría dinámica (Geogebra).

La posibilidad de "ver" o analizar conceptos teóricos mediante una gráfica como así también la posibilidad de modificar las diferentes variables que intervienen en la modelización de los problemas, favorece el aprendizaje de nuestros estudiantes. Se debe tener en cuenta que el simple uso de las tecnologías no exime al docente de trabajar por una adecuada integración curricular, es decir, el docente debe seguir construyendo el entorno educativo para lograr los objetivos que se ha propuesto. Esta construcción consiste en:

- Guiar a los alumnos en el uso de las bases de información y conocimiento, y proporcionarles el acceso a los mismos para usarlos como recursos.
- Motivar a los alumnos para que se vuelvan activos en el proceso de aprendizaje autodirigido en el marco de acciones de aprendizaje abierto, explotando las posibilidades comunicativas de las redes como sistemas de acceso a recursos de aprendizaje.
- Orientar y formalizar el ambiente de aprendizaje en el que los alumnos están utilizando estos recursos.
- Guiar a los alumnos en el desarrollo de experiencias colaborativas y grupales, monitoreando el progreso de los estudiantes.

El uso del software no se limita a la mera representación gráfica, sino también a la geometría dinámica que ayuda a la comprensión de conceptos, que proporciona datos certeros para cada variación y también, verifica soluciones, con el propósito de resolver problemas de diferentes contextos y de otras asignaturas utilizando símbolos y métodos algebraicos, sistemas de ecuaciones y evaluar otros métodos de resolución.

Se propone realizar una interpretación y modelización más compleja de la matemática aplicada, de modo de fomentar la producción de textos que afiancen la comunicación efectiva. Para finalizar con un interrogatorio de retroalimentación.

3.3 Contenido seleccionado

Para esta actividad se ha decidido aborda el contenido de matemática: *Trigonometría. Relaciones trigonométricas. Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos. Resolución de problemas*. Del intercambio de conocimientos y experiencias de docentes de matemática del nivel medio se comparten diferentes posibilidades de innovación y herramientas pedagógicas; considerando las seis capacidades fundamentales a desarrollar por los estudiantes durante su trayecto escolar obligatorio enunciadas en Secundaria Federal 2030 [11] Formación de competencias en escuela media, que son: Resolución de problemas, Pensamiento crítico, Aprender a aprender, Trabajo con otros, Comunicación, y Compromiso y responsabilidad.

Para el planteo de un ejemplo de aplicación se ha considerado darle continuidad a las competencias de egreso del Nivel Secundario, con las competencias requeridas para el acceso a carreras de ingeniería, de modo de vincularlas con las competencias tecnológicas, sociales, políticas y actitudinales que se citan en la Declaración de Valparaíso [12], de ASIBEI, sobre Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano.

Es sabido que los estudiantes poseen diferentes representaciones y estilos de aprendizajes, para lo cual se establecen estrategias que estimulen los distintos canales de percepción. Entre los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, se encuentra el de visualización; para lo cual se enseñan diferentes representaciones variadas con el software utilizado en el curso. Hitt (2003) [13] expresa: La visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Si bien el recorte de contenidos propuesto, es específico del área matemática, las estrategias utilizadas, como la utilización de esquemas, diagramas, videos, procesadores de texto, programas graficadores, wikis entre otras permiten a los estudiantes apropiarse de los contenidos y a los docentes distinguir aprendizajes evaluables asociados a las competencias antes mencionadas. Los contenidos, criterios y aprendizajes evaluables propuestos se presentan en el cuadro a continuación.

Tabla 2. Contenidos, criterios de evaluación y aprendizajes evaluables.

Contenidos relativos a trigonometría	Criterios de evaluación	Aprendizajes evaluables
- Medidas de ángulos en el Sistema sexagesimal y circular. Longitud de arco - Razones trigonométricas. Relaciones entre razones. - Triángulos rectángulos y no-rectángulos - Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utiliza las unidades angulares y las relaciones y razones trigonométricas para resolver problemas en contextos reales. 2. Calcula magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas fórmulas más adecuadas aplicando las unidades de medidas 3. Participa en clase, se interesa y muestra curiosidad. 4. Respeta y tolera a sus pares. 5. Expone con claridad y usa los conceptos de forma adecuada. 6. Profundiza las ideas más relevantes 7 Autoevaluarse.	1.1 Aplicar conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, para realizar cálculos. 2.1 Utilizar las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2 Resolver triángulos utilizando las razones trigonométricas y teoremas del seno y del coseno 2.3 Utilizar las fórmulas para calcular áreas de triángulos, cuadriláteros, círculos, asignando las unidades apropiadas. 3.1 Desarrollar autonomía 4.1 Realizar informes grupales. 5.1 Analizar la pertinencia de los resultados. 5.2 Comunicar los resultados obtenidos. 6.1 Categorizar, integrar y sintetizar contenidos. 7.1 Valorar su propio desempeño.

3.4 Desarrollo de la clase

En una primera instancia se comparten a través del aula virtual bibliografía, videos y se proponen actividades con el tema que se desarrollará en el próximo encuentro, con la intención de propiciar un intercambio de ideas que puedan potenciar el avance en la comprensión, desarrollar la creatividad, el espíritu crítico y la capacidad de adquirir y aplicar nuevos conocimientos en forma autónoma. De manera que asuman la responsabilidad de su propio aprendizaje, utilicen la Matemática para comprender, interpretar, plantear y resolver problemas, afiancen sus conocimientos y habilidades para la mejor recepción y manejo de la información.

Para el trabajo en clase se diseñan presentaciones en power point con contenidos teóricos y animaciones con GeoGebra, como se muestra en la figura 1, que se compartirán en el aula virtual, dando acceso a los contenidos desarrollados.

Se utiliza la plataforma Moodle como plataforma educativa, el zoom (en las modalidades virtuales) para la realización de la clase sincrónica y programas como GeoGebra, YouTube y C-maps para la realización del trabajo práctico. Es necesario aclarar que cuando se desarrolla el contenido seleccionado los estudiantes ya habrán conformado equipos de trabajo para la realización de actividades prácticas y la elaboración de tareas. Todas ellas, condiciones necesarias para la aprobación del Seminario.

Se plantea el desarrollo del tema a través de clase invertida, luego de subir a la plataforma Moodle material relacionado tanto de libros como de videos y se plantean a los estudiantes las siguientes actividades:

1. Participación en una clase sincrónica (presencial /zoom) a cargo de los docentes donde se presentan los lineamientos del trabajo práctico.
2. Habilitación del Foro de consultas, el cual permanecerá activo durante toda la actividad.
3. Resolución de Cuestionario individual de auto-corrección en Moodle. (Incluye preguntas de elección múltiple, verdadero falso, completar las palabras faltantes, unir con flechas).
4. Construcción de un Glosario (con links habilitados) grupal (en Moodle) con los conceptos principales del tema.

5. Elaboración de una Wiki grupal, con referencias al glosario del punto 4 (a través de los links) en la que analizarán un problema real planteado por los docentes.
6. Diseño de una red conceptual con los conceptos claves aplicados en la resolución del problema (usando C-maps). Subirla en una Tarea de Moodle.

La actividad profesional se inicia cuando existe un problema a resolver, una necesidad a satisfacer, un servicio a prestar; es por ésto que el estudiante debe aprehender sus asignaturas de la misma manera que trabajará en su futuro. Una vez que se ha definido el problema a solucionar tendrá que buscar la tecnología adecuada para satisfacer dicha demanda. Dado que el software es una herramienta que facilita el aprendizaje dinámico e interactivo, que permite una visualización más rápida de situaciones problemáticas, se presenta a continuación a modo de ejemplo uno de los recursos utilizados en el desarrollo de la clase.

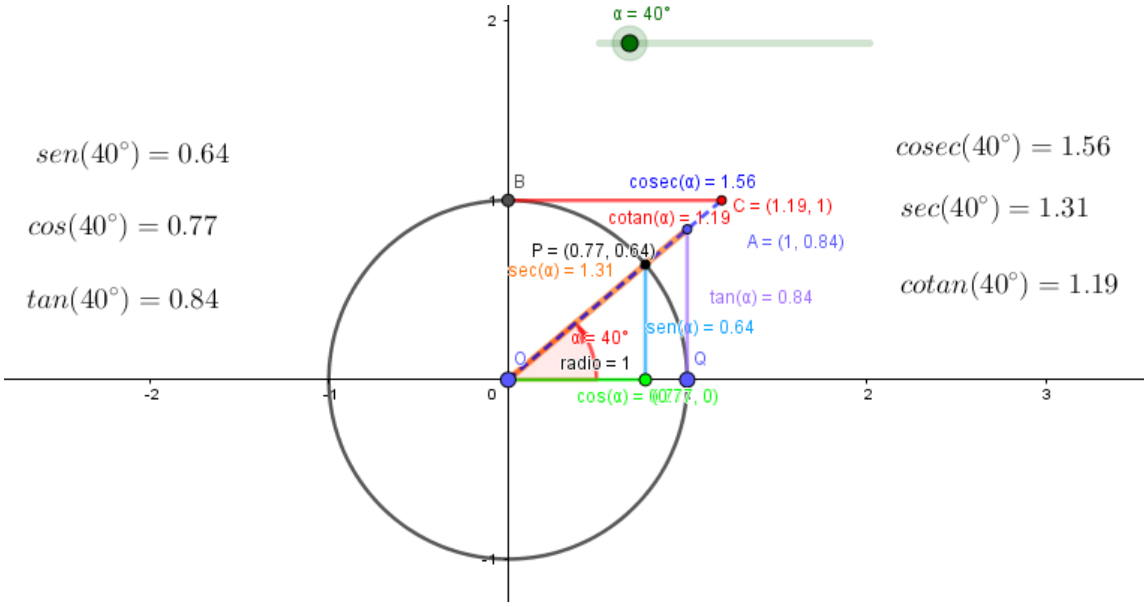


Fig. 1. Gráfica que representa una animación con Geogebra de líneas trigonométricas en ángulos de hasta un giro.

A partir de este planteo, se espera que el estudiante sea capaz de definir y clasificar conceptos y relaciones de la trigonometría, relacionándolos con situaciones de su entorno, que pueda identificar la existencia de un problema y los elementos que lo caracterizan y plantear las preguntas pertinentes. Pueda establecer relaciones entre conceptos y saque conclusiones lógicas a través de las premisas, que utilice las ideas matemáticas en situaciones cotidianas y diferentes contextos y, además que encuentre el uso de la tecnología como herramienta que promueve el aprendizaje. Desarrolle autonomía en el aprendizaje, destrezas cognitivas generales y relaciones interpersonales.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Ante la necesidad de realizar cambios en la práctica docente y principalmente en el trabajo que debe realizarse en el aula, pensando la educación como la posibilidad de brindar a los estudiantes herramientas para que descubran, fortalezcan y usen el pensamiento crítico, más allá del aula, este trabajo comenzó con la idea de articular las competencias que se asume que el ingresante trae con las que necesitará durante toda su trayectoria formativa y posterior actividad profesional.

Esta experiencia ha permitido que los estudiantes en el ingreso a la universidad puedan comprender conceptos abstractos y complejos que no son observables a simple vista, ya que realizaron conversiones entre los registros para representar y resolver un mismo problema y esto permitió obtener un conocimiento más acabado de los conceptos trabajados.

Es importante a la hora de enseñar disciplinas provenientes de las ciencias exactas explicitar con qué finalidad, cómo y para qué queremos que los estudiantes aprendan dichos conceptos, para eso se implementó la metodología propuesta.

Las acciones implementadas muestran que los estudiantes logran apropiarse mejor de los contenidos.

Se continuarán implementando modificaciones integradas, trabajando de manera conjunta otros espacios que fomenten el trabajo colaborativo, más atentos al estudiante, de modo de facilitar lo que vendrá, otra forma de manejarse, otros ritmos, que eviten el corte en la continuidad en el tránsito del nivel educativo.

Para lograr una integración vertical entre el Seminario Universitario con las asignaturas de primer año, se espera continuar con esta metodología y luego transferirla al resto de la Institución.

Referencias

1. Documentos del CONFEDI. Competencias en Ingeniería.
2. Declaración de Bolonia. http://eees.umh.es/contenidos/Documentos/DeclaracionBolonia.pdf (1999). Accedido el 13 de abril de 2022.
3. Declaración de Salamanca. UNESCO, (1994). https://www.unioviedo.es/ONEO/wp-content/uploads/2017/09/Declaraci%C3%B3n-Salamanca.pdf Accedido el 13 de abril de 2022.
4. Fernández March, A: *Metodologías activas para la formación de competencias.*https://www.researchgate.net/publication/39381422_Metodologias_activas_para_la_formacion_de_competencias/link/0e607b70f0c46d4f0ac8b2c9/download- , (2006). Accedido el 14 de abril de 2022.
5. Pujol, M.A, et. all. *Desafíos del proceso de enseñanza - aprendizaje virtual en las prácticas supervisadas*, ISSN 1853-0354 www.revistas.unc.edu.ar/index.php/aifp (2020). Accedido el 2 de mayo de 2022.
6. Sancho, T., Borges, F. y Gros, B.: *Evolución y retos de la Educación virtual, Construyendo el E-learnig del siglo XXI*, Editorial UOC, Barcelona (2011).
7. Ruiz Méndez, M., Aguirre Aguilar, G.: *Quehacer docente, TIC y educación virtual o a distancia*, Apertura, vol. 5, núm. 2, octubre, Universidad de Guadalajara; Guadalajara, México (2013).
8. Sottil A. J.: *Estrategias metodológicas para el mejoramiento de rendimientos académicos de los alumnos ingresantes en Agronomía de la UNCPBA*, Libro de resúmenes de la VI Jornadas Nacionales y III Internacionales de enseñanza universitaria de la química, UNLP (2003).
9. Resolución N°1639/2016 C.S. de Universidad Tecnológica Nacional.
10. Chevallard, Gascón y Bosch: *Estudiar Matemáticas - El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. https://pdfcoffee.com/chevallard-y-bosch-m-gascon-j1997-yy-estudiar-matematicas-el-eslabon-perdido- entre-la-enseanza-y-el-aprendizajepdf-4-pdf-free.html (1997). Accedido el 15 de abril de 2022.
11. Secundaria Federal 2030 - *Formación de competencias en escuela media (aprender a aprender)*. https://www.argentina.gob.ar/educacion/secundaria-federal-2030/acerca-de Accedido el 14 de abril de 2022.
12. Declaración de Valparaíso, (2013). https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/Declaracion-de-Valparaiso-Nov2013VF.pdf Accedido el 12 de abril de 2022.
13. Hitt, F.: *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología;* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
Facultad de Ingeniería UNER
UTN PARANÁ

Experiencia de aprendizaje adaptativo en el ciclo inicial de Ingeniería en Energías Renovables

Alejandro Duarte Furiati, Matías Salomone Cayaffa, Elisa Rodríguez Infanzón, Pierina Costa
Carrera de Ingeniería en Energías Renovables, Universidad Tecnológica de Uruguay
Francisco Antonio Maciel s/n esq. Luis Morquio, Durazno, Uruguay. Dirección postal 97000.
{alejandro.duarte, matias.salomone, maria.rodriguez.i, pierina.costa}@utec.edu.uy

Resumen. Durante los últimos cuatros años, en la carrera Ingeniería en Energías Renovables (IER) de la Universidad Tecnológica del Uruguay (UTEC), se ha venido trabajando con los estudiantes ingresantes de las distintas cohortes sobre la articulación entre Educación Media y Universidad haciendo énfasis en los contenidos y competencias, tanto matemáticas como digitales, necesarias para que los estudiantes transiten exitosamente la Universidad. Para ello se implementó el Programa de "Mejoramiento del Aprendizaje de Matemática en los estudiantes del ciclo inicial de Ingeniería en Energía Renovables" (Programa de Matemática IER). Este trabajo describe la experiencia de "Aprendizaje adaptativo" y detalla los resultados obtenidos en las diferentes cohortes.

Palabras Clave: Articulación, Matemática, Aprendizaje adaptativo, Espacios de acompañamiento, Ingeniería en energías renovables.

1 Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo compartir la experiencia y resultados de la ejecución del programa "Mejoramiento del Aprendizaje de Matemática en los estudiantes del ciclo inicial de Ingeniería en Energías Renovables". Constituye una breve síntesis de lo realizado hasta el momento en la implementación del programa, presentando sus principales características, los antecedentes y el contexto que le dan sentido a su desarrollo, y las líneas de acción que ejecuta, centrando la atención en los espacios de acompañamiento y seguimiento de los estudiantes, que surgen como estrategia para ayudarlos a superar las diferencias entre el perfil de ingreso (de una parte de los estudiantes) y el perfil esperado, tratando además de aportar en mitigar la deserción universitaria durante el primer año de la carrera. Por último, se comparten los resultados obtenidos hasta el momento.

2 Antecedentes

La carrera Ingeniería en Energías Renovables se dicta desde el año 2016 en Instituto Tecnológico Regional Centro Sur (ITRCS) de UTEC. Dentro de las unidades curriculares (también llamados como cursos o materias) que conforman los primeros dos semestres de la carrera, se encuentran Álgebra, Matemática I y Matemática II.

Cada una de las unidades curriculares tienen asignadas 10 créditos académicos que conforman el 30% de los créditos totales del primer año de la carrera.

La escala de calificaciones utilizada por la universidad es de 1 a 5, donde se debe alcanzar calificación entre

3 y 3,99 para lograr derecho a examen y entre 4 y 5 para exonerar la unidad curricular. A fines de este artículo se considera suficiente una nota mayor o igual a 3.

Analizando los resultados de las primeras dos cohortes (previo al comienzo del programa) se observa que en promedio, el 90% de los estudiantes que no logran nota suficiente en el primer parcial (que corresponden al 50% del total de los estudiantes que se presentan al primer parcial), tampoco alcanzan la calificación mínima para poder rendir el examen o exonerar al finalizar el curso.

El seguimiento de la trayectoria académica de los estudiantes de la cohorte 2018 evidencia que el 42% de los estudiantes obtuvo calificación menor de 2 en el primer parcial. De estos, el 71 % abandona el curso luego de esas primeras seis semanas en la educación universitaria, la cual puede considerarse como rápida deserción.

Considerando el rol protagónico que tiene la matemática para la carrera, en especial en el comienzo de la misma, y los resultados obtenidos de un porcentaje significativo de estudiantes en los cursos de Álgebra y Matemática I, es evidente que es necesario implementar cambios que impacten positivamente en los estudiantes para que puedan continuar y avanzar en la carrera. Motivados por el objetivo mencionado anteriormente surgió el Programa de Matemática IER, que es el marco de la experiencia que se presenta en este artículo.

3 Fundamentación

Si bien la carrera Ingeniería en Energía Renovables de UTEC tiene pocos años de existencia, en los antecedentes se puede ver que no es ajena a la realidad de otras carreras similares en cuanto a las características de los estudiantes que ingresan y su desempeño en los primeros semestres de cursada.

Específicamente, lo que ocurre en los cursos de matemática en el comienzo de la IER no es exclusivo, es una situación frecuente en otras universidades e instituciones con carreras de grado y terciarias, de Uruguay y otros países. Por lo tanto, previamente a diseñar y planificar acciones enfocadas en la atención de los estudiantes durante los primeros semestres se decidió acudir a investigaciones relacionadas con el tema.

Se indagó en investigaciones que aporten elementos teóricos y herramientas que permitan reducir el riesgo de deserción. Algunas líneas de investigación centran la atención en el contexto social e institucional en donde se desenvuelven los estudiantes. Resulta fundamental para lograr e interpretar la retención, comprender dicho fenómeno como el resultado de la interacción entre un estudiante y el medio en el cual se desenvuelve [1]. Por lo tanto, la continuidad del estudiante no es explicada a partir de la capacidad individual del mismo, sino como el resultado del relacionamiento entre este y su contexto.

Dentro de los autores reconocidos en el estudio de aspectos organizacionales que impactan en la retención estudiantil en la educación superior, destacamos al Doctor en Sociología Tinto, V., el cual plantea en [2], que mientras mayor interacción entre alumnos y profesores exista, mayor es la probabilidad de que los alumnos persistan y finalicen sus estudios.

Según se expresa en [3] “La permanencia de estudiantes vulnerables no puede ser entendida únicamente como un fenómeno asociado a capacidades o atributos individuales, sino también como un proceso influenciado por el contexto social en el que estos estudiantes se desenvuelven. Familia, pares e instituciones educativas juegan un papel central en la progresión educativa de los alumnos vulnerables y por ello, es necesario incorporarlos al momento de diseñar iniciativas orientadas a mejorar las condiciones para la progresión exitosa de los mismos”.

De lo anterior se puede entender que la deserción en educación superior se relaciona con varios factores, es multicausal, por lo cual las instituciones educativas tienen que reflexionar y definir sobre cuáles factores pueden intervenir para mitigar la deserción estudiantil.

Por último, volver a mencionar que la carrera tiene varios cursos de matemática en el ciclo inicial, lo que pone de relieve la importancia y el rol de esta disciplina para la IER. Según lo expresa en [4], “¿qué estudia la ingeniería? estudia a la física, orientándola al beneficio del hombre, sin embargo, el objeto de nuestro interés no está aquí, sino en el cómo la estudiamos. La respuesta está en las matemáticas…”

Todo lo mencionado hasta el momento pone de manifiesto la necesidad de que los estudiantes adquieran los conocimientos matemáticos para afrontar el resto de las unidades curriculares de la carrera, que se nutren directa e indirectamente de estos, y que se requiere del uso de estrategias complementarias para mejorar la permanencia de estudiantes en educación superior, principalmente al comienzo de la carrera. De la conjunción de estas dos ideas surge el programa “Mejoramiento del aprendizaje de Matemática en los estudiantes del ciclo inicial de Ingeniería en Energías Renovables”, que se adapta a la realidad de la Utec y en particular a la IER.

4 Descripción del Programa

La propuesta para mejorar los aprendizajes de matemática y la retención de los estudiantes de IER en el ciclo inicial tiene dos "grandes" objetivos:

A Brindar acompañamiento y apoyo a los estudiantes de IER durante el ciclo inicial de la carrera para que adquieran las competencias matemáticas necesarias y puedan transitar de forma exitosa en la misma.

B Lograr el objetivo anterior sin que los estudiantes extiendan el tiempo de cursada de la carrera (en años).

Por las características del programa al momento de su implementación y su desarrollo, se definen los siguientes objetivos complementarios:

- Acompañar al estudiante para que logre la autorregulación de sus aprendizajes.
- Favorecer el desarrollo de destrezas digitales.
- Fortalecer la integración de conocimientos y competencias lógico- matemáticas abordadas con las distintas UC de la carrera, tomando como referencia la teoría de Matemática en el Contexto de las Ciencias.
- Recolectar información para realizar la evaluación de impacto de las acciones tomadas.

5 Estrategia Específica del Programa

El programa se les presenta a los estudiantes durante la semana de inducción, que es una semana previa al comienzo del primer semestre y la primera semana curso (se desarrollan a fines de febrero y comienzo de marzo). Durante ese período, además de compartir información sobre el programa, se llevan adelante diferentes actividades y acciones que permitan tener mayor información de cada estudiante y su contexto. A continuación se detallan algunas acciones llevadas adelante:

- Realización y análisis de resultados de evaluación diagnóstica, basada en los contenidos que figuran en el perfil ingreso.
- Entrevista personal a los estudiantes con los docentes.
- Estudio del recorrido académico previo del estudiante (último año de estudio, orientación que cursó en el preuniversitario de educación media, etc.).
- Análisis de las características de cada estudiante (trabajo, traslado a la universidad, situación familiar, etc.).
- Evaluación del desempeño de los estudiantes en las jornadas de inducción y primera semana del semestre (actividades grupales, presentaciones orales, intervenciones y tareas entregadas).

Por otro lado, se introducen los Espacios de Acompañamientos personalizados en modalidad presencial y/o virtual (EA), que están destinados a estudiantes que no alcanzan un manejo inicial adecuado u óptimo en el abordaje de todos o algunos de los contenidos de la Unidades Curriculares centrales del Programa (Matemática I y Algebra), debido a que probablemente tengan un menor grado de adquisición en las competencias lógico matemáticas requeridas para transitar las unidades curriculares. La decisión de participar de los Espacios de Acompañamiento es de los estudiantes, donde los docentes pueden sugerirla, a partir de los insumos recogidos en las primeras semanas.

Por último, se trata el cronograma de evaluaciones formativas, donde los estudiantes cuentan con instancias regulares a desarrollarse a lo largo del semestre y otras oportunidades complementarias (a corto plazo) de rendir estas evaluaciones, en los casos en los que no logren el mínimo requerido. Las evaluaciones de segunda instancias cumplen con dos objetivos, nutrir los espacios de acompañamiento personalizados y los procesos de enseñanza aprendizaje de cada estudiante, estimulando al mismo para continuar con los cursos y aportando en cierta medida a evitar la deserción temprana en el primer año de la carrera.

6 Estrategia metodológica

Se realiza un análisis pre y pos programa en dimensiones claves a modo referencial y sin la pretensión de establecer relaciones causales determinantes entre la evolución de los resultados con respecto a las acciones realizadas por el programa. En ese sentido, la estrategia cuantitativa permitirá incorporar la evolución de los principales indicadores educativos para las tres cohortes de estudiantes que participaron de la experiencia.

Tabla 1. Estrategia utilizada: aspectos principales.

Cohortes consideradas		Aspectos incorporados	
Año	Participa en Programa	Resultados Educativos	Percepciones de los Estudiantes
2017	No (pre programa) Participaron 47 estudiantes	Resultados finales de las Unidades Curriculares. Tasa de retención 1 (TR1)[1] y Tasa de retención 2 (TR2)[2].	-
2018	No (pre programa) Participaron 36 estudiantes	Resultados finales de las Unidades Curriculares. Tasa de retención 1 (TR1) y Tasa de retención 2 (TR2).	-
2019	Si (1era cohorte) Participaron 36 estudiantes	Resultados finales de las Unidades Curriculares. Tasa de retención 1 (TR1) y Tasa de retención 2 (TR2).	-
2020	Si (2da cohorte) Participaron 42 estudiantes	Resultados finales de las Unidades Curriculares. Tasa de retención 1 (TR1) y Tasa de retención 2 (TR2).	Encuesta Estudiantil Entrevistas
2021	Si (3era cohorte) Participaron 56 estudiantes	Resultados finales de las Unidades Curriculares. Tasa de retención 1 (TR1) y Tasa de retención 2 (TR2).	Encuesta Estudiantil Entrevistas

Por tanto, en el análisis cuantitativo se tomaron dos indicadores, los resultados obtenidos por los estudiantes de las cohortes 2017, 2018, 2019, 2020 y 2021 y la tasa de retención en las unidades curras tasas de retención es importante aclarar que se definen dos maneras:

- Tasa de retención 1 (TR1): cociente entre la cantidad estudiantes que finalizaron[3] la Unidad Curricular (NF) y la cantidad de estudiantes con actuación (NEA) en alguna actividad en las primeras tres semanas por 100.

$$TR1 = \frac{NF}{NEA} . 100 \quad \textbf{(1)}$$

- Tasa de retención 2 (TR2): cociente entre la cantidad estudiantes que finalizaron la Unidad Curricular (NF) y la cantidad de estudiantes que realiza el primer parcial (NPP) por 100.

$$TR2 = \frac{NF}{NPP} . 100 \quad \textbf{(2)}$$

1 Se considera como total a la cantidad de estudiantes que participaron de alguna actividad en las primeras semanas (“N1”).

2 Se considera como total a la cantidad de estudiantes que realizaron el primer parcial. (“N2”).

3 Cantidad de estudiantes que finalizan las Unidad Curricular independiente del fallo que obtienen.

7 Análisis de los resultados y conclusiones

7.1 Tasas de retención

Un elemento importante a considerar es la permanencia de los estudiantes al finalizar cada uno de los semestres, un resultado esperado es que los niveles de retención se mantengan constante o mejoren con respecto a los años anteriores al Programa.

Para este estudio se consideraron las dos tasas de retención definidas en (1) y (2). Contemplan tres momentos durante el transcurso del primer semestre. Las intervenciones en las actividades desarrolladas durante las primeras semanas del semestre, que se cierran con la primera evaluación del curso, el primer parcial y por último el segundo parcial y así poder definir (NEA), (NPP) y (NF) respectivamente.

Las evidencias permiten sostener que los niveles de retención se han mantenido relativamente constantes a lo largo del tiempo con una mejoría durante el primer y tercer año del programa. A nivel global, para el período de referencia los niveles de retención al finalizar el primer semestre se han mantenido cercanos al 90%. Se aprecia que en los 5 años las tasas de retención se mantienen estable.

Tabla 2: La siguiente tabla muestra la tendencia durante los años 2017 a 2021 de la Tasa de Retención 1.

Tasa	Año 2017	Año 2018	Año 2019	Año 2020	Año 2021
TR1	88,10 %	91,67 %	88,89%	87,23 %	90,00%
TR2	94,87 %	91,67 %	88,89%	95,35 %	95,34 %

7.2 Resultados finales de la Unidad Curricular

Uno de los resultados más significativos a tener en cuenta, es conocer los niveles de logro en cada unidad curricular. En ese sentido, a nivel de hipótesis, se espera encontrar una evolución positiva de los logros en los años correspondientes a la implementación del Programa.

A continuación, se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes de las cohortes 2017, 2018, 2019, 2020 y 2021 en los cursos de matemática. Por tanto, se aprecian los 3 años donde se ejecuta el programa (del 2019 al 2021) en comparación con los años previos (2017 y 2018).

A efectos de operacionalizar los logros educativos se toman como medida los cuatro tipos de fallos posibles al finalizar las Unidad Curriculares que cuenta UTEC. Como se muestra en la siguiente tabla estos fallos se relacionan con la calificación que obtiene el estudiante y son considerados para denominar las diferentes categorías en que fueron agrupadas las calificaciones finales.

Tabla 3: Escala de calificaciones y fallo en UTEC.

Calificación	Fallo
1 - 1,99	Recursa
2 - 2,99	Tutoría
3 - 3,99	Derecho a examen
4 – 5	Exonera

En primer lugar, se aprecia una disminución muy positiva en el grado de estudiantes que no alcanzan el dominio mínimo de las habilidades requeridas en la Unidad Curricular (estudiantes que recursan). En este caso, la cohorte 2018 presentaba un 30% de estudiantes que debían recursar la unidad curricular y ese comportamiento desaparece (0%) en las siguientes cohortes que participan del Programa. Este comportamiento se mantiene en niveles muy bajos, incluso, durante los tiempos de COVID-19 (año 2020 y 2021).

En segundo lugar, de forma consistente con la disminución de los estudiantes que recursan se aprecia el crecimiento constante de los estudiantes que logran el derecho a examen. En ese sentido, la magnitud de los estudiantes que obtienen el derecho a examen pasa del 15% para la cohorte 2017 al 38% en la cohorte 2021. Este comportamiento inverso con relación a los estudiantes que recursan es uno de los principales hallazgos de este trabajo de investigación y sugiere la incidencia positiva del acompañamiento diferencial como herramienta para potenciar los logros educativos. El comportamiento creciente de los estudiantes en Tutoría también es consistente con la disminución de los estudiantes que debían recursar.

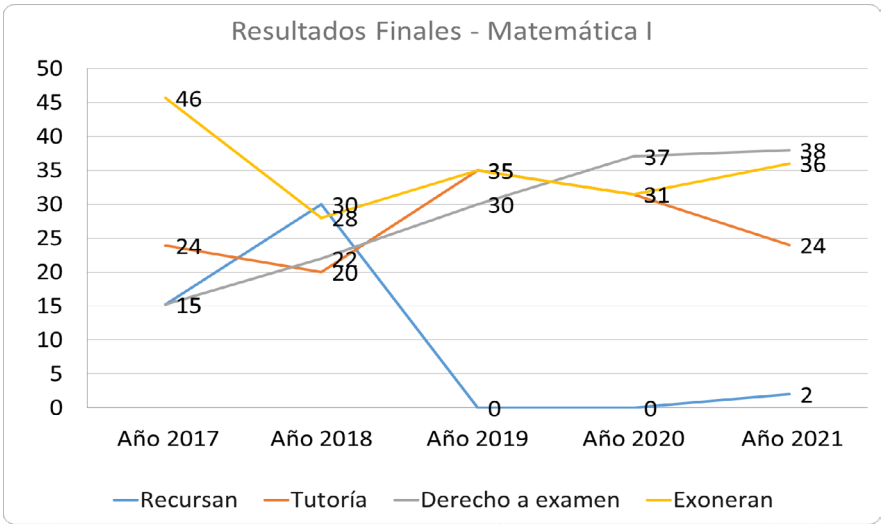


Fig 1: En el gráfico se representa los resultados finales en Matemática desde el año 2017 al 2021 distinguiendo la Categorías de UTEC (en %).

Finalmente, en lo que respecta a los estudiantes que alcanzan nota de exoneración, se aprecia el desempeño altamente satisfactorio de la primera cohorte de estudiantes de la carrera (cohorte 2017) asociado a un perfil particular de esta generación[4]. De todos modos, se constata una mejora en los resultados de exoneración al comparar la cohorte 2018 (pre-programa) y la cohorte 2019 (primera con programa). En este caso, se pasa de un 28% de exoneración en 2018 a un 35% en 2019. Durante los últimos dos años, asociados con el COVID-19, se dio una leve disminución de los niveles de exoneración (31%) en 2020, volviendo el año pasado al nivel del primer año de aplicación del programa.

A modo de cierre, se puede decir que el Programa evidencia resultados en general positivos que son acordes a los esperados. Esto se puede apreciar en la evolución favorable de los logros educativos vinculados a los resultados de las Unidades Curriculares participantes del programa. En la Unidad Curricular que se reporta, Matemática I, los niveles de estudiantes que no alcanzan el dominio mínimo de las habilidades requeridas disminuyen de forma altamente significativa (no se registran estudiantes que deban recursar la UC en las cohortes 2019, 2020 y 2021).

Finalmente, las señales que arroja el análisis de datos son positivas en términos de impulsar el desempeño de los estudiantes en la carrera, particularmente, en Matemática. De todas formas se requiere continuar profundizando el análisis incorporando otras dimensiones vinculadas a los grupos, los propios estudiantes participantes de la experiencia y los acontecimientos recientes vinculados a educar en tiempos de COVID-19.

4 Este grupo contó con un perfil diferencial en términos de su formación y acumulación social previa al ingreso a UTEC (por ejemplo, docentes de física, matemática, ingenieros, estudiantes con experiencias anteriores de formación universitaria, etc.).

Referencias

1. West, T. y Montes, M. (2011). “Notas de trabajo del seminario Acceso y primer año universitario: desigualdad, inequidad y exclusión y propuesta del simposio para el Comie 2011”. uacm, uam, uia, unam y upn. Sesiones del 27 de enero y 28 de febrero de 2011.
2. Tinto, Vincent (1987), El abandono de los estudios superiores: una nueva perspectiva de las causas del abandono y su tratamiento, México, UNAM.
3. Canales, A., & De los Ríos, C. (2009). Entendiendo la permanencia de estudiantes vulnerables en el sistema universitario.
4. Camarena, P. (2010). Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería. México.
5. “Procedimiento General de la Tutoría”, portal de la Universidad Pedagógica Nacional, (en línea) <http://www.upn.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Item id=163> [Consulta:08/ 2011].

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Enseñanza de polinomio y función polinómica en la escuela secundaria y su implicancia en la utilización de estos temas en una facultad de ingeniería

Agustina Bayés[1], Viviana Costa[1]
[1] IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47, La Plata, Argentina
agustina.bayes@ing.unlp.edu.ar; vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de un cuestionario que pretende conocer la organización didáctica que desarrolla un grupo de docentes, en distintos niveles educativos, en relación a las praxeologías de polinomio y función polinómica. La investigación se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y parte de la problemática detectada en relación al escaso equipamiento praxeológico de esos temas que poseen estudiantes de una facultad de ingeniería, que les lleva a obstaculizar el aprendizaje de serie y polinomio de Taylor. El análisis de los resultados encontrados, servirán de insumo para generar estrategias didácticas que posibiliten revertir la problemática mencionada.

Palabras Clave: Teoría Antropología de lo Didáctico, Enseñanza de polinomios y funciones polinómicas, Organización didáctica, Equipamiento praxeológico.

1 Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia, acerca de la enseñanza y aprendizaje de Polinomio y Serie de Taylor en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI - UNLP). Estos saberes requieren de la *praxeología* (conjunto de *saberes* y *saber-hacer)* relativa a polinomio y función polinómica que se comienzan a estudiar en el cuarto año de la escuela secundaria argentina.

Las funciones polinómicas son de gran importancia en la matemática, otras ciencias e ingeniería, ya que son una familia de funciones definidas para todo número real, continuas, derivables e integrables en todo su dominio. Constituyen una buena herramienta de modelización de diversos fenómenos físicos (movimiento rectilíneo uniforme, tiro oblicuo), económicos y químicos, entre otros, donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otra.

Además, las funciones polinómicas y el polinomio de Taylor son útiles para interpolar o ajustar (polinomio de Newton, de Lagrange y de Hermite, entre otros) un conjunto de datos obtenidos, en general, experimentalmente [1].

En esta línea de ideas, y ante las múltiples dificultades observadas que tienen los estudiantes en cursos de matemática en la FI-UNLP, en las resoluciones de evaluaciones parciales en relación a la *praxeología* polinomio y serie de Taylor, se realizó una revisión mediante cuestionarios, con el objetivo de detectar las posibles causas de ello. En acerca Costa y Bayés [2] se detalla tal análisis, concluyendo que tales dificultades podrían deberse a un escaso *equipamiento praxeológico* que poseen los estudiantes al momento de aprender tal praxeología.

Para dar continuidad a la investigación y considerando que tal *equipamiento praxeológico* los estudiantes lo adquieren en la escuela secundaria, y que ello depende de la *organización didáctica* que hayan desarrollado los docentes para enseñarlo, es que se decidió implementar un cuestionario a dichos actores acerca de: ¿cómo, para qué y porqué? enseñan los temas de polinomios y funciones polinómicas.

El objetivo, a futuro será, según los resultados obtenidos de tales cuestionarios, generar estrategias didácticas que sean útiles a los docentes que enseñan la *praxeología* polinomio y funciones polinómicas, de modo que les colabore con el diseño de su *organización didáctica* para enseñar tales temas.

En este trabajo se presenta a continuación el referencial teórico que sustenta el trabajo, la metodología implementada, el cuestionario a docentes, los resultados obtenidos y un primer análisis. Finalmente, se presentan reflexiones y trabajos a futuro.

2 Marco teórico

La investigación se sustenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard y propone enfrentar la pedagogía monumentalista, en pos de adoptar la denominada *Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo*. La TAD concibe a la matemática como una práctica humana antropológica [3]. Uno de los constructos centrales de esta teoría es la noción de *praxeología* que aporta un modelo para describir cualquier actividad humana regularmente realizada [4], distinguiendo dos niveles:

- Praxis (*saber-hacer*): nivel que engloba un cierto tipo de tareas y preguntas que se estudian, así como las técnicas para resolverlas, lo que hay que hacer y cómo hay que hacerlo.
- Logos (*saber*): nivel en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los cuales reciben el nombre de tecnología. Dentro del saber se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación que se denomina teoría.

Por lo tanto, estudiar matemática consiste, en el marco de la TAD, en construir o reconstruir determinados elementos de una *praxeología* matemática para dar respuesta a un determinado tipo de tarea problemática. Además en el marco de la TAD al término estudio o proceso de estudio se lo considera, en un sentido amplio que comprende las nociones de enseñanza y de aprendizaje utilizadas en la cultura pedagógica, y que se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a los problemas que se plantean [5].

Esos niveles de organización de la *praxis* se utilizan también para describir la *organización didáctica* del profesor en relación a cómo planifica la enseñanza de un tema en una institución concreta, qué teoría, tecnología que explique la teoría y qué técnicas y tareas utiliza en sus clases [5]. Para describir tales organizaciones, es posible contar con ciertas situaciones, llamadas *momentos de estudio* o *momentos didácticos*, que representan las fases que pueden tener los procesos de aprendizaje. Estos momentos, realidad funcional del estudio, antes de ser una realidad cronológica, son los siguientes: primer encuentro con la organización matemática, exploración de un tipo de tareas, constitución del entorno tecnológico teórico relativo a una técnica, trabajo de la técnica, institucionalización y evaluación.

Otra de las nociones de la TAD que utilizaremos en este trabajo es el *equipamiento praxeológico*, entendido como el conjunto de conocimientos, las capacidades o competencias que posee una persona. En otras palabras, "la amalgama de praxeologías y de elementos praxeológicos que la persona tiene a su disposición, es decir que puede activar en un momento dado y bajo ciertas condiciones y restricciones dadas" [6].

3 Contexto educativo

3.1 Educación secundaria

La *praxeología* matemática relativa a polinomio y funciones polinómicas se comienza a estudiar en la escuela secundaria en Argentina en cursos con jóvenes de entre 15-16 años de edad [7]. En los diseños curriculares se encuentra dentro del *saber*: Álgebra y estudio de funciones, Teorema de Ruffini, Teorema del Resto y Teorema de Gauss. Los *saberes-hacer*, se vinculan con calcular el valor numérico de un polinomio en un valor determinado, hallar las raíces de un polinomio, calcular las raíces mediante la Regla de Ruffini, descomposición de un polinomio en factores, operar con polinomios (suma, resta, cociente y producto), graficar aproximadamente una función polinómica, resolver ecuaciones e inecuaciones de segundo grado e identificar distintas expresiones polinómicas. Además se promueve el uso de software para el estudio de las funciones polinómicas.

Este *equipamiento praxeológico* se utiliza luego para el estudio, en el año siguiente, de expresiones fracciona-

rias polinómicas y ecuaciones, donde es necesario conocer la factorización de polinomios para reducir su expresión y poder hallar el conjunto solución.

En relación a la *organización didáctica* de dicha praxeología, no es explícita en el Diseño Curricular, sólo se detallan cuales son los temas que debe abordar el docente.

3.2 Facultad de Ingeniería

En la universidad, en general los conceptos relativos a polinomio y función polinómica son utilizados en diversas disciplinas. En particular, en la FI - UNLP, los estudiantes retoman en Matemática para Ingeniería[1] (primera asignatura para todas las carreras), los saberes relativos a polinomio en una variable, estudiados en la escuela secundaria.

A continuación, en la asignatura correlativa Matemática A[2], se estudia derivación de funciones reales en una y varias variables, y utilizando el *equipamiento praxeológico* de los estudiantes, se avanza con el estudio de funciones polinomiales, se realizan gráficas y se calcula su dominio e imagen. Luego, se estudia derivada de una función y reglas de derivación, y los casos especiales de derivadas de funciones lineales y cuadráticas, y su aplicación en temas de física (por ejemplo variación). Además, se encuentra la definición de límite y de continuidad, en el que para resolver se debe operar con funciones polinómicas.

En la siguiente asignatura, Matemática B[3], se estudian las *praxeologías* relativas a la integración de funciones y en particular de funciones polinómicas, sus propiedades, integral definida y métodos de integración. En este último caso, muchas de las técnicas de búsqueda de primitivas, requieren de los *saberes-hacer* correspondientes a factorizar, buscar raíces y operar con polinomios. Además, el cálculo de áreas y de volúmenes, donde se requiere el *saber-hacer* gráficas de funciones y cálculo de intersecciones para describir los dominios de integración de las variables. También se estudian las *praxeologías* relativas a Series Numéricas. Los *saberes* son los de convergencia de una serie, sumas parciales, series alternadas, series de términos positivos, serie geométrica, p-serie y telescópica. Las tareas y técnicas son las de: analizar convergencia, hallar su suma si converge y aplicar métodos o criterios de convergencia. Para validar algunas de las técnicas, requieren del *saber* de integrales impropias que también se estudia en esta asignatura.

En la asignatura Matemática C[4], del tercer semestre, se estudia la *organización matemática* Polinomio y Serie de Taylor. Este tema se estudia dentro de otro que es la *organización matemática* Series de Potencias, la cual se utiliza para la construcción de los *saberes* y *saber-hacer* y se utiliza el *equipamiento praxeológico* de las *organizaciones matemáticas* que se estudian en Matemática B. En el bloque del *saber* se ubica: la noción de polinomio, función polinómica, polinomio de Taylor como suma parcial de una serie de Taylor, convergencia de una serie de potencias. En el bloque del *saber-hacer*, se ubica: identificar un polinomio, operar con polinomios, construir polinomios, graficar polinomios, hallar el polinomio de Taylor que aproxima a una función en el entorno de un punto y de un grado establecido, hallar la serie de Taylor dada una función, acotar el error de una aproximación, calcular límites operando con aproximaciones de funciones por polinomios.

4 Metodología

La investigación es del tipo cualitativa y el alcance es del tipo descriptivo [8] y tiene objetivo conocer la *organización didáctica* que desarrollan los docentes para el tema de polinomios y funciones polinómicas en sus clases. Para ello, se diseñó un cuestionario en Google Forms y se difundió de manera online a través de redes sociales y cadenas de correos electrónicos de docentes e instituciones educativas. Se estructuró en dos secciones, por un lado el perfil del docente encuestado y por el otro, específicamente sobre la *organización didáctica*. Las preguntas del cuestionario se muestran en la Tabla 1.

1 Página virtual de la asignatura Matemática para ingeniería: https://www.ing.unlp.edu.ar/catedra_de_ingreso

2 Página virtual de la asignatura Matemática A: https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0301/

3 Página virtual de la asignatura Matemática B: https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/

4 Página virtual de la asignatura Matemática C: https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/

Tabla 1. Preguntas del cuestionario a docentes sobre la *organización didáctica* para la enseñanza de polinomios y función polinómica.

	Preguntas	Casillas posibles para marcar (una o más opciones)
Perfil docente	Nivel educativo en el que se desempeña	Secundario Terciario Universitario
	Máximo nivel académico alcanzado	Estudiante Terciario Universitario Posgrado
	Nivel y/o niveles educativos en los que enseña polinomios y/o funciones polinómicas	Secundario ciclo básico Secundario ciclo superior Terciario Universitario
	¿Posee formación en didáctica de la matemática?	Si No
Organización didáctica	¿Cómo inicia el estudio de polinomio en sus cursos?	A través de definiciones Mediante un problema extramatemático Mediante un problema intramatemático Otra
	¿Cómo inicia el estudio de función polinómica en sus cursos?	A través de definiciones Mediante un problema extramatemático Mediante un problema intramatemático Otra
	¿Qué material utiliza para planificar sus clases?	Libros o manuales de texto escolares Revistas docentes Diseño curricular y/o plan de estudios Materiales educativos Secuencias facilitadas por colegas Investigaciones y artículos científicos de educación matemática Otra
	¿Para qué y porqué debería saberlos?	Pregunta de respuesta abierta
	¿Cuáles son las dificultades y los errores más frecuentes que observa en sus clases en el estudio de estos temas?	Pregunta de respuesta abierta

Las preguntas del cuestionario fueron diseñadas de modo de contemplar los *momentos de estudio*, en particular: el encuentro con la organización didáctica y la exploración de las tareas, además del trabajo de la técnica.

Las preguntas primera y segunda de la *organización didáctica* tienen por objetivo indagar cuál es en sus clases el primer momento de estudio, si es con tareas y técnicas (*saber-hacer*), o con tecnologías y teoría (*saber*).

5 Resultado del cuestionario

El cuestionario fue respondido de forma anónima por un total de 57 docentes que enseñan los temas de polinomios y funciones polinómicas, tanto en escuela secundaria como en terciarios y universidad. A continuación se presentan los resultados a las preguntas.

5.1 Perfil docente

En cuanto al perfil docente, la primera pregunta que se realizó fue cuál era el máximo nivel académico alcanzado, y un 46,6% respondió universitario, un 39,3 % terciario, un 14,3% posgrado y sólo un 1,8% aún está estudiando. La segunda pregunta tuvo como objetivo saber en qué nivel educativo enseñaban estos temas, y las respuestas fueron las que se detallan a continuación en la Figura 1.

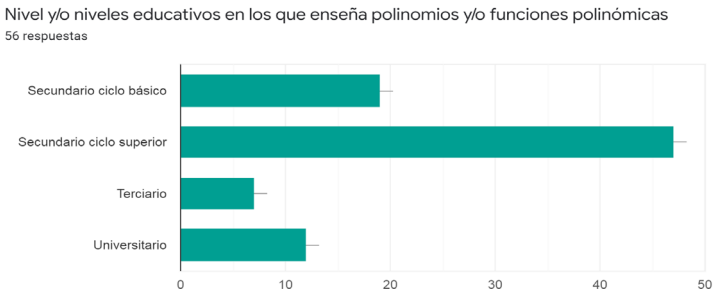


Fig. 1. Respuestas a la pregunta nivel y/o niveles en los que enseña polinomios y/o funciones polinómicas.

Además, se les consultó si poseían formación en didáctica de la matemática y respondieron afirmativamente un 86 %, mientras que el 14% restante, no posee dicha formación.

5.2 Resultados en relación con la organización didáctica

En cuanto a la *organización didáctica* enseñanza de los temas polinomios y funciones polinómicas las preguntas fueron las siguientes.

En primer lugar, se les consultó sobre cuál es el primer momento de estudio, diferenciando entre los temas de polinomios y funciones polinómicas. En el caso de polinomios, las respuestas se encuentran en la Figura 2, además en la opción "otra", completada por un docente que responde lo siguiente: "No enseño polinomios sino función polinómica. Definimos a partir de la función como producto de otras de menor grado."

Para el caso de funciones polinómicas, se muestra en la Figura 3.

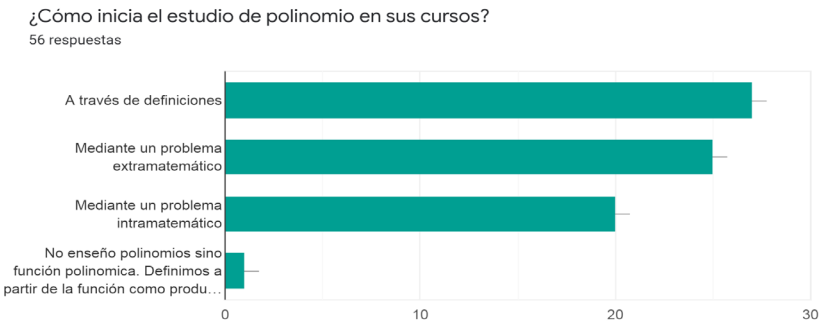


Fig. 2. Respuestas a la pregunta del cuestionario sobre cómo los docentes inician el estudio de polinomio en sus cursos.

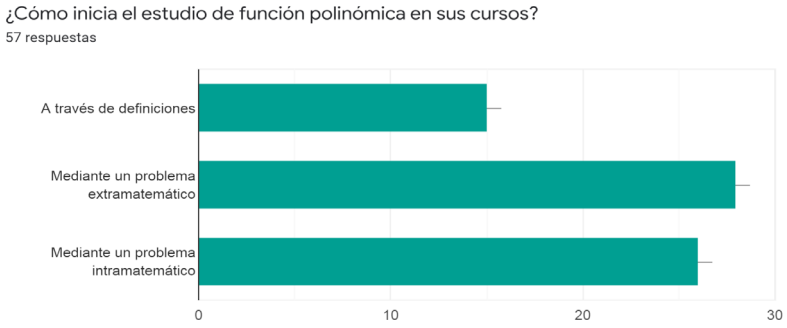


Fig. 3. Respuestas a la pregunta del cuestionario sobre cómo los docentes inician el estudio de función polinómica en sus cursos.

En cuanto al material que utilizan para planificar sus clases, la pregunta también fue de opción múltiple (6 opciones más una a completar, donde se podían seleccionar varias en simultáneo) y el 79 % seleccionó que planifica según libros o manuales de textos escolares, un 77% del diseño curricular o planes de estudio, un 74% de materiales educativos, y luego las respuestas fueron variadas, entre las que se encuentran de investigaciones y artículos científicos un 33% y de secuencias facilitadas por colegas un 31%, mientras que un 9% utiliza revistas docentes.

La siguiente pregunta que se les realizó a los encuestados fue: ¿por qué y para qué creen (los docentes) que deberían sus estudiantes estudiar estos temas?, y las respuestas fueron variadas. El objetivo detrás de esta pregunta fue sondear si los docentes desarrollan principalmente el bloque del *saber-hacer* o el bloque del *saber* en sus *organizaciones didácticas*. La gran mayoría de los docentes respondió para qué y se encuentran respuestas como:

> *"Para saber operar correctamente entre polinomios. Para saber manejar conceptos funcionales aplicados a formas polinómicas"; "para poder continuar con factorización" ; "para poder resolver las operaciones con polinomios" ; "para modelizar y analizar situaciones a partir de este tipo de funciones"; "para poder extrapolar a problemas concretos y porque son los conocimientos básicos para organizar datos reales", "para facilitar el análisis de raíces"; "para poder relacionarlos con los temas subsiguientes"*

y entre las preguntas que respondieron a la cuestión del por qué, se encuentran las siguientes respuestas:

> *"les van a ser de ayuda ya que se aplican en muchas áreas diferentes, física, química, ingeniería, económicas "; "porque se enfrentará con funciones polinómicas en muchos ámbitos fuera de la clase de matemática, y es importante saber leer esas funciones en los gráficos. Además es importante que sepa operar con polinomios para poder relacionar expresiones*

algebraicas que se utilizan para modelizar algo" ; "porque están dentro de los contenidos de la materia y porque son parte de las funciones básicas de la escuela secundaria o universidad, el reconocimiento de otras funciones aporta una mirada más amplia de la matemática" ; "porque se debe vincular la matemática con aquellas disciplinas o ciencias que se nutren de ella" ; "es uno de los temas fundamentales en el área de matemática" ; "es una herramienta matemática muy importante".

Por último, el cuestionario finalizó con la pregunta: ¿cuáles son las dificultades y los errores más frecuentes que observa en sus clases en el estudio de estos temas? y algunas de las respuestas se muestran a continuación, clasificando en qué nivel educativo (escuela secundaria o universidad) enseña el docente estos temas.

- Escuela secundaria: "*No comprenden que los términos con letras no se pueden sumar o restar si no tienen el mismo exponente. La división les cuesta mucho cuando combina números con letras" ; "problemas en las operaciones, sobre todo en multiplicación y división de polinomios" ; "que los alumnos a veces no interpreten acabadamente la relación entre función polinómica y polinomio" ; "lo que representa la letra"; "identificación de términos semejantes para luego realizar las operaciones básicas con polinomios. Confunden las expresiones algebraicas con las ecuaciones . En cuanto a funciones solo presentan dificultad en el reconocimiento de los ejes para realizar la gráfica" ; "la mayor dificultad se da a la hora de graficar una función polinómica" ; "operaciones, factorización" ; "el reconocimiento de variables*".
- Universidad: "*No pueden relacionar un problema extra matemático con las funciones" ; "confusión entre ecuación y función polinómica" ; "la aplicación de las definiciones"; "factorización de polinomios (en particular identificar qué caso aplicar)*"; *"el análisis de las funciones y la caracterización del gráfico a partir de trabajar con funciones de menor grado, suelen presentar dificultades en los estudios de la positividad y negatividad".*

6 Análisis de resultados

En las respuestas obtenidas en cuanto al perfil docente, se puede observar que gran parte de los encuestados tienen formación en didáctica de la matemática y, alrededor de la mitad, cuentan con títulos de nivel universitario, y de la segunda mitad, gran parte de ellos tienen títulos terciarios. Podemos observar también, que una mayoría aborda estos contenidos en el ciclo superior de la escuela secundaria.

En cuanto a la segunda sección del cuestionario, en un primer análisis sobre cómo los docentes planifican su *organización didáctica* para la enseñanza de polinomios, observamos que comienzan el estudio del tema a través de definiciones, en términos de la TAD, relativos al bloque del *saber*. A diferencia en cuanto al estudio de las funciones polinómicas, que lo inician con el bloque del *saber-hacer* (tareas y técnicas mediante el planteo de un problema). A través de las respuestas de dicha pregunta, se puede observar que los primeros momentos de estudio, encuentro con la organización didáctica y el momento exploratorio, se orientan de diversas maneras dependiendo del tema de estudio en cuestión.

En relación al material que utilizan para estructurar su *organización didáctica*, la gran mayoría menciona libros de textos, diseños curriculares y planes de estudio, y materiales educativos.

Otra cuestión a destacar es que entre las respuestas a la pregunta ¿para qué estudiar polinomios y funciones polinómicas? los docentes lo asocian con que los estudiantes puedan realizar tareas y técnicas, como lo son: operar, modelizar, analizar y graficar, entre otras, es decir, estas actividades se engloban en el bloque del *saber-hacer*, y no se estudia en detalle la producción de las técnicas o justificaciones correspondientes al bloque del *saber*. En cuanto a la pregunta del ¿por qué?, las respuestas también fueron diversas, pero se puede observar que gran parte de ellas asocia el estudio de estos temas a la aplicación de estas funciones para modelizar problemas, para utilizarlas en otras áreas como lo son física, química e ingeniería, y como *equipamiento praxeológico* para estudios superiores.

Por último, en la pregunta que se focaliza en indagar acerca de los errores más comunes que cometen los estudiantes en relación a estos temas, se puede observar que, en el caso de los estudiantes de la escuela secundaria, los docentes perciben que las mayores dificultades se encuentran en la resolución de tareas y técnicas, como lo son: operar entre polinomios, graficar funciones polinómicas, factorización de polinomios, e identificación de la variable. En comparación, entre las dificultades del nivel universitario en el uso de algunas técnicas como por ejemplo graficar y factorizar, también los docentes las perciben en el manejo de tecnologías y teorías, como por ejemplo, la confusión entre ecuación y función polinómica o en la aplicación de definiciones.

7 Reflexiones y trabajos futuros

Se presentó una investigación que surge de problemáticas encontradas en estudiantes de cursos básicos de ingeniería al aprender serie y polinomio de Taylor que podrían, en parte, de provenir del escaso *equipamiento praxeológico* (polinomio y funciones polinómicas) que poseen al estudiar esos temas.

Por ello se diseñó e implementó un cuestionario que pretende comenzar a conocer la *organización didáctica* que desarrollan en el aula los docentes que enseñan dicha organización relativa a polinomios y funciones polinómicas. El análisis de las respuestas al cuestionario, que indaga sobre algunos de los momentos de estudio, indica que en el primer momento de encuentro con dicha organización, depende del tema en estudio. Además no es explícito, en las respuestas al cuestionario, que en la *organización didáctica* se desarrolle la *tecnología* que explica las *técnicas* para realizar cierto tipos de *tareas*. Este aprendizaje mecánico, sin sentido de las *técnicas* para operar y trabajar con polinomios y funciones polinómicas en la universidad, podría estar explicando el "olvido" o el escaso *equipamiento praxeológico* que disponen los alumnos en el trabajo con tales temas.

Una primera conclusión es que se implementé más el trabajo con el bloque del *saber-hacer*, y se explicite el porqué se realizan tales tareas y técnicas que les den justificación a esos saberes, ya que por no estar explícita esa justificación, puede ser que los estudiantes "olviden las técnicas" cuando llegan a la universidad, teniendo un *equipamiento praxeológico* escaso.

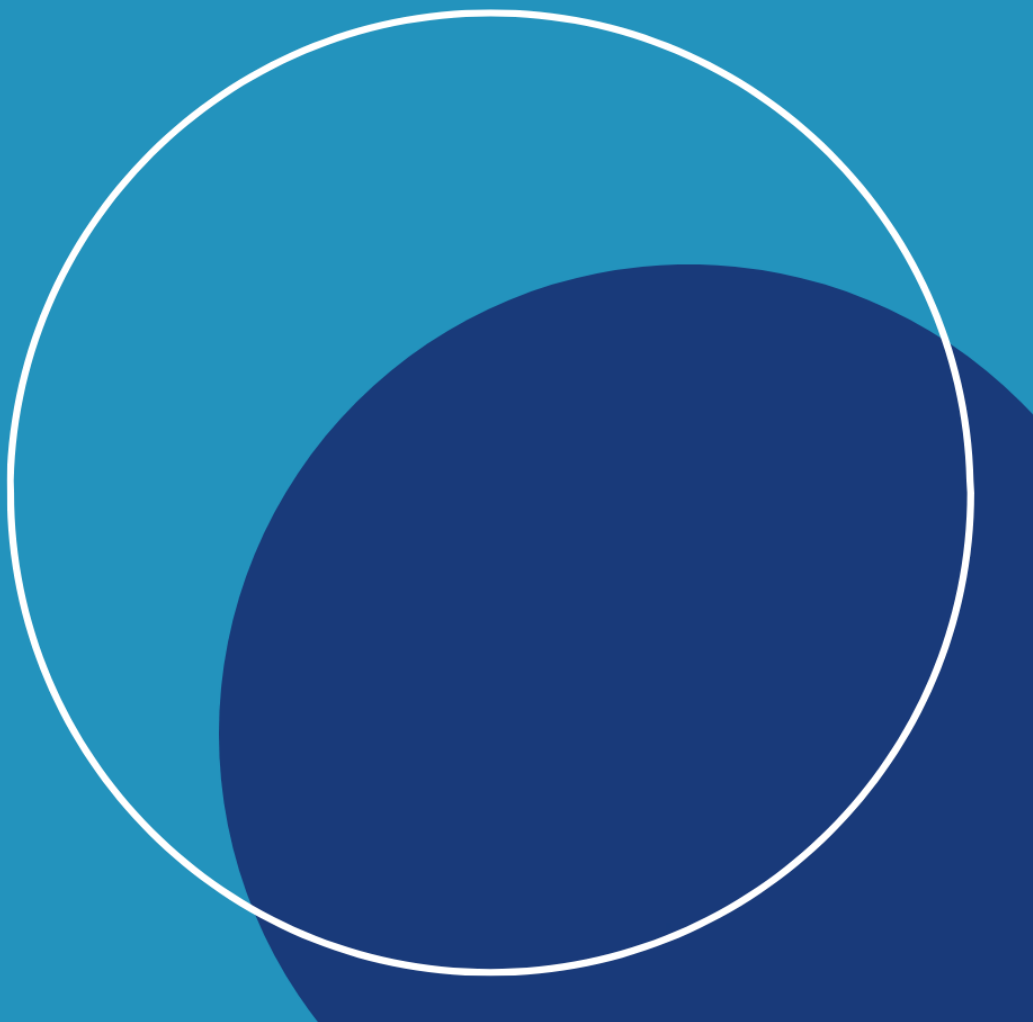
A futuro se propone avanzar con la evaluación de la *organización didáctica* que desarrollan los docentes para la enseñanza de polinomio y funciones polinómicas, ya que constituye un punto de convergencia del conjunto de estudios en didáctica de las matemáticas, al mismo tiempo que es, de manera explícita o implícita, uno de los motores del progreso de las investigaciones en el mencionado campo. Los resultados encontrados y los que se obtengan a futuro servirían de insumo para generar una *estrategia didáctica,* que pueda llevarse al aula en la escuela secundaria, que podría contemplar la incorporación de tecnología y de resolución de problemas, que además se organice según los *momentos de estudio* detallados en la TAD.

Referencias

1. Chapra, S. C.; Canale, R. P.; Ruiz, R. S. G.; Mercado; V. H. I., Díaz, E. M.; Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros* (Vol. 5). McGraw-Hill
2. Costa, V. A.; Bayés, A.: Un recurso educativo en la aplicación móvil de GeoGebra para el estudio de serie y polinomio de Taylor II. *SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología.* Vol. 1, No. 2, pp. 1-6 (2021)
3. Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. 1a.ed. Barcelona: Universitat de Barcelona.
4. Otero, M. R.; Fanaro, M. D.; Corica, A.; Llanos, V. C.; Sureda, P., Parra, V. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática. Buenos Aires: Editorial Dunken.
5. Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques (Revue*)*, *19*(2), 221-265.
6. Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
7. DGCyE (2015). *Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires*. Recuperado de: http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/materias_comunes_a_todas_las_orientaciones_de_4anio/matematica_4.pdf . Accedido el 12 de mayo de 2022.
8. Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P.; & Hernández Sampieri, R. (2014). Metodología de la Investigación. Editorial McGraw Hill.

EMCI 2022

Eje: Aplicaciones de la matemática



EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Modelo con reducción de incógnitas para la resolución estática de entramados planos

Héctor D. Martín[1], Claudio N. Maggi[1], Marcelo T. Piovan[2], Marcos N. Pereson[1]
[1] Grupo de diseño mecánico GRUDIM, Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional
Calle 44 n 1000, Reconquista, Santa Fe, Argentina
hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar. cmaggi@comunidad.frrq.utn.edu.ar. marcos.pereson.nahuel@gmail.com.
[2] Centro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB.
11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca. Pcia. Buenos Aires, Argentina.
mpiovan@frbb.utn.edu.ar.

Resumen. El presente trabajo es parte de un proyecto de investigación en la Facultad Regional Reconquista en donde se aborda el estudio de sistemas cerrados aporticados planos por medio de series de potencias enteras. En los mismos se impone la automaticidad de las condiciones geométricas de continuidad y del equilibrio de esfuerzos característicos en los nodos, en los cuales acceden dos o más barras. Se estudia el comportamiento mecánico-estructural de los pórticos abiertos y cerrados, identificando las variables que influyen en las respuestas ante las acciones estáticas, luego el planteo y resolución de las ecuaciones gobernantes del problema, siempre dentro del encuadre adoptado por la Resistencia de Materiales clásica y orientado principalmente a la automatización de la herramienta. En el tratamiento del programa y en los estudios analíticos realizados se utilizó el programa de Matemática Simbólica Mathematica. Se resuelven problemas de entramados con cargas en los nodos y las barras, obteniéndose los diagramas de los esfuerzos en las barras.

Palabras Clave: Series de Potencias, Pórticos Planos, Esfuerzos en Barras.

1 Introducción

En la resolución de los entramados, se aplica en el estudio estático, lo que suele conocerse como condiciones de transferencia, es decir, la continuidad geométrica y el simultáneo equilibrio de los nudos, se consigue una particularidad muy destacable que es la reducción sustantiva del número de incógnitas a manejar [1-2]. En efecto, al aplicar las condiciones precitadas, se van resolviendo las distintas barras en un circuito seleccionado. Entonces se produce una economía de manipulación algebraica y correspondientemente una economía de tiempo computacional. Utilizando esta técnica, se resuelven los entramados cuando los mismos se encuentran sometidos a esfuerzos aplicados o desplazamientos de vínculos. Estos esfuerzos pueden ser cargas verticales u horizontales en los nodos, momentos aplicados en los nodos, o bien cargas distribuidas transversales y/o axiales a lo largo de las barras. Éstas cargas distribuidas pueden tener cualquier función en su variación (constante, polinómica, trigonométrica, etc…), ya que se hará un desarrollo en series de la carga aplicada. Como salida del programa elaborado, se muestran las funciones de los desplazamientos axiales y transversales, los esfuerzos de corte y normales, además de los diagramas de momentos. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general, depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a cada uno de los nodos.

2 Metodología

Imponiendo el cumplimiento de los sistemas diferenciales se sistematizan los algoritmos de recurrencia al utilizar los desarrollos en series de potencias en la resolución de las ecuaciones diferenciales. El problema de estática en pórticos es de tipo lineal y para resolverlo, habitualmente, se divide cada tramo en elementos con aproximación algebraica. Con el fin de obtener mayor precisión, normalmente, se aumenta el número de elementos y consecuentemente el número de incógnitas. El uso de series de potencias para simular la forma modal de cada tramo sin aproximaciones, es decir con precisión arbitraria, tiene la ventaja que sólo exige en nodos de tramos consecutivos la continuidad estática y geométrica [1-2].

En la Figura 1 se muestra un pórtico plano cerrado, ubicado en un sistema de coordenadas de referencia X-Y con cargas puntuales en el nodo 5, cargas repartidas transversalmente en la barra 10 y cargas axiales sobre toda la barra 11.

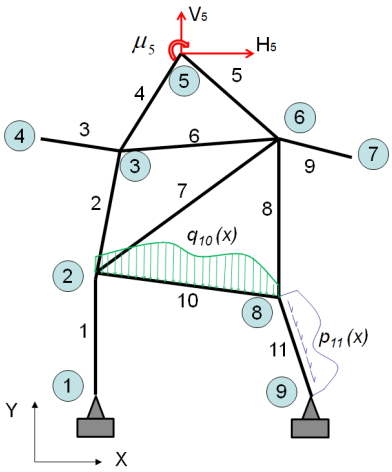


Figura 1. Esquema general de un pórtico en estudio con cargas concentradas y distribuidas.

Para el estudio energético se considera en cada barra j un sistema de coordenadas local en donde cada punto, tendrá un desplazamiento transversal y un desplazamiento axial, como se muestra en la Figura 2.

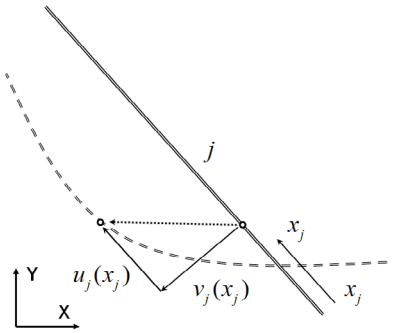


Figura 2. Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra *j*.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema estático de cada una de las barras (*j*) que componen el entramado son las indicadas en (1) y (2).

$$E_j J_j \, v_j'''' \left(x_j \right) - q_j (x_j) = 0 \tag{1}$$

$$E_j F_j \, u_j'' \left(x_j \right) + \, p_j (x_j) = 0 \tag{2}$$

En donde $q_j(x)$ y $p_j(x)$ son las expresiones de los polinomios que representan las cargas transversales y axiales para la barra j. En caso de ser funciones trascendentes, es necesario previamente hacer los desarrollos en serie de las mismas para cargar los datos. Las cargas puntuales, sean esfuerzos verticales, horizontales o momentos aplicados, se deben colocar en nodos. En caso de necesitar una carga puntual en medio de una barra, se coloca un nodo en su ubicación dividiendo la barra original en dos barras.

En todos los casos, el subíndice j indica el número de la barra cuyas constantes características son las siguientes: E_j es el Módulo de Young, F_j es el área, J_j es el Momento de Inercia. Las funciones correspondientes a los desplazamientos transversal y axial son v_j y u_j respectivamente, ambas en la variable local x_j de cada barra.

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales, un desarrollo en series de potencias [1-3] para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, para una nueva variable normalizada (3). Las expresiones resultan ser, para el desplazamiento transversal (4) y para el axial (5):

$$\xi_j = \frac{x_j}{a_j} \tag{3}$$

$$v_j \left(\xi_j \right) = \sum_{i=0}^{m} A_{j,i} \, \xi_j^i \tag{4}$$

$$u_j \left(\xi_j \right) = \sum_{i=0}^{m} B_{j,i} \, \xi_j^i \tag{5}$$

Al utilizar estas expresiones de las series de potencias en las ecuaciones diferenciales, se llega a la recurrencia entre sus coeficientes, que para el caso del estudio estático son las siguientes:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i}}{J_{4,j} \, \varphi_{4,i}} \tag{6}$$

$$B_{j,i+2} = - \frac{p_{j,i}}{F_{2,j} \, \varphi_{2,i}} \tag{7}$$

En donde:

$$\varphi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!}, \qquad J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4}, \qquad F_{2,j} = \frac{E_j F_j}{a_j^2} \tag{8-10}$$

En cada nodo, en donde concurren más de una barra, se realizan condiciones de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias, y con condiciones estáticas de equilibrio, naturales o de segundo orden. De esta manera, se va recorriendo el entramado según un camino previamente establecido. Las barras van obteniendo los coeficientes de los desarrollos en serie en función de las barras anteriores en el camino. En los casos de arribar a nodos en que las barras traigan datos, se realizan las ecuaciones de compatibilidad geométrica junto con las ecuaciones estáticas. Los resultados de estas ecuaciones son los que resuelven el problema finalmente.

Se han considerado diferentes vinculaciones a tierra, como ser empotramiento, cuasiempotramiento, extremos

libres, articulaciones simples y dobles. También se han tenido en cuenta los vínculos elásticos a tierra. Además se permite que las barras, en uno o ambos extremos estén articuladas al entramado. Se han estudiado también los diferentes cedimientos en los vínculos, ya sea vertical, horizontal o giro.

A los fines de corroborar la eficiencia del método propuesto, se ha elaborado un programa utilizando el software de matemática simbólica [4].

3 Resultados

A continuación, se resuelve la estática de algunos entramados con diferentes características a modo de ejemplos, pretendiendo mostrar la eficacia del método planteado. Los resultados se comparan con la bibliografía [5] y en otros casos se resuelve el entramado utilizando el Método de los Elementos Finitos con un programa comercial Algor [6]. Para los casos de comparaciones con los resultados del libro [5], se debe recalcar que en el mismo las soluciones han sido derivadas aplicando la teoría del trabajo virtual. Sólo se considera la energía de deformación por flexión, despreciándose los efectos de las deformaciones por esfuerzo de corte y axial. Esto último sí se ha tenido en cuenta en los presentes desarrollos utilizando las series de potencias. Este proceder acarrea una pequeña diferencia en los resultados, lo que hace más exactos a los valores obtenidos con el método propuesto. En los resultados de las tablas, en todos los casos, en los esfuerzos de corte y normal, las unidades se encuentran expresadas en N (Newtons) y los momentos en Nm.

3.1 Ejemplo 1

Se trata de un entramado presentado en el libro [5], en su Capítulo 2, enunciado como carga vertical aplicada a una ménsula, con las coordenadas de los nodos que se muestran en la Figura 3. Este entramado, solo posee una carga puntual en una ménsula, P= 1000 N. Los nodos 1 y 6 poseen vínculos a tierra del tipo articulaciones dobles.

Para simplificar se adoptan todas las barras iguales, de sección uniforme F = 0.12 m^2, con Módulo de Elasticidad E = 2,1 x 10^{11}N/m^2 y momento de inercia J = 0,0036 m^4, para todas las barras. Las longitudes de las barras se toman en metros, indicado en las coordenadas de los nodos en la Figura 4.

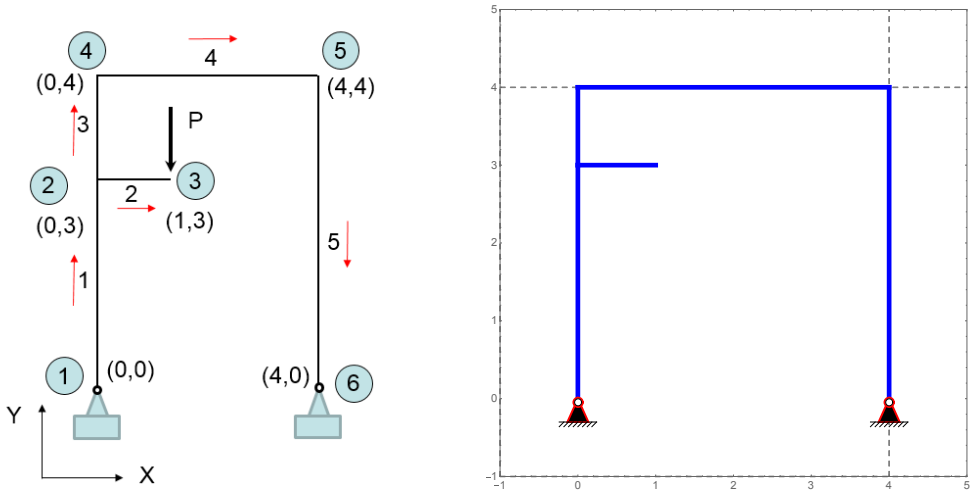


Figura 3: Pórtico de 5 barras y 6 nodos, con articulaciones dobles en los nodos 1 y 6. Posee carga puntual en el nodo libre 3. a) Esquema con datos, b) gráfico del pórtico resultante del programa.

En la Figura 4, se muestran los gráficos de los esfuerzo de corte y normal obtenidos utilizando series de potencias con Mathematica [4]. Los valores son comparados con la bibliografía [5] en la Tabla 6.2.

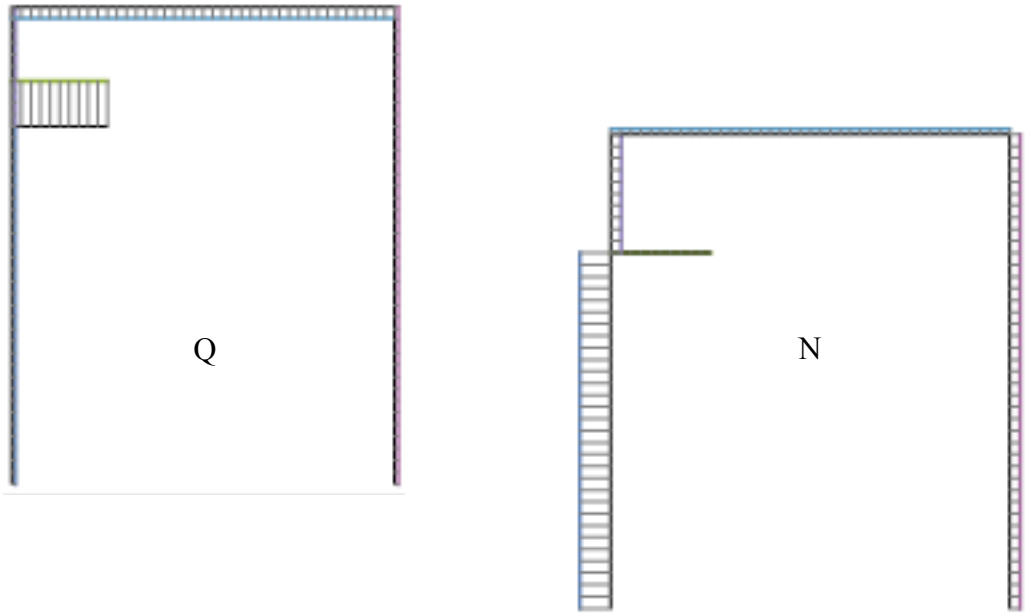


Fig.4. Gráficos de esfuerzo de corte y normal.

Tabla 1. Resultados de esfuerzo de corte y normal, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con los obtenidos en [5].

Barra	Esfuerzo	Series de potencias	Leontovich [5]
1	Corte	107,69	107,81
2		1000	1000
3		107,69	107,81
4		250	250
5		107,69	107,81
1	Normal	750	750
2		0	0
3		250	250
4		107,69	107,81
5		250	250

A continuación, se dan las expresiones correspondientes a las funciones de momentos de cada una de las barras, obtenidos con desarrollo en series de potencias:

Barra 1: M1 (x) = 107.691347 x
Barra 2: M2 (x) = 1000 - 1000 x
Barra 3: M3 (x) = - 676.92596 + 107.691347 x
Barra 4: M4 (x) = - 569.23461 + 245 x
Barra 5: M5 (x) = 430.76539 – 107.691347 x
Utilizando las expresiones que sugiere [5], se llega a los siguientes valores para los momentos:
Nodo 2, barra 2: M= 1000 Nm
Nodo 2, barra 3: M= -676.563 Nm
Nodo 4: M= -568.75 Nm
Nodo 5: M= 431.25 Nm

En la Figura 5, se presenta el diagrama de momentos y el gráfico de deformaciones, ambos obtenidos mediante el desarrollo en series de potencias.

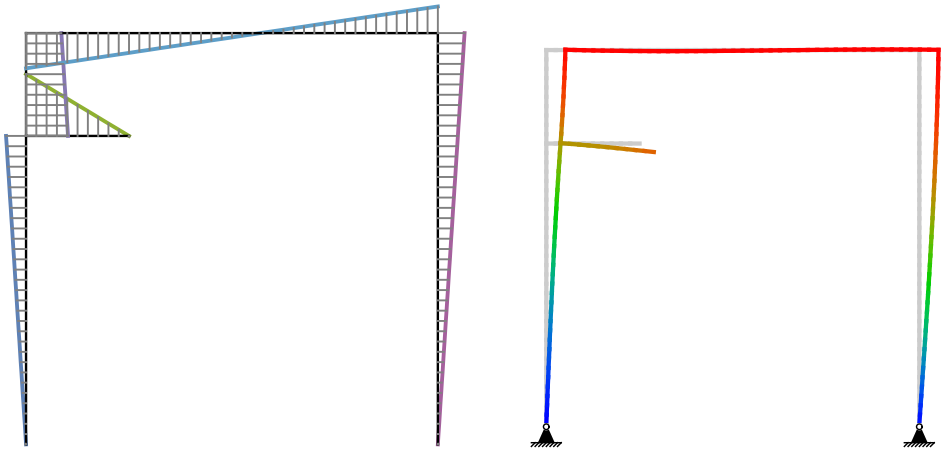


Fig. 5. Gráficos de momentos y deformaciones, obtenidos con series de potencias**.**

3.2 Ejemplo 2

Se trata de un marco cerrado con 5 barras, simplemente apoyado en dos nodos y con una carga uniforme *q(x)* en la barra inferior de 1000 N/m [7]. Las características geométricas de las barras son iguales al ejercicio anteriores. También se trata del mismo material. El esquema del entramado se observa en la Figura 6, en donde se indican las coordenadas de los nodos, en el sistema global y con unidades en metros.

Los resultados de los momentos en los nodos se muestran en la Tabla 2 comparándose con los obtenidos al utilizar el MEF [6]. Luego en la Figura 7 se comparan los gráficos de momento. En la Figura 8 se muestran los gráficos de esfuerzos de corte y normal obtenidos con el programa.

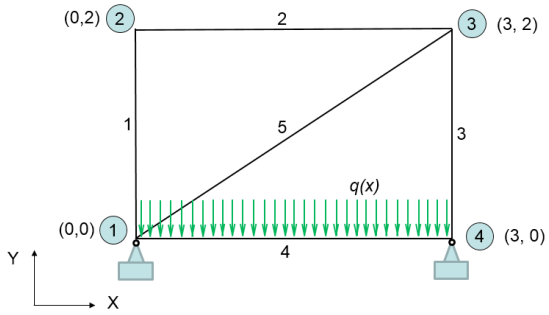


Fig. 6. Marco cerrado biarticulado con carga uniformemente repartida *q(x)* en la barra inferior, la número 4.

Tabla 2. Valores de momentos (Nm) en los nodos y máximo momento en la barra 4, obtenidos al analizar el pórtico con series se potencias, comparados con MEF, Algor [6].

Nodo	Series de potencias	MEF [6].
1 (barra 1)	364.168	364.164
1 (barra 4)	640.487	640.484
1 (barra 5)	276.319	276.32
2	66.819	66.817
3 (barra 3)	185.858	185.873
3 (barra 2)	10.306	10.306
3 (barra 5)	175.552	175.559
4	517.387	517.399
Max. Barra 4	546.063	546.059

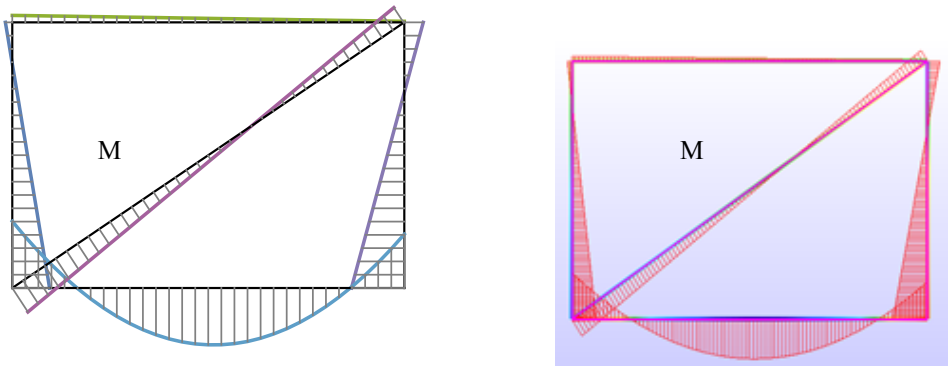


Figura 7: Diagramas de momentos obtenidos a) con el programa y b) con MEF [6].

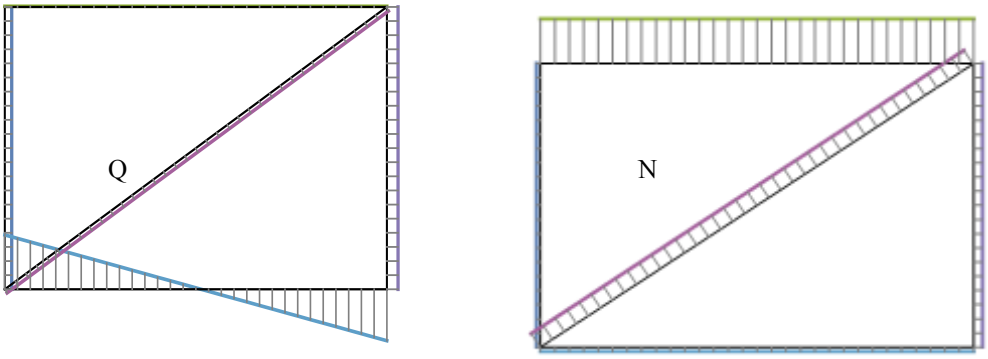


Fig. 8. Diagramas de esfuerzos obtenidos con el programa: a) corte y b) normal**.**

4 Conclusiones

El método propuesto mediante los desarrollos en series de potencias, reduce considerablemente el número de incógnitas en la resolución. Es posible llegar a una solución exacta, cuando se lleva el orden del polinomio a infinito, sin aumentar la cantidad de incógnitas. Otra de las grandes ventajas del presente método es que las cargas de forma polinómica, de grados mayores a uno, se toman en forma exacta, en toda su longitud, sin la necesidad de dividir la barra en pequeños segmentos con cargas uniformes o trapezoidales para lograr la aproximación, cosa que sí

realizan los otros métodos. En caso de necesitar que en la barra exista una carga de forma trigonométrica, u otra función no polinómica, es posible realizar un desarrollo en series de esa función y expresarla como polinomio. Se continúa trabajando con la metodología utilizando teoría de segundo orden en los cálculos y pudiendo arribar a las cargas críticas de la estructura.

Referencias

1. Filipich C. P., Escalante M. R., et al. (2003). Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos. *ENIEF 2003. Mecánica Computacional*. Bahía Blanca.
2. Martín, H. D. Tesis doctoral. Utilización de series de potencias para la resolución económica de elásticas, frecuencias y teoría de segundo orden de entramados de barras, en el contexto de la ingeniería estructural. UNS. 2017.
3. Hildebrand, F.B. (1968). Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India*. Private Ltd. N. Delhi.
4. Programa: Wolfram Mathematica © (1988-2022), Wolfram Research inc.
5. Leontovich, V. Capítulos 2 al 6 del libro: Pórticos y Arcos, soluciones condensadas para el análisis estructural. *Compañía editorial continental, S.A.* México-España. Tercera Edición en español. 1961.
6. Programa: Algor FEMPRO, Copyright © (2009). Versión 23.1
7. Martín, H. D. Resolución estática de entramados estructurales aplicando Series de Potencias. *III Jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de los doctorandos en ingeniería de la UTN*. Programa: Estructuras civiles. Facultad Regional Mendoza de la UTN. 2014.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Implementación de un modelo de actividad para que Estudiantes de Ingeniería integren saberes en Análisis Matemático II promoviendo el desarrollo de Competencias

Zeniquel, Manuel. Salaj, Carlos J. Georgetti, Marco A. Balbi Milena M.
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
Las Heras 727, Resistencia, Chaco. CP: 3500
manuelzeniquel@hotmatmail.com
carlos.javier.salaj@comunidad.unne.edu.ar
georgettimarcos@live.com.ar
milenabalbi@gmail.com

Resumen. Este trabajo se centra en la presentación y desarrollo de un tipo de actividad que pretendemos implementaren la asignatura Análisis Matemático II de las carreras de Ingeniería, a partir de la transformación del diseño curricular actual a uno basado en la Formación por Competencias y Centrado en el Estudiante. A partir de estenuevo enfoque de la enseñanza y tomando como punto de partida situaciones contextualizadas a la ingenieríaa través de actividades y/o situaciones problemáticas, presentamos aquí los niveles en que tributan a las competencias de egreso el planteo de problemas matemáticos y físicos. Exponemos y desarrollamos una actividad extraída del libro Cálculo II de Larson y Edwards. Así mismo realizamos una breve síntesis del enfoque de Formación por Competencias.

Palabras Clave: Formación por Competencias, Modelo de actividad, Análisis Matemático II, Ingeniería.

1 Introducción

En la asignatura Análisis Matemático II para las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica e Ingeniería Electromecánica de la Facultad de Ingeniería dependiente de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) iniciamos un proceso de transformación del diseño curricular actual a uno basado en la Formación por Competencias y Centrado en el Estudiante, según lo establecido por el "Libro Rojo de CONFEDI". Es por este motivo que mediante el abordaje de aplicaciones de contenidos de la materia a situaciones contextualizadas o, a la ingeniería mediante actividades y/ o situaciones problemáticas, pensamos que en un Nivel 1 a 2 se puede tributar a las competencias de egreso desde el planteo de problemas matemáticos y físicos.

> *El aprendizaje basado en competencias es un modelo pedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje enfocado en las competencias que adquiere el alumno, en sus necesidades y motivaciones específicas, potenciando su autonomía y responsabilidad, donde los alumnos deben ir al mismo ritmo en una misma asignatura junto al resto del grupo de su clase. Este modelo permite al estudiante reconocer las capacidades, la disposición, el ingenio o determinadas aptitudes yendo a su propio ritmo. El alumno, cuenta generalmente con la ayuda del profesor que a su vez tiene un rol de tutor que acompaña al estudiante en la consecución de sus objetivos... De esta forma, se logra un gran objetivo individual y grupal: los alumnos avanzan a su propio ritmo y, además, todos en la clase logran dominar los contenidos. [1]*

Este enfoque de enseñanza por competencia transforma el rol del docente, poniendo al estudiante como foco deatención de su propio aprendizaje, puesto que requiere compromiso y responsabilidad por parte de estos para aprender [2].

Este modelo se apoya en los resultados de aprendizaje (RA), los cuales indican lo que se espera que los estudiantes hayan aprendido al finalizar un curso, un tema o una clase. Estos resultados podrían quedar demostrados a través de distintas evidencias, que pueden ser: pruebas escritas, orales, prácticas, simulaciones, entre muchas otras variantes.

La actividad que presentamos y desarrollamos como modelo de actividades que se pueden implementar en el aula, surge a partir de la etapa de cambio curricular en la que se encuentra nuestra facultad, y creemos que contribuye a:

- Promover la enseñanza de la matemática, mediante el enfoque por Competencias.
- Implementar acciones de mejora y fortalecimiento académico, para estudiantes.
- Propiciar espacios de construcción colectiva e interdisciplinaria del conocimiento matemático.

Con esta actividad pretendemos integrar contenidos, saberes, diseñar un instrumento de evaluación y mediante una rúbrica establecer la concreción de la tributación desde las competencias específicas a las competencias de egreso del futuro ingeniero. Para esto buscamos formar a los estudiantes en las siguientes competencias de egreso [3] en las que la asignatura tributa:

Tabla 1: Competencias y nivel de tributación de la asignatura Análisis Matemático II.

1.(C.E.)	Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.	2
2.(C.T.)	Concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería (sistemas, componentes, …)	1
3.(C.T.)	Gestionar, planificar, ejecutar y controlar, proyectos de ingeniería (sistemas, …)	1
4.(C.T.)	Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería	1
5.(C.T.)	Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y/o innovaciones tecnológicas	1
6.(C.S.)	Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo	2
7.(C.S.)	Comunicarse con efectividad	2
8.(C.S.)	Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social	2
9.(C.S.)	Aprender en forma continua y autónoma	2
10.(C.S.)	Actuar con espíritu emprendedo	2

2 Desarrollo

Análisis Matemático II es una asignatura que se desarrolla en el segundo cuatrimestre del primer año de las carreras de Ingeniería (UNNE). En el syllabus dentro de la planificación se define la siguiente secuenciación de los contenidos mínimos:

> Representación de Superficies en E3 → Cuádricas → Funciones escalares de n variables → Análisis de funciones → Continuidad → Cálculo diferencial e integral → Aplicaciones → Funciones vectoriales →Análisis vectorial en campos escalares → Aplicaciones → Cálculo diferencial e integral en campos vec-toriales→ Aplicaciones en problemas de Ingeniería

Como se observa, dentro de los saberes que se desarrollan en esta materia, no se tratan métodos de cálculos iterativos. Sino que lo incorporaremos como conocimiento extracurricular mediante un taller de resolución de problemas, con el objetivo de resolver actividades que amplían el concepto de la determinación y el cálculo de extremos, relacionando transversalmente con materias como Informática, que la cursan durante el primer cuatri- mestre del 2° año. Actualmente se desarrollan ejercicios y problemas sobre determinación de extremos relativos mediante las condiciones necesaria y suficiente, empleando el método del Hessiano y los Multiplicadores de La- grange.

El Método del Gradiente, donde se halla por aproximación los extremos se lo plantea solamente mediante el problema, que se presenta y desarrolla más adelante, involucrando en su resolución saberes tratados anteriormente, se puede afirmar que además cumple la función de integrar y revisar los saberes.

La actividad que seleccionamos para este trabajo tributa a las competencias:

- Competencia específica: C1
- Competencia tecnológica: C2
- Competencias sociales: C5 a C9

2.1 Primer Momento (10 minutos):

Se solicita a los participantes del taller que se reúnan en grupos de tres y posteriormente, a través de un proyector, se presenta la situación problemática y las actividades con las cuales trabajarán (también se hará entrega de copias impresas del problema a cada grupo).

Presentamos a continuación la actividad, que fue extraída del libro Cálculo II de Larson y Edwards, pág. 967.[4]

Problema: Una empresa tiene tres tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos (0, 0), (-2, 2) y (4, 2) (ver Fig. 1). La dirección planea construir un centro de distribución localizado de tal manera que la suma *S* de lasdistancias del centro a las tiendas sea mínimo. La localización del centro de distribución es (x, y), y por consiguiente la suma S de las distancias es una función de x e y.

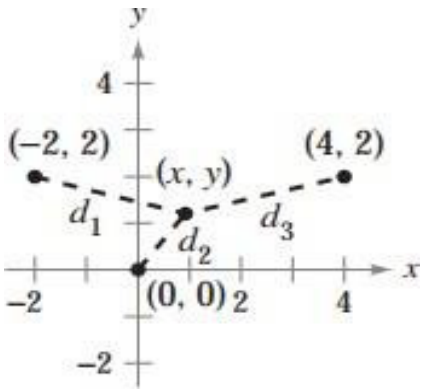


Fig. 1. Representación en el plano cartesiano de las ubicaciones de las tiendas de venta (Cálculo II, pág. 967).

Proponemos que, en primer lugar, cada grupo en forma individual lean el problema y comenten entre ellos,interior al grupo, sobre la situación problemática propuesta y qué se les ocurre que podrían empezar a hacer. En este momento los docentes recorren los distintos grupos para, en caso de ser necesario, dar algunas orientaciones respecto al problema en sí, y/o ir registrando sobre qué aspectos del problema están debatiendo o cómo lo empezarían a resolver.

2.2 Segundo Momento (20 minutos):

Antes de dar a conocer la consigna, uno de los docentes realiza la puesta en común sobre los aspectos más relevantes que surgió en cada grupo y sobre las primeras ideas propuestas acerca de cómo empezar a resolver el problema.

Se presenta la consigna.

a) Escribir la expresión que da la suma S de las distancias. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar S. ¿Tiene esta superficie un mínimo?

Nuevamente el docente solicita a los diferentes grupos que empiecen a analizar lo pedido en esta primera consigna y cómo se relaciona ello con las primeras ideas que fueron surgiendo del primer momento. Los docentes recorren los diferentes grupos para observar y escuchar sobre lo que están y cómo están pensando los participantes.

Puesto que el foco está sobre el estudiante como constructor de su propio aprendizaje, el docente no interviene a menos que sea necesario. En ese caso, sólo darán pautas con el fin de orientar el planteamiento del problema.

Luego de recorrer, observar, escuchar y registrar lo que pensó, planteó y realizó cada grupo; un docente solicita auno o dos grupos que expongan lo que hicieron. En este momento, los distintos grupos debaten sobre los diversos procedimientos que pudieron surgir y se argumentan sobre cuál o cuáles quedan, cuáles no y por qué.

Finalmente se presenta la siguiente propuesta:

Distancia entre dos puntos:

$$A\ (x_1; y_1)\ ;\ B(x_2; y_2)\ \text{ entonces }\ d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ \ \textbf{(1)}$$

$$P_1(-2; 2) \qquad d_1 = \sqrt{(-2 - x)^2 + (2 - y)^2} \quad \textbf{(2)}$$

$$P_2(0; 0) \qquad d_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textbf{(3)}$$

$$P_3(4; 2) \qquad d_3 = \sqrt{(4 - x)^2 + (2 - y)^2} \quad \textbf{(4)}$$

$$(x; y) \qquad S = d_1 + d_2 + d_3 \quad \textbf{(5)}$$

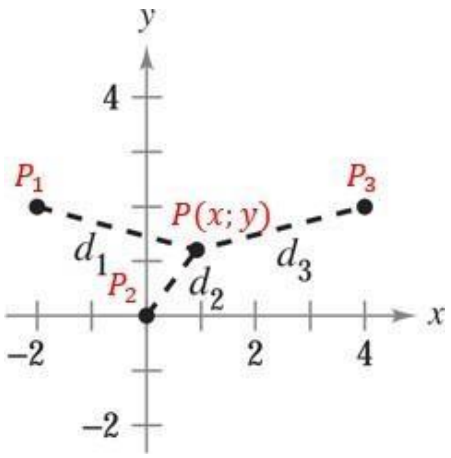


Fig. 2 Representación de los puntos y distancias

$$S = \sqrt{(-2 - x)2 + (2 - y)2} + \sqrt{x2 + y2} + \sqrt{(4 - x)2 + (2 - y)2} \quad \textbf{(6)}$$

Al representar gráficamente la ecuación anterior, obtenemos la siguiente superficie, que presenta un valor mínimo.

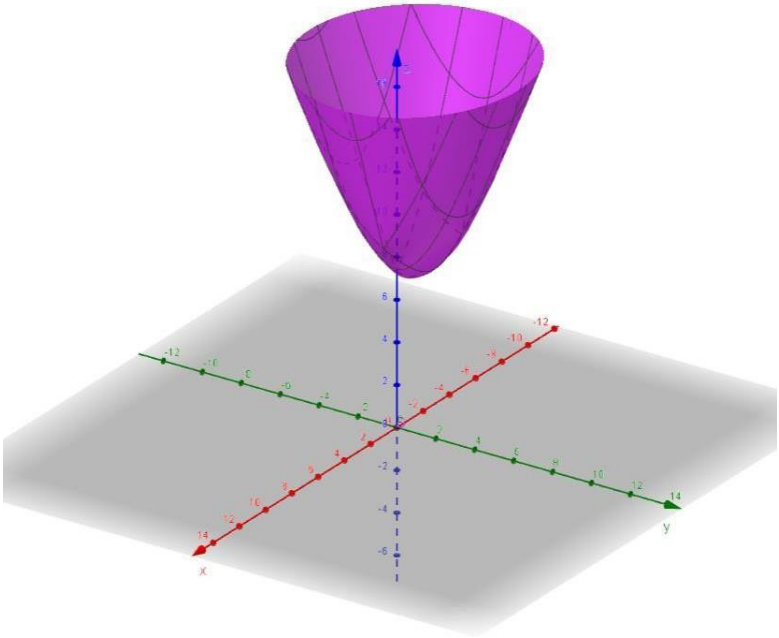


Fig. 3 Representación gráfica de la superficie S.

2.3 Tercer Momento (40 minutos):

A continuación, el docente presenta otras dos consignas, b) y c), a los participantes.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y obtener Sx y Sy. Observar que resolver el sistema Sx = 0 ySy = 0 es muy difícil. Por tanto, aproximar la localización del centro de distribución.

En esta consigna, los estudiantes deben obtener las derivadas parciales de la función S utilizando softwarealgebraico. Sólo si se requiere, los docentes guían respecto a cómo obtener dichas derivadas utilizando el software.

$$S = \sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2} \quad (7)$$

$$S_x = \frac{-2(x+2)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} \quad (8)$$

$$S_y = \frac{-2(y-3)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(2-y)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} \quad (9)$$

Entonces

$$S_x = 0 \rightarrow \frac{-2(x+2)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} = 0 \quad (10)$$

$$S_y = 0 \rightarrow \frac{-2(y-3)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(2-y)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} = 0 \quad (11)$$

c) Una estimación inicial del punto crítico es $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Calcular $-\nabla S(1, 1)$ con componentes $-Sx(1, 1)$ y $-Sy(1, 1)$. ¿Qué dirección es la dada por el vector $-\nabla S(1, 1)$?

Antes que los participantes empiecen a trabajar sobre la consigna c), uno de los docentes propone que comiencen apensar sobre ¿por qué se dice que el punto $(x_1, y_1) = (1, 1)$ es una estimación inicial? ¿qué interpretación se da a $-\nabla S(1, 1)$ dentro del problema?

Para el punto inicial $(x_i, y_i) = (1, 1)$, la suma de las distancias de las tres tiendas al centro de distribución es:

$S_1 = 7{,}3566$ Km

$$S_x = \frac{-2(x+2)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} \textbf{ (12)}$$

$$S_y = \frac{-2(y-3)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(2-y)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}} \textbf{ (13)}$$

$$-\nabla(1;1) = -(S_x(1;1),\ S_y(1;1)) = (-0{,}7071067811;\ -0{,}07465124915)$$

La dirección de mínimo incremento de S en $(1;1)$ *está dado por* $-\nabla(1,1)$

2.4 Cuarto Momento (20 minutos):

d) La segunda estimación del punto crítico es

$$(x_2,\ y_2) = (x_1 - (x_1,\ y_1)t,\ y_1 - S_y(x_1,\ y_1)t) \textbf{ (14)}$$

Si se sustituyen estas coordenadas en S(x, y), entonces S se convierte en una función de una variable *t*. Hallar el valor de *t* que minimiza S. Utilizar este valor de *t* para estimar $(x_2;\ y_2)$.

$$(x_n,\ y_n) = (x_{n-1} - (x_{n-1},\ y_{n-1})t,\ y_{n-1} - S_y(x_{n-1},\ y_{n-1})t \textbf{ (15)}$$

$$(x_2; y_2) = (1 - 0{,}70710t; 1 - 0{,}07465t) \textbf{ (16)}$$

$$S = \sqrt{(-2-x)^2 + (2-y)^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (2-y)^2}\ ;\ \begin{cases} x = 1 - 0{,}70710t \\ y = 1 - 0{,}07465t \end{cases} \textbf{ (17)}$$

Aplicando regla de la cadena y reemplazando las derivadas del segundo miembro, se tiene que:

$$\frac{dS}{dt} = \left[\frac{-2(x+2)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}}\right] \cdot (-0{,}70710) +$$

$$+ \left[\frac{-2(y-3)}{\sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2(2-y)}{\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}}\right] \cdot (-0{,}07465) \textbf{ (18)}$$

Luego, reemplazando "x" e "y" en función de t:

$$\frac{dS}{dt} = [\frac{-2(1-0{,}70710t+2)}{\sqrt{(-2-1+0{,}70710t)^2+(2-1+0{,}07465t)^2}} + \frac{2(1-0{,}70710t)}{\sqrt{(1-0{,}70710t)^2+(1-0{,}07465t)^2}} + \frac{-2(4-1+0{,}70710t)}{\sqrt{(4-1+0{,}70710t)^2+(2-1+0{,}07465t)^2}}] \cdot (-0{,}70710) +$$

$$+[\frac{-2(1-0{,}07465t-3)}{\sqrt{(-2-1+0{,}70710t)^2+(2-1+0{,}07465t)^2}} + \frac{2(1-0{,}07465t)}{\sqrt{(1-0{,}70710t)^2+(1-0{,}07465t)^2}} + \frac{-2(2-1+0{,}07465t)}{\sqrt{(4-1+0{,}70710t)^2+(2-1+0{,}07465t)^2}}] \cdot (-0{,}0746\,5) \quad \mathbf{(19)}$$

Para encontrar el mínimo, realizamos $\frac{ds}{dt} = 0$

Vemos que es muy difícil despejar "t" de la expresión anterior, por lo que recurrimos a Geogebra, sustituyendo "x" e "y" en S:

$$S = \sqrt{(-2-x)^2+(2-y)^2} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}; \quad \begin{cases} x = 1-0{,}70710t \\ y = 1-0{,}07465t \end{cases}$$

$$S_2 = \sqrt{[-2-(1-0.707\,t)]^2+[2-(1-0.074\,t)]^2} + \sqrt{(1-0.707\,t)^2+(1-0.074\,t)^2} + \sqrt{[4-(1-0.707\,t)]^2+[2-(1-0.074\,t)]^2}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$S_2 = \sqrt{(-3+0{,}707t)^2+(1+0.074\,t)^2} + \sqrt{(1-0.707\,t)^2+(1-0.074\,t)^2} + \sqrt{(3+0{,}707t)^2+(1+0{,}074t)^2}$$

Graficando en Geogebra:

$S_2(t) = \sqrt{(-3+0.707\,t)^2+(1+0.074\,t)^2} + \sqrt{(1-0.707\,t)^2+(1-0.074\,t)^2} + \sqrt{(3+0.707\,t)^2+(1+0.074\,t)^2}$

$B = \text{Extremo}(S_2, -16.043, 7.987)$

$\rightarrow (1.344,\ 7.328)$

$(x_2; y_2) = (1 - 0{,}70710t; 1 - 0{,}07465t)$

El mínimo se verifica en t = 1,344

La segunda aproximación es:

$(x_2; y_2)$ = (0,0496; 0,8997)

La suma de las distancias es:

$S2$ = 7,32810 Km

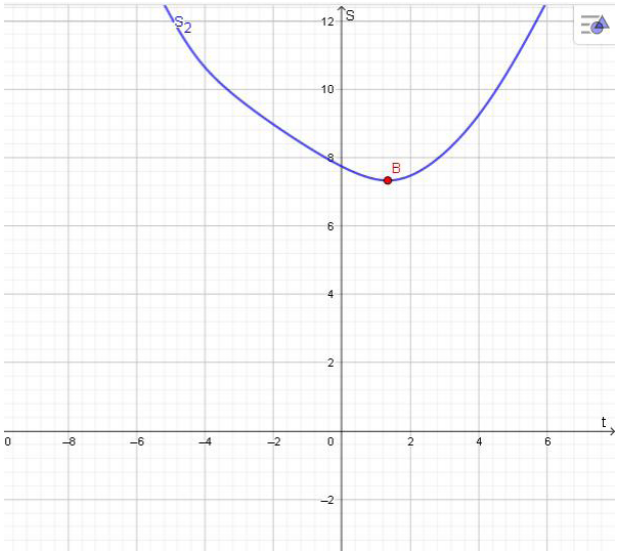


Fig. 4 Representación gráfica segunda estimación del punto crítico.

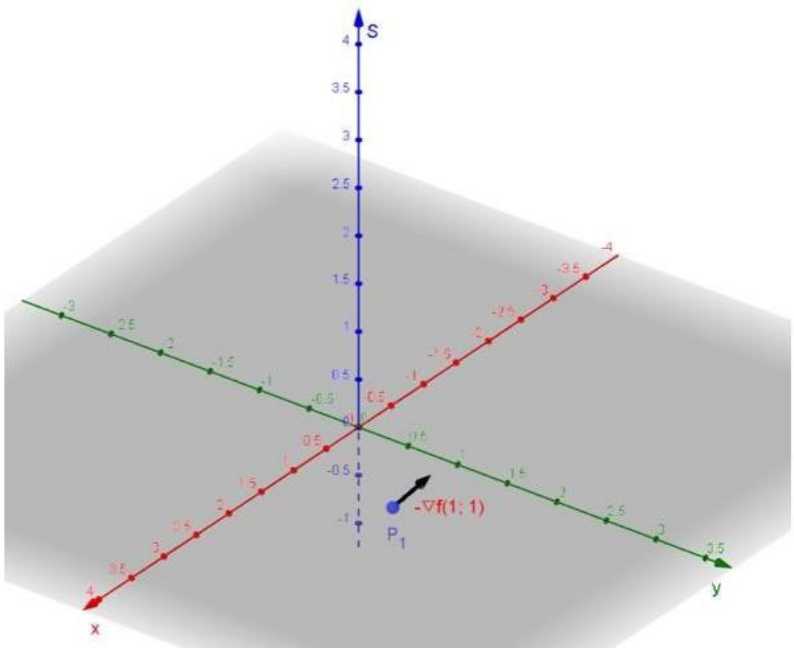


Fig. 5 Representación gráfica de la dirección del mínimo incremento de S.

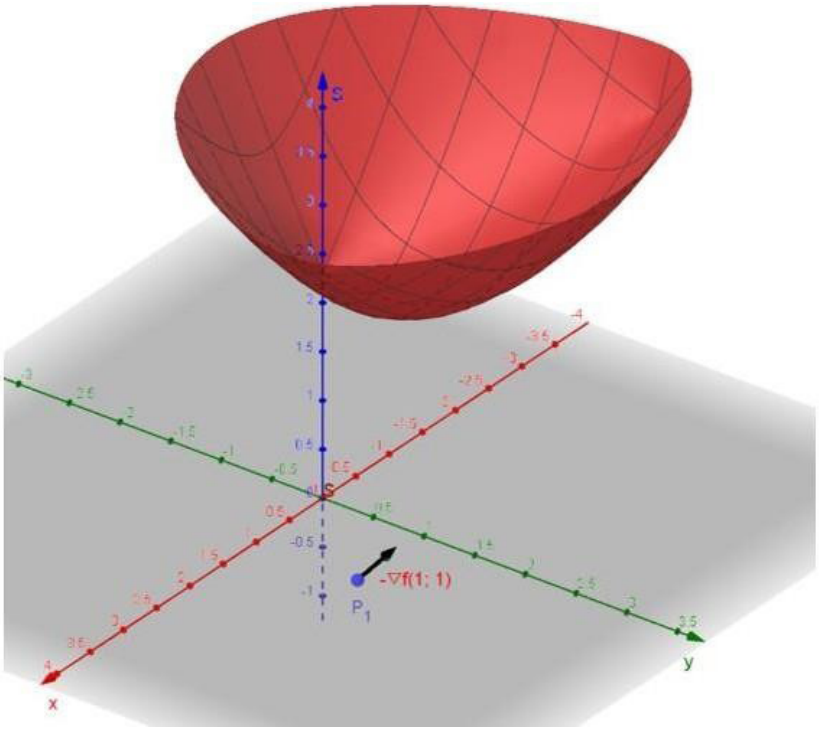


Fig. 6

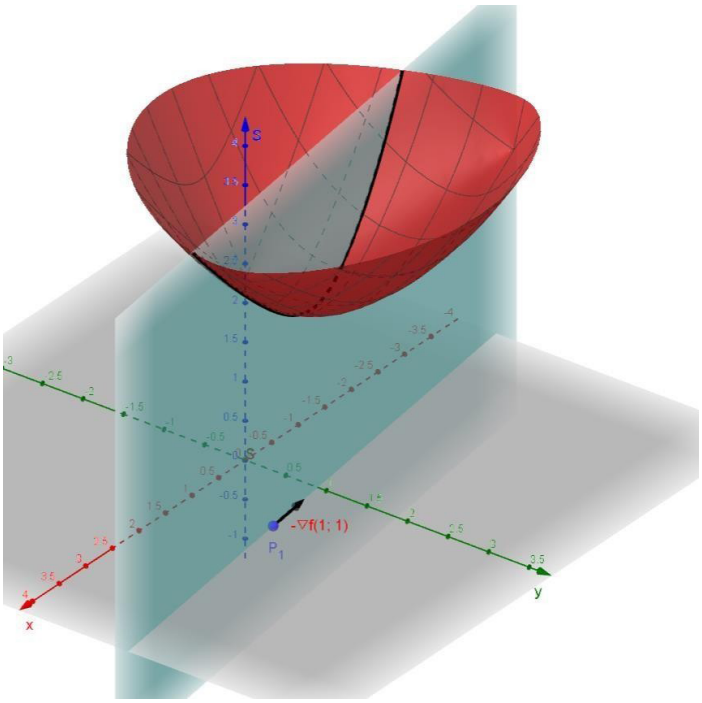


Fig. 7

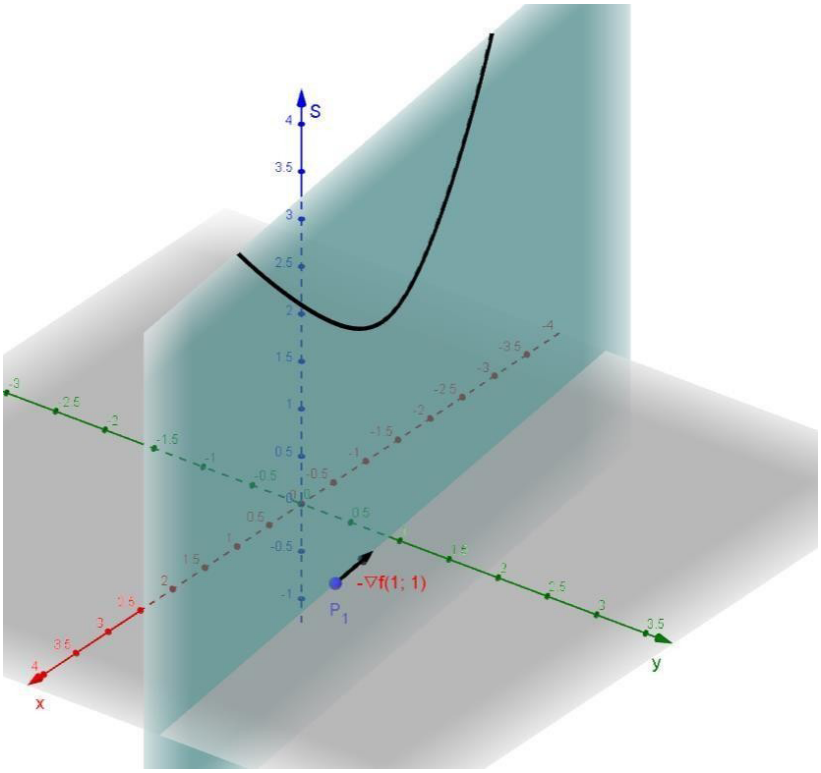


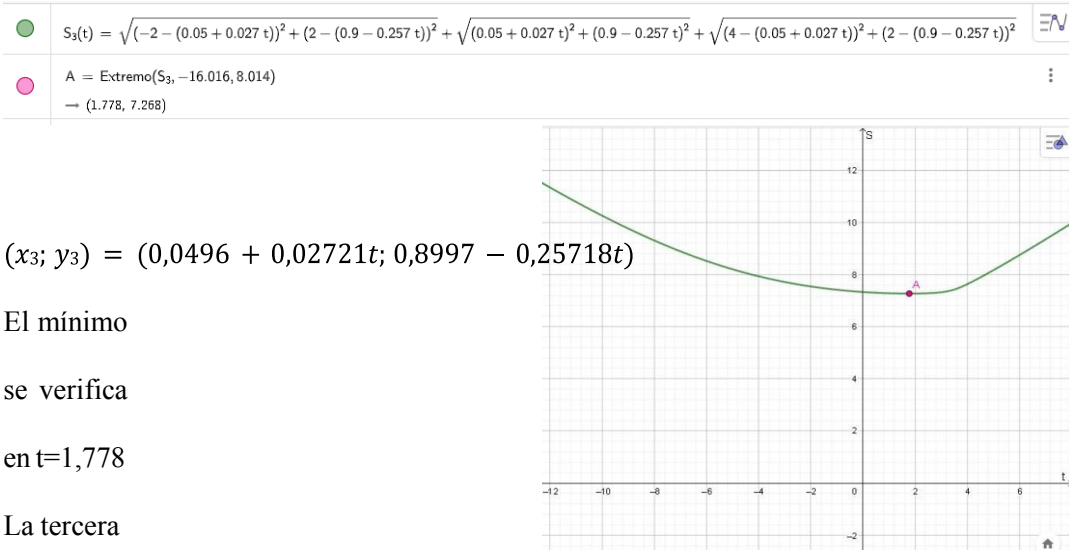
Fig. 8

2.5 Quinto Momento (20 minutos):

e) Realizar dos iteraciones más del proceso del inciso d) para obtener $(x4; y4)$. Dada esta localización del centro de distribución, ¿cuál es la suma de las distancias a las tiendas al menudeo?

Tercera aproximación [5]:

$(x_3; y_3) = (0{,}0496 + 0{,}02721t;\ 0{,}8997 - 0{,}25718t)$



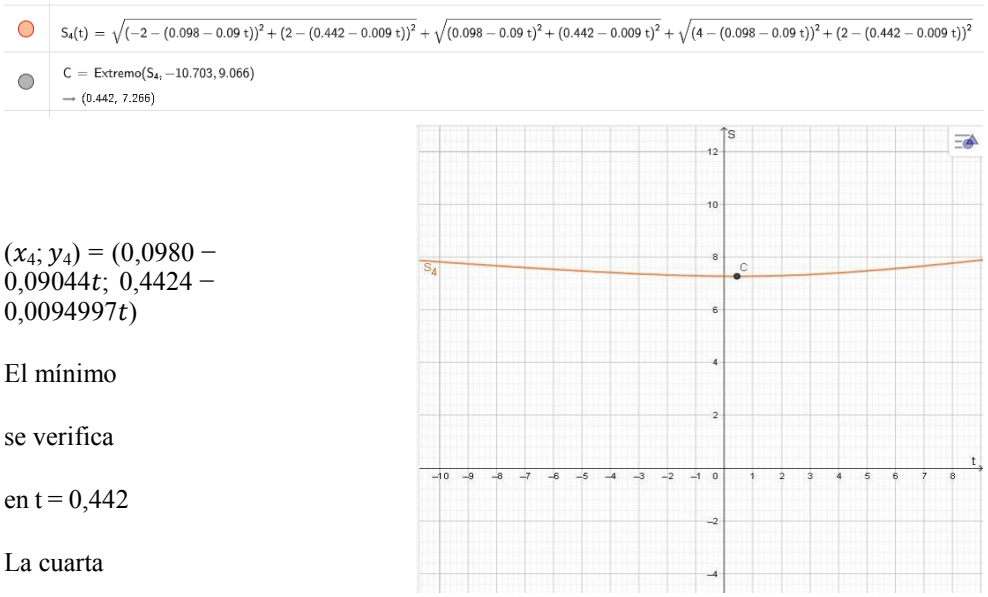
$(x_3; y_3) = (0{,}0496 + 0{,}02721t; 0{,}8997 - 0{,}25718t)$

El mínimo se verifica en t=1,778

La tercera

Fig. 9

Cuarta aproximación:
$(x_4; y_4) = (0.0980 - 0.09044834t;\ 0.4424 - .0094997t)$



$(x_4; y_4) = (0{,}0980 - 0{,}09044t;\ 0{,}4424 - 0{,}0094997t)$

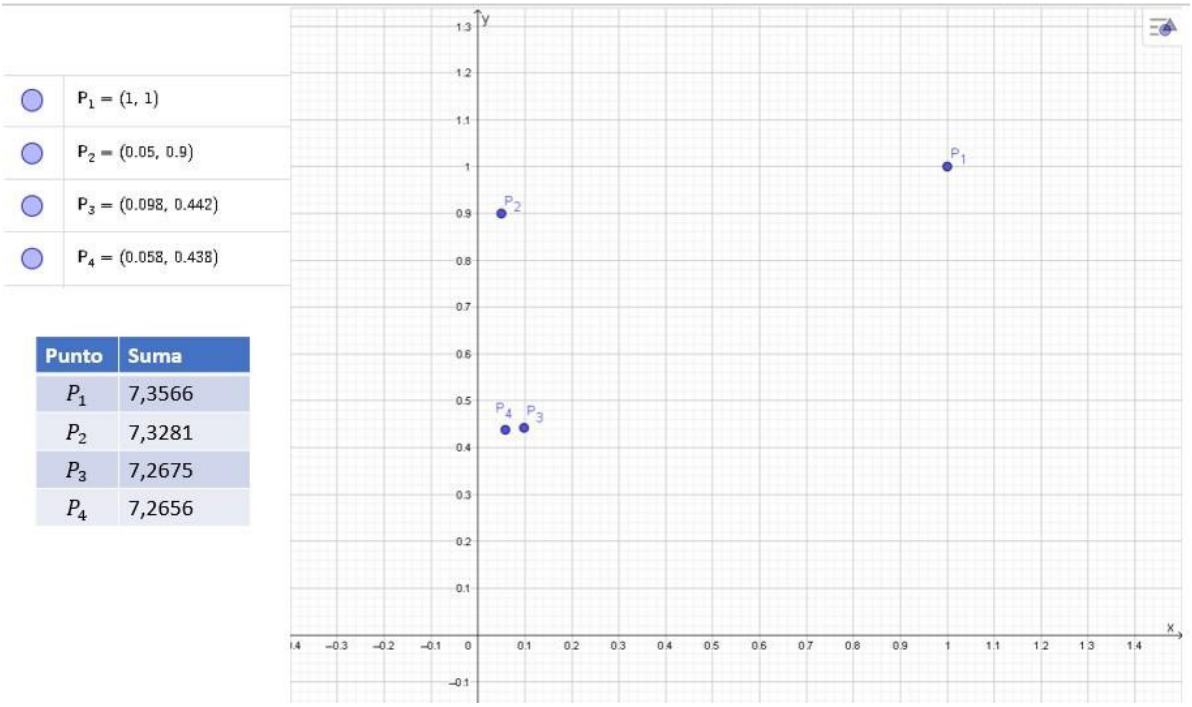
El mínimo

se verifica

en t = 0,442

La cuarta

Fig. 10



Punto	Suma
P_1	7,3566
P_2	7,3281
P_3	7,2675
P_4	7,2656

Fig. 11

2.6 Sexto Momento (20 minutos):

f) Explicar por qué se usó -∇S(x, y) para aproximar el valor mínimo de S. ¿En qué tipo de problemas se usaría ∇S(x, y)?

Porque la dirección de mínimo crecimiento de *f* está dada por $-\nabla(x, y)$. El valor mínimo de D_u *f(x,y)* es $-||\nabla$ kf(x, y)||

3 Conclusiones y trabajos futuros

La actividad que proponemos aporta otro método de determinación de extremos relativos, estableciendo una conexión vertical con la asignatura Informática, además que brinda al estudiante una estrategia diferente para abordar este tipo de problemas, mediante el cálculo aproximado e iterativo. El uso de la aplicación Geogebra aporta a la competencia que se refiere al uso de tecnologías, a estimular y promover la meta cognición y el análisis empírico. La aplicación de esta actividad se realizará en el próximo cursado, durante los meses de agosto a diciembre de 2022. Aplicando encuestas para determinar su impacto.

Durante el año 2023 realizaremos los avances de esta propuesta.

Así mismo, creemos que proponer este tipo de actividades en el aula propicia el desarrollo de competencias en losestudiantes, potenciando su autonomía y responsabilidad, permitiéndoles mantener un ritmo constante en una misma asignatura junto al resto del grupo de su clase. También les permite reconocer sus capacidades, la disposición, el ingenio o determinadas aptitudes yendo a su propio ritmo.

Referencias

1. Fernández, Azucena (16 de mayo de 2019). «Beneficios de la enseñanza basada en competencias». *blog eres mamá*. Consultado el 9 de septiembre de 2022.
2. Villa Sánchez, A (02 de abril 2020). Aprendizaje Basado en Competencias: desarrollo e implementación en el ámbito universitario. Revista de Docencia Universitaria Vol (18) enero – junio 20202. Pág. 19 - 46.
3. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería – CONFEDI (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en la República Argentina. "Libro rojo de CONFEDI"*. (Eds): Roberto Giordano Lerena; Sandra Cirimelo. Universidad FASTA.
4. Larson, R. Edwards, B. H. *Cálculo 2 de varias variables.* Novena edición. Mc Graw Hill 2010. Pág. 967[5]. John H Mathews, Kurtis D. Fink. *Métodos numéricos con Mathla.*

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

La Formación de Ingenieros desde una Nueva Perspectiva: Una Experiencia Piloto

Ferreyro, Mariano, Bouciguez, María Beatriz
Dpto. Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. del Valle 5737. 7400. Olavarría
{ferreyro, boucigue}@fio.unicen.edu.ar

Resumen. En este trabajo damos cuenta de una experiencia en la cual se trabajó con un problema en contexto real, buscando una alternativa didáctico-pedagógica que pudiera hacer frente a las demandas actuales profesionales vinculadas con la ingeniería. Se hizo hincapié en el desarrollo de competencias matemáticas profesionales tomando como referencia la propuesta de "Estándares de Segunda Generación" del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) y la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias" de Patricia Camarena Gallardo. A modo de cierre se presentan aspectos positivos y negativos de la experiencia con la intención de rediseñar la propuesta para futuras implementaciones en el aula con la totalidad de los estudiantes y de ser posible en articulación y correlación con otras asignaturas o disciplinas propias del diseño curricular pensado para la formación de ingenieros.

Palabras Clave: Estrategias de enseñanza, Problemas en contextos reales, Desarrollo de competencias.

1 Introducción

La actual formación del ingeniero requiere de la resolución de problemas, para ello es de suma importancia enfrentar gradualmente a los estudiantes a situaciones problemáticas en contextos ingenieriles desde los primeros años, lo que les permite, no solo, conocer, indagar y construir herramientas y/o heurísticas para una adecuada resolución sino también vincular los distintos espacios disciplinares en pos de favorecer la comprensión de los resultados parciales que se vayan generando.

Desde este lugar la matemática como campo disciplinar cumple un rol preponderante, por ello, es importante tener en cuenta que en profesiones donde la matemática no es una meta por sí misma se debe tender a una formación integral del estudiante y al desarrollo de competencias matemáticas de la profesión. En este sentido, desde la investigación, Patricia Camarena (2021) a través de la Teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias considera la matemática como una herramienta y materia formativa en profesiones en donde no se van a formar matemáticos, dado que permite pronosticar comportamientos, desarrollar un orden lógico mental para la profesión y la vida cotidiana, desarrollar habilidades de pensamiento, de argumentación, adquirir espíritu crítico, analítico y creativo. [1]

Asimismo, existen documentos oficiales emitidos por CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería), más precisamente, el Libro Rojo "Propuesta de Estándares de Segunda generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina" que nos provee un marco de referencia a partir de la definición de competencia.[2]

Por otra parte, el periodo excepcional que se vivió durante los años 2020 y 2021 con la irrupción de la pandemia de Covid, fomentó y profundizó el uso masivo de las tecnologías de la comunicación e información y promovió el trabajo colaborativo e investigativo de los docentes con colegas de otros países para pensar estrategias de intervención en nuestras aulas e incipientemente de internacionalización mediante actividades y experiencias de intercambio.

En este contexto se desarrolló en forma simultánea con docentes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones con sede en la ciudad de Oberá, de la Pontifícia Universidade Católica de São Paulo y el Instituto Mauá de Tecnologia, estas dos últimas instituciones de Brasil, una experiencia de puesta a punto de un problema en un contexto real y la resolución del mismo por estudiantes de las instituciones intervinientes.

Por todo esto, es que en este trabajo damos cuenta de la experiencia de implementación del problema con tres estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires con sede en la ciudad de Olavarría, analizando los conocimientos, habilidades, actitudes y valores puestos en juego, recopilando información sobre el uso de modelos utilizados para predecir comportamiento y la necesidad de la incorporación de softwares como así también la detección de obstáculos en el desarrollo del mismo.

2 Marco teórico

Para este trabajo tomamos como referencia constructos de la teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias (competencias matemáticas de la profesión, eventos contextualizados, modelos) la cual nace en el nivel universitario, específicamente en carreras de ingeniería donde la matemática no es una meta por sí misma, y del CONFEDI (resolución de problemas, competencias, enseñanza centrada en el estudiante).

2.1 Resolución de problemas

Los lineamientos del CONFEDI proponen pensar la formación del futuro ingeniero desde el eje de la profesión, lo que implica que debe convertirse en un resolutor de problemas lo más cercanos posible a la realidad. Sin embargo, no aclara qué se entiende por resolución de problemas. De modo que nos posicionamos en la postura de Camarena (2021) quien toma constructos de la línea de la Didáctica de la Matemática denominada, precisamente, "Resolución de Problemas". De esta perspectiva se le da un lugar protagónico a las estrategias heurísticas y metacognitivas que el estudiante pone en juego al momento de resolver un problema y aclara la necesidad de trabajar con eventos contextualizados (problemas, proyectos o estudios de caso) que se presenten en escenarios de la realidad del estudiante o de su futura profesión. [1]

Además, éstos deben causar un conflicto cognitivo en los estudiantes, incentivarlos e instarlos a continuar y su implementación debe ser gradual, dependiendo del grupo de estudiantes, de los contenidos abordados, del año que estén cursando, de la forma de trabajo que vienen desarrollando, entre otras.

2.2 Modelos

Para describir, analizar y explicar los eventos y/o problemas contextualizados se hace necesario desde la matemática la conformación de un modelo que represente parte de la realidad que se desea estudiar, considerando a la modelización como un puente entre las matemáticas y el mundo real. Para ello es necesario identificar variables y constantes, establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados ya sean del área de la matemática o del contexto, validar y contrastar dichos modelos con los datos de la realidad si es posible.

Como menciona Pochulu (2018), creemos que el incorporar la modelización matemática en la enseñanza acorta la brecha entre la labor y las demandas profesionales respecto de las actividades, estrategias y conocimientos que se ponen en juego en el aula. [3]

Es importante mencionar que un modelo matemático puede ser abordado desde diferentes registros de representación (Duval, 2006), es dinámico, en el sentido de que depende de las variables y relaciones que se quieran estudiar, de las limitaciones que tenga y de los ajustes que se puedan considerar. [4]

En líneas generales podemos decir que los problemas del mundo real vienen representados a través del lenguaje natural y a partir de ahí empezamos a representar los datos involucrados a través de los registros que consideramos más acordes para la situación planteada. En este sentido Duval señala que en el proceso de enseñanza lo importante no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos y agrega "la comprensión matemática requiere una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar" (Duval, 2006, p.16). [4]

2.3 Competencias

El concepto de competencia es un término que no tiene una única acepción, dado que hay varias interpretaciones. Sin embargo, en este trabajo, no nos pondremos a analizar las diferencias entre autores sobre el mismo, pero sí mencionar algunos puntos que tomamos para posicionarnos. Consideramos que para delimitar qué contenidos matemáticos abordar en carreras no matemáticas (ingeniería en nuestro caso) es necesario incursionar en las actividades profesionales para entender qué prácticas se ponen en juego. De manera que no le damos un estatus privilegiado al saber, sino que el saber-hacer y el saber-ser son considerados con la misma jerarquía e importancia.

Desde este lugar, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) sostiene y suma la importancia de pensar la formación de los ingenieros desde el eje de la profesión y afirma: "el mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la universidad; no sólo exige la formación profesional (el "saber"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer")" (CONFEDI, 2014. p.9). [5]

En esta misma línea Camarena (2021) menciona:

El término competencias se utiliza para referir a la capacidad de hacer con saber y con conciencia acerca de las consecuencias de ese hacer. Toda competencia involucra al mismo tiempo conocimientos, modos de hacer, valores y responsabilidades por los resultados de lo hecho. (p.99) [1]

En ese sentido, distingue la formación de competencias matemáticas considerando a la matemática como una asignatura aislada, sólo trabajando problemáticas intramatemáticas sin tener conexión con las otras disciplinas (como la física o la química en el caso de las ciencias básicas) de aquellas insertas en la profesión en un marco de construcción de saberes integrados (Camarena, 2021). [1]

En consecuencia, proponemos repensar la formación de los ingenieros desde el eje de la profesión, para lo cual es necesario trascender los procesos de enseñanza y aprendizaje generalmente centrada en contenidos, y llevar a cabo acciones que favorezcan el desarrollo de competencias profesionales las cuales deben incluir cuatro componentes integrados: conocimientos, habilidades, actitudes y valores que deben ser abordados y desarrollados a través de la propuesta de trabajo del docente.

2.4 Tecnologías

Actualmente, el uso de las tecnologías digitales aporta indiscutiblemente valiosas herramientas educativas traspasando los límites del aula, generando nuevos modos de intervención y nuevas didácticas; en resumen, pueden complementar, enriquecer y transformar la educación.

Debemos distinguir las tecnologías educativas de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación, en el primer caso entendidas como el diseño de recursos tecnológicos para el proceso de enseñanza y aprendizaje y en el segundo referido al uso adecuado de las múltiples tecnologías como herramientas en el proceso de enseñanza. En un caso como objeto de conocimiento y en el otro como herramienta didáctica.

En la formación de ingenieros al igual que en tantas otras profesiones es importante el uso de la tecnología con los estudiantes, ya sea para que aprendan a usarla, para que los apoye en su trabajo o para que sea una mediadora de su aprendizaje, razón por la cual como docentes se nos plantea la cuestión de la inclusión significativa de la tecnología en los espacios de enseñanza.

Antes de la irrupción de la pandemia que azotó al planeta durante 2020 y 2021, el porcentaje de docentes que hacía uso de la tecnología electrónica en general era bajo, es más, decíamos que los docentes usan didácticas del siglo XIX, siendo profesores del siglo XX y con alumnos con mentalidad del siglo XXI; habría que emparejar esta disparidad para beneficio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los estudiantes (Camarena, 2021). [1]

Actualmente, el debate pasa por la construcción de instrumentos confiables que permitan medir el impacto de estas nuevas prácticas, analizando qué recursos, qué metodologías y qué modalidad se ajusta mejor en el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

3 La experiencia

En este trabajo presentamos una experiencia piloto desarrollada con tres estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, que se hallaban cursando Análisis Matemático II (cálculo en dos o más variables reales) y Física I al momento de implementar esta prueba,

segundo semestre de 2021. Cabe aclarar, que los estudiantes se ofrecieron voluntariamente.

Se trata de un problema que se presenta en el artículo de Salomón Rebollo-Perdomo titulado "Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19", el cual fue readecuado y adaptado para su aplicación en Argentina. [6]

Inicialmente se presenta la problemática del contagio de esta enfermedad en una fiesta con un número pequeño de invitados y en un lapso de pocas horas, a partir de allí se insta a los estudiantes a generar un modelo matemático de esa situación que permita estimar el número de infectados al finalizar la reunión. En las siguientes cuestiones se utilizan datos oficiales a nivel país del número de infectados entre junio y julio 2020 para analizar la eficacia de ese modelo al estimar el número de personas contagiadas días después y comparar los números obtenidos con los reales, y así debatir sobre las variables utilizadas y las que serían posibles incorporar para mejorarlo. Se propone considerar el porcentaje de confinamiento estudiando su comportamiento como una función logística y luego el efecto que produce su inclusión en la ecuación diferencial inicialmente planteada en el problema. En este punto surgió una dificultad dado que no se encontraron, en páginas web oficiales, datos concretos de porcentajes de confinamiento en Argentina, razón por la cual se debió simular la situación. Finalmente, se presentaron cuestiones donde los estudiantes debían contrastar los datos obtenidos a través de los dos modelos frente a los reales y argumentar sobre las posibles causas por las cuales los mismos fallan a largo plazo.

Respecto de las cuatro componentes de las competencias se consideraron trabajar los conocimientos sobre proporcionalidad directa, tasas de variación promedio, funciones y una idea incipiente de ecuaciones diferenciales; las habilidades relacionadas con la resolución de problemas contextualizados, la utilización conveniente de los distintos registros de representación, la modelización matemática, el uso de softwares, la comunicación, el saber escuchar, la argumentación, el trabajo colaborativo; las actitudes como el respeto, el compromiso con la experiencia y la tolerancia por las opiniones y propuestas de los compañeros, y valores tales como la honestidad, la responsabilidad y la colaboración.

Cabe mencionar, que el cierre de la experiencia consistió en la presentación de la misma por parte de los estudiantes involucrados a sus compañeros del curso de Análisis Matemático II, comentando no solo los aprendizajes vinculados a la realización de un problema contextualizado, la eficiencia de los modelos matemáticos utilizados, los obstáculos sorteados sino también los aspectos positivos y negativos de la misma.

3.1 Desarrollo de la experiencia

Esta experiencia piloto se desarrolló entre los meses de octubre y noviembre de 2021 en modalidad virtual utilizando la plataforma Zoom de videoconferencia, participando los docentes para monitorear los avances y realizar aclaraciones que se consideraban necesarias, grabándose cada encuentro a fin de utilizar luego este material para la readecuación del problema y posterior implementación en forma conjunta con estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones con sede en la ciudad de Oberá, de la Pontificia Universidade Católica de São Paulo y el Instituto Mauá de Tecnologia, éstas dos últimas instituciones de Brasil.

Los estudiantes que participaron previamente habían cursado y aprobado las asignaturas Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica. En el transcurso de la propuesta recuperaron de estas asignaturas las nociones de funciones (relación entre variables desde los registros tabular, gráfico y simbólico), tasa de crecimiento (cociente incremental y derivada) y combinatoria (diagrama de árbol).

En la primera cuestión del problema referida al número de contagios del virus SARS Cov-2 en el contexto de una fiesta con un número pequeño de invitados y en un lapso de pocas horas, presentados en una tabla, los estudiantes no sintieron la necesidad de encontrar una expresión matemática que vinculara las variables, dado que les resultaba suficiente analizar la regularidad de los datos que observan en dicha tabla. No se discute lo referido a la tasa de crecimiento. los jóvenes detectan que hay una cuestión de variación y de derivada, pero no encuentran la necesidad de utilizar ese objeto matemático. Conversan y acuerdan que las variables involucradas son discretas.

Posteriormente, al comenzar el trabajo con los números oficiales de infectados por la enfermedad en Argentina, dada la cantidad de datos resulta insuficiente lo abordado en la cuestión de la fiesta. Surge allí un interesante debate al considerar cómo utilizar la tasa de crecimiento de la enfermedad y la constante de proporcionalidad que involucra la ley que la modeliza, para luego obtener información sobre la cantidad de contagios esperados para los siguientes días.

A partir del seguimiento docente y observando que los estudiantes realizaban cálculos en lápiz y papel se hizo una intervención para promover el uso del software Excel y así, sistematizar y hacer más rápidamente los cálculos necesarios.

Resuelta esta situación, los estudiantes debatieron y argumentaron sobre el uso del modelo para predecir el número de personas infectadas a corto tiempo, pero su fallo a largo plazo, utilizando para sus argumentaciones una

tabla de Excel y un gráfico "cantidad de infectados vs. tiempo", llegando a la conclusión que el modelo utilizado consideraba que todas las personas no infectadas interactuaban con todas las personas infectadas.

Las cuestiones que se abordaron en el siguiente encuentro introdujeron como nueva variable, la función confinamiento. Con intervención de los docentes se analizó que cuanto más cerca de 1 estuviese la imagen de dicha función significaba que la "gente no estaba interactuando", es decir, casi toda la población del país estaba aislada razón por la cual el valor 1 no se alcanzaría en ningún momento al considerar los denominados "agentes esenciales".

Luego a partir de una situación ideal de confinamiento progresivo se busca la expresión matemática de dicha función, en ese punto se produce un fructífero debate respecto de la función que puede modelizar esa poca cantidad de datos. Utilizando el graficador GeoGebra ingresaron los puntos y obtuvieron la gráfica "confinamiento vs. tiempo". La búsqueda de la función se realizó mediante la opción "ajuste" y el análisis del "r-cuadrado" que marca el grado de desviación del modelo respecto de los datos originales. En esta instancia se realizó una intervención dado que el modelo que mejor ajustaba esos datos es el exponencial, allí se solicitó vincular estos resultados a la discusión que habían realizado respecto del máximo valor que podía alcanzar el confinamiento, analizando que a largo plazo se produce un "amesetamiento" (como forma de expresar que la curva se hace asintótica a una recta horizontal representada por el máximo confinamiento) de la curva. Así llegan a la función logística que luego utilizaron correctamente para el caso del confinamiento en Argentina frente a las medidas del Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio (ASPO) utilizando ecuaciones para el cálculo de las constantes de la función que modelizaba esta situación.

Las cuestiones finales consistieron en reformular el modelo original para predecir el número de infectados en distintas fechas incluyendo la función confinamiento.

Finalmente, se contrastaron los gráficos de los modelos sin y con confinamiento frente al real según datos oficiales. Este debate no presentó grandes inconvenientes para los estudiantes quienes concluyeron que los modelos obtenidos fallan a largo plazo y que el modelo con confinamiento es menos confiable que el modelo sin contemplar el confinamiento.

3.2 Obstáculos detectados

Para hablar de las dificultades detectadas en el transcurso de la prueba piloto tomamos la clasificación que propone Camarena: obstáculos cognitivos, epistemológicos, ontogénicos, didácticos, contextuales.

Los obstáculos cognitivos hacen referencia a los conocimientos previos del estudiante que puedan servir de anclaje para resolver la situación problemática. En el caso de esta experiencia dichos obstáculos fueron:

- Los conceptos de proporcionalidad directa y tasa de variación: si bien eran términos que les resultaban familiares y tenían una idea vaga de que se trataba, no contaban con la claridad suficiente para considerarlos en la resolución del problema. Esta situación hizo que la resolución de las primeras cuestiones demandó más tiempo del planificado dado que se presentaron dificultades en el pasaje del lenguaje natural al lenguaje simbólico debido a que no podían traducir la ley epidemiológica que se indicaba como modelo. La intervención docente en este momento fue incentivarlos a que busquen en la red lo que no se acordaban pensando en fomentar el aprendizaje autónomo, situación que resultó favorable para toda la propuesta, pues a partir de ese momento se apropiaron de esta estrategia y se independizaron notablemente de los docentes.
- Desconocimiento de la función logística: No conocían la función logística porque no la habían abordado en el nivel precedente, en el programa de ingreso, ni tampoco en las primeras asignaturas de la universidad. De todas maneras, al trabajar con la función "ajuste" de GeoGebra aparecía dicho modelo pero temían utilizarlo porque les resultaba desconocido. Luego en la discusión entre todos (docentes y estudiantes) evaluaron cada uno de los modelos de ajuste proporcionados por GeoGebra y los mismos estudiantes se dieron cuenta que el logístico era el modelo que mejor representaba la situación problemática planteada y vivida por ellos mismos.
- Uso de software para ajustes de datos, tratamiento adecuado de una lista de datos y resolución de ecuaciones con coeficientes irracionales: los estudiantes no estaban acostumbrados a resolver situaciones problemáticas con el uso de software, lo cual complejizó la resolución de las primeras cuestiones, pues con lápiz y papel además de tedioso resulta poco operativo. Necesitan conocer con profundidad varios conceptos matemáticos (modelos funcionales, resolución de complejas ecuaciones, tratamiento minucioso del error, resolución de extensos cálculos en los que intervienen números irracionales, entre otras), disponer de mucho más tiempo y ser sumamente cuidadoso al considerar márgenes de error aceptables. Por otra parte, se estaría desaprovechando la potencialidad de los recursos tecnológicos con los que se cuenta y que son utilizados en el campo laboral ingenieril.

Los obstáculos ontogénicos son aquellos que son inherentes a las características físicas y hereditarias del estu-

diante. No hubo en el caso de esta experiencia.

Los obstáculos didácticos son los que provoca el profesor en el proceso de enseñanza. En el caso de esta experiencia dichos obstáculos fueron:

- Resolución de problemas contextualizados: En línea general no habían trabajado en las clases con este tipo de problemas abiertos en donde se ve la necesidad de construir un modelo en el que interactúan distintas variables. En el mejor de los casos se les da a los estudiantes algún problema de la realidad forzada, en el que tienen que encontrar un modelo utilizando los contenidos específicos de determinado bloque donde luego se les proponen problemas similares para que repliquen estrategias a modo ejercicio.

Los obstáculos contextuales son los que se generan cuando al resolver un evento contextualizado el estudiante no cuenta con los conocimientos suficientes del contexto, lo que impide que pueda resolverlo. Para el caso de esta experiencia no surgieron obstáculos de esta índole, pues el problema se refería al contexto de vida que los estudiantes estaban atravesando y que tenía impacto mundial.

Los obstáculos epistemológicos es un fenómeno que se da de forma natural en los estudiantes en el proceso de aprendizaje al pasar por las etapas que pasó la humanidad al desarrollar un concepto científico. En el caso de nuestra experiencia teníamos en claro que el "no" uso de la tecnología para resolver situaciones en contextos reales derivaría en un obstáculo, razón por la cual nos tomamos un tiempo (luego de que lo estudiantes intentarán resolver las cuestiones con lápiz y papel) para explicarles el uso de GeoGebra y Excel. Entendiendo que la construcción de modelos científicos (actuales) desde datos experimentales no es posible sin el uso de la tecnología.

Consideramos que en ocasiones necesitamos intervenir de una manera un tanto más tradicional para evitar que un obstáculo epistemológico se convierta en un obstáculo cognitivo y esto provoque que los estudiantes no puedan avanzar con la resolución del problema.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Esta experiencia ha permitido implementar una actividad extracurricular donde se promovió el desarrollo de competencias a través de la resolución de un problema en un contexto real para los estudiantes y acorde a su campo profesional donde pusieron en juego diversas estrategias, trabajaron en distintos registros de representación y construyeron modelos apropiados a la resolución del problema.

En un primer momento los estudiantes se sintieron un tanto incómodos con la forma de trabajo propuesta por no estar acostumbrados a trabajar de esta manera en el desarrollo de las asignaturas cursadas hasta el momento. Sin embargo a medida que avanzaron los encuentros se fueron apropiando de estrategias propias del trabajo en equipo colaborativo (realizando aportes individuales y proponiendo instancias de debate sobre las potenciales resoluciones, realizando división de tareas y trabajando de manera cooperativa), del aprendizaje autónomo (buscando en la red conceptos matemáticos y no matemáticos que no se acordaban o desconocían), de comunicación (escribiendo una narrativa argumentativa respecto de la resolución de cada cuestión a partir del uso de distintos registros de representación y la comunicación oral de la experiencia), de modelización (buscando modelos y adaptándolos bajo las necesidades y requerimientos de las cuestiones a resolver, entendiendo que los modelos son representaciones de una realidad recortada pero que no son la realidad misma), de los recursos tecnológicos optimizando tiempos, ordenando y aclarando las posibles resoluciones y teniendo mayor claridad en los distintos registros de representación utilizados (Word, Excel, PowerPoint y GeoGebra), argumentando sus posiciones y respetando la opinión de los compañeros.

Como docentes nos queda pendiente la incorporación, en nuestras prácticas áulicas, de este tipo problemas en contextos reales que habiliten un aprendizaje centrado en el estudiante siendo el docente un guía en la actividad del alumno y donde los contenidos matemáticos abordados se tiñan de sentido y el desarrollo de competencias se haga presente pensando en una formación integral del estudiante.

Asimismo, consideramos importante generar puentes de articulación o instancias de debate y consensos con el nivel educativo anterior o eventualmente en los programas de ingreso o en las primeras asignaturas a efectos de acordar cuestiones metodológicas y de contenidos, tales como constantes de proporcionalidad y tasas promedios que se tornaron en obstáculos en la lectura de la consigna y en el avance de la resolución del problema.

Otra cuestión a tener en cuenta tiene que ver con la necesidad de promover desde nuestras prácticas el uso de software y graficadores para realizar el tratamiento de un número importante de datos y para la estimación de comportamientos funcionales de los mismos a través del ajuste y de la selección de la función más conveniente a partir del contexto del problema.

Más allá que la experiencia se haya realizado en el contexto de pandemia, nos permite pensar que es posible aprovechar el potencial de la virtualidad para proyectar a futuro este tipo de experiencias con estudiantes de otros países y de ese modo contribuir a la formación de un ingeniero con un perfil internacional que pueda comunicarse con pares, que sean creativos, críticos, colaboradores, capaces de moverse en entornos multiculturales, resolver problemas, trabajar en línea, manejar diversas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), entre otras.

Agradecimientos. A Juan Pedro Boggi, Genaro Ferreyra y Bernardo Strupp estudiantes de la FIO por participar de esta experiencia y permitirnos analizar y pensar nuevas estrategias didácticas y metodológicas para incluir en nuestras prácticas. A los doctores Barbara Lutaif Bianchini y Gabriel Loureiro de Lima de la Pontificia Universidade de Sao Paulo y a la Dra. Eloiza Gomes del Instituto de Tecnologia Mauá por habernos invitado a transitar esta interesante experiencia para mejorar la formación de nuestros futuros ingenieros.

Referencias

1. Camarena Gallardo, P. Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. Editado por Nori Esther Cheeín; Marys Margarita Arlettaz. 1a ed. EDUNSE. Santiago del Estero. Libro digital, PDF - ISBN 978-987-4456-24-3. (2021)
2. CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina - Libro rojo de CONFEDI. Recuperado de https://confedi.org.ar/librorojo/ (2018). Accedido el 15 de mayo de 2022.
3. Pochulu, M. La Modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones. GIDED. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/323995028_La_Modelizacion_Matematica_Marco_de_referencia_y_aplicaciones. (2018). Accedido el 15 de mayo de 2022.
4. Duval, R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME.* Vol. 9, No. 1, pp. 143-168 (2006)
5. CONFEDI. Competencias en ingeniería. Universidad FASTA. (2014)
6. Rebollo-Perdomo, S. Un modelo simple para el número de infectados por Covid-19. MATerialsMAThematics Volumen, pp 1, 12. ISSN: 1887-1097 Publicación electrónica de divulgación del Departamento de Matemáticas de la Universitat Autónoma de Barcelona – Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/matmat/matmat_a2020/matmat_a2020a1.pdf. (2018). Accedido el 10 de abril de 2021.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Modelos Matemáticos con Ecuaciones Diferenciales. Tecnología y Formación en Competencias

S. Vaira[1], E. Haye[2], L. Taborda[1,3]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas, Universidad Nacional del Litoral
Ciudad Universitaria, Santa Fe
stella.vaira@gmail.com
[2]Departamento de Formación Básica, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Ciudad Universitaria, Santa Fe
ehaye@fich.unl.edu.ar
[3]Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos
Taborda.lb@gmail.com

Resumen. Los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias abarcan temas que involucran la Modelización Matemática (MM). Las ventajas al trabajar con la MM, que se destacan son: integración de la matemática con otras áreas, mejoría en la aprehensión de conceptos y habilidad en el uso de la tecnología. Una enseñanza basada en la modelización que involucra a la tecnología trae como consecuencia un aprendizaje significativo y funcional. La presente investigación está centrada en la creación de "seminarios" como ambientes de trabajo para estudiantes de asignaturas afines, enriquecidos con el uso de tecnología para fortalecer las competencias de modelado. La realización de estos seminarios resultó muy positiva en cuanto a la participación activa y al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales a través de la modelación matemática, viéndose cumplir dos objetivos: que los estudiantes comprendan conceptos y combinen competencias de aprendizaje revalorizando la construcción de diferentes escenarios con tecnología.

Palabras Clave: Modelos matemáticos, Ecuaciones diferenciales, Tecnología, Competencias, Educación matemática.

1 Introducción

En diversos currículos de estudios universitarios, tanto en ingenierías como en carreras que combinan la tecnología con la genética, biología y química, uno de los objetivos que se mencionan, es que el futuro profesional sea capaz de modelar matemáticamente problemas de su actividad laboral, por lo que, como expresa Camarena en [1], la Modelización Matemática (MM) es un tema de suma importancia y pertinencia para su estudio. Por ejemplo, esta autora en su investigación, determina los conceptos de modelo matemático y del proceso de modelación matemática, analizando los elementos cognitivos y las habilidades del pensamiento que son necesarias para poder llevar la MM al ambiente de aprendizaje y propone una estrategia didáctica, denominada *Matemática en Contexto*, para desarrollar las competencias vinculadas.

Desde los cursos básicos de Cálculo y Álgebra hasta los de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) que se ofrecen en las distintas carreras universitarias, contienen temas que involucran la Modelización Matemática.

Coincidimos que, en una sociedad altamente tecnológica, desarrollar y fortalecer las competencias para establecer, analizar y simular; describir y explicar la MM son de crucial importancia para el estudiante actual [2].

Es importante brindar un espacio para analizar situaciones problemáticas en contexto, es decir, una enseñanza

de la matemática donde los modelos forman el eje fundamental para desarrollar habilidades y competencias de resolución de problemas- sin sacrificar la modelación matemática- utilizando las EDO para describir fenómenos que ocurren en la naturaleza asociados con la física, la economía, la demografía, la ecología, entre muchas otras áreas. En esa búsqueda de un espacio rico para la MM, se requiere vincular la actividad académica con la profesional, ya que las carreras involucradas requieren de disciplinas que utilizan sistemas físicos, biológicos, organismos vivos o sus derivados para la creación de productos o procesos que buscan generar soluciones al hombre y al medio ambiente.

Por otro lado, Brito en [3] menciona algunas ventajas al trabajar con la MM, entre ellas destacamos: la integración de la matemática con otras áreas de conocimiento, la mejoría en la aprehensión de conceptos matemáticos, la habilidad en el uso de la tecnología. Una enseñanza basada en la modelización que involucra a la tecnología trae como consecuencia un aprendizaje significativo y funcional.

La incorporación de nuevas tecnologías en todo el proceso educativo, especialmente para la enseñanza de la matemática, se ha convertido en un recurso para potenciar los aprendizajes. Existen estudios que permiten entender mejor el modo en el que las herramientas computacionales modifican los procesos cognitivos. En particular, la tecnología puede favorecer el diseño de actividades donde las competencias de modelación pueden ser eventualmente desarrolladas y que se propicie un aprendizaje significativo de las ED en tanto objeto matemático, así como herramienta para modelar fenómenos varios. Se puede ver [4] como ejemplo.

En la actualidad, con la gran cantidad de recursos multimedia que existen, los softwares y los programas de simulación permiten crear escenarios o ambientes con muchas posibilidades pedagógicas de exploración, de representaciones, interactividad y formas de manipulación virtual lo que mejora el proceso de aprendizaje de los estudiantes, ya que pueden observar distintos comportamientos de los procesos, indagar tendencias, manipular variables, predecir y alterar situaciones, confrontar concepciones, dilucidar alternativas de resolución, entre otras.

El proceso de virtualización ha requerido de un análisis y reflexión sobre los objetivos de aprendizaje y las prácticas de enseñanza, donde las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) atraviesan las discusiones sobre las posibilidades, oportunidades y dificultades. Además, ha sido necesario profundizar el análisis sobre el contexto de la institución educativa (en cuanto a los recursos de los que disponíamos) como de los estudiantes (usuarios y beneficiarios de la tecnología), identificando aquellos recursos y materiales educativos existentes e indagando cómo diseñar una propuesta de enseñanza de calidad.

La presente investigación está centrada en una estrategia que demuestra año tras año su efectividad para el aprendizaje de la matemática a través de sus aplicaciones: la modelación matemática. En su acepción como estrategia didáctica, la modelación matemática surge como un medio que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto.[1]

1.1 Estado del arte de la Modelización Matemática

En la era del conocimiento, la tecnología y la globalización, se revisan las políticas educativas; y entre estas políticas se encuentra la educación por competencias, donde se pretende la formación de profesionales competentes para incorporarse a la planta productiva del país de forma efectiva y con ello contribuir al desarrollo nacional, al desarrollo del conocimiento tecnológico y científico, así como a una formación integral para la vida [2].

En esa misma línea de investigación concebimos la Modelización Matemática (MM) en los programas de estudio de carreras que combinan matemática, tecnología y necesitan de competencias profesionales para resolver problemas. La MM se presta como un instrumento de investigación y una estrategia didáctica.

Asimismo, en el contexto de la enseñanza de la matemática, resulta indispensable explorar procedimientos y metodologías que enriquezcan la docencia y el aprendizaje. La MM ha demostrado funcionar eficazmente como estrategia de aprendizaje e instrumento para acceder a nuevos saberes. No se deja de plantear, sin embargo, las condiciones que se requieren para aplicar la MM en las diversas asignaturas, ni los obstáculos que a veces deben vencerse para poder llevarla al aula [4].

Por lo cual, dar a la modelación un lugar primordial, tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería contradictorio, con la génesis histórica de la matemática y sus aplicaciones actuales, presentar la modelación como algo cerrado, completo y alejado de la realidad. La modelación promueve el significado y la comprensión en matemática; además, cuando se presenta mediante problemas planteados en un contexto del mundo real, fomenta que los estudiantes formulen preguntas sobre el contexto y piensen en la utilidad de sus conocimientos matemáticos [5] y [6].

1 Proyecto de investigación. Curso de Acción para la Investigación y Desarrollo (CAI+D): "Los entornos virtuales de aprendizaje y sus usos en la universidad. Enseñanza de la matemática en contexto", 2020-2023.

En nuestra investigación, consideramos al aprendizaje de la matemática como un proceso donde se encuentra sentido a las relaciones, se separan y se analizan para discutir sus conexiones con otras áreas, se cambia la estrategia de enseñanza y se muestra a los estudiantes una matemática conectada a la realidad, mediante la presentación de situaciones donde se fomente la expresión de ideas y confrontación de procedimientos. La implementación de esta estrategia ha demostrado, entre otras cosas, el desarrollo de competencias matemáticas y propias de la modelación matemática [4], así como la promoción de un mayor interés hacia los contenidos propios de las asignaturas de matemática [7].

Convencidos sobre la importancia de fortalecer la enseñanza de las EDO a través de la modelación matemática, se pueden cumplir dos objetivos generales importantes. Por un lado, que los estudiantes comprendan cómo se originaron muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones intra y extra matemáticas y; por otro lado, logren combinar competencias de aprendizaje revalorizando la exploración, la visualización, la simulación de diferentes escenarios para el mismo problema a partir del uso de la tecnología.

Hay muchos enfoques de modelado, y si bien en este trabajo nos ocuparemos del modelado matemático con ecuaciones diferenciales, una combinación puede proporcionar una mejor comprensión. Describimos brevemente el modelo de simulación y el modelo determinístico, según [8]:

Modelos de simulación: son procesos dinámicos, lo invisible se hace visible; y múltiples representaciones están vinculadas y disponibles para el debate y la conjeturas de hipótesis; la retroalimentación está disponible en forma inmediata proporcionada por los cambios visuales a medida que los estudiantes exploran. Este enfoque permite que las tareas sean menos dirigidas y utilizar más conceptos abiertos a preguntas.

Modelo determinista o continuo: se formulan ecuaciones matemáticas que describen las relaciones fundamentales básicas entre las variables del problema. Por ejemplo, en el modelo de población, nuestro objetivo sería obtener una ecuación que relacione las tasas de natalidad y mortalidad, que a su vez se relacionan mediante ecuaciones y, con el tamaño de la población en un momento dado de tiempo, se contempla la aparición de parámetros no conocidos o no definidos inicialmente.

Por lo expuesto, como docentes-investigadores señalamos que la enseñanza de la modelación abrió una excelente oportunidad para revisar las prácticas educativas, interpelando el trabajo hacia mejorar objetivos de aprendizaje que contemplen las competencias profesionales a través de la MM.

2 Ambiente enriquecido por tecnología para fortalecer las competencias en modelado

Surge la necesidad de apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje en la formación de futuros profesionales, como los estudiantes universitarios, por medio de herramientas computacionales que permitan no sólo el desarrollo y fortalecimiento de competencias como conceptual, operativa y modelativa, sino también la adquisición de habilidades para identificar la forma de representación más conveniente para solucionar un problema planteado, bien sea de forma verbal, computacional, diagramática o algebraica. La modelación matemática tiene su génesis precisamente en el establecimiento de una relación dicotómica entre la matemática y el estudio de sus aplicaciones. La comunidad de Matemática Educativa ha analizado a la modelación desde seis perspectivas: realística, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica y cognitiva [9]. El presente trabajo se consolida en la perspectiva educativa.

2.1 Ambiente de trabajo

Los contenidos son los de un curso universitario regular de ecuaciones diferenciales ordinarias. El análisis y la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, se lleva a cabo utilizando un enfoque analítico, así como el uso integrado de un paquete de software, que proporciona excelentes soluciones numéricas y construcciones gráficas: GeoGebra, Máxima, Octave o MatLab que permiten obtener soluciones a ecuaciones diferenciales que no siempre son posibles analíticamente, y proporciona una herramienta valiosa para el proceso de análisis.

En el quehacer matemático para la formación de los estudiantes se presentan tres aspectos de la actividad matemática. En primer lugar, utilizar matemáticas conocidas, que consiste en utilizar los conocimientos para resolver problemas sin que esto requiera de otras consideraciones. El segundo aspecto planteado es aprender (y enseñar) matemática, en el cual, a partir de un problema, surge la necesidad de utilizar instrumentos matemáticos que son

desconocidos para quien desarrolla la actividad. El tercer aspecto es crear matemáticas nuevas, que consiste en resolver problemas que requieren de construir nuevos modelos o reinterpretar otros para aplicarlos a una nueva situación [10].

En ese quehacer matemático, el ambiente de trabajo que hemos empleado propició la participación activa de cada estudiante en aspectos teóricos y prácticos, tanto de forma individual como en grupo, bajo la propuesta de desarrollar competencias para: modelar un problema de la especialidad, analizarlo, simularlo, interpretarlo y utilizar la tecnología como recurso pedagógico. Los materiales que los estudiantes podían disponer son:

a) Apuntes de la asignatura, slide preparado por los docentes especialmente para las clases con teoría, teoremas, conceptos, propiedades y problemas resueltos y propuestos para resolver.
b) Colección didáctica de problemas y ejercicios para trabajar en las clases de trabajos prácticos, elaborado por todo el equipo de cátedra, material disponible en el entorno virtual.
c) Libros de texto y libros de consulta, los que forman la bibliografía planificada, libros disponibles en la biblioteca de la facultad.
d) Documentos de lectura, donde para cada unidad se preparó un artículo que ilustraba un tema específico de ecuaciones diferenciales.

Considerando que el objetivo principal de las asignaturas involucradas (una perteneciente a la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas y otra a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas) es que el alumno fuera capaz de formular y resolver modelos matemáticos de problemas reales con ecuaciones diferenciales, se llevó a cabo una aplicación de las ecuaciones diferenciales a situaciones de la vida real a través de la modelación matemática, para el cual los estudiantes, en grupos de 3 o 4, resolvieron un problema propuesto y a través de la dinámica de "seminarios" expusieron a sus pares la resolución del mismo, haciendo hincapié en que todo el trabajo fuera fortalecido por alguna herramienta computacional.

2.2 Un Ejemplo de problema propuesto sobre expresión génica: modelos de síntesis de ARN y proteínas

Los procesos celulares, como el crecimiento, la división, la motilidad y la muerte, están controlados por redes complejas de macromoléculas que interactúan (genes, ARNm y proteínas). Estas redes son conjuntos de reacciones químicas que convierten especies reactivas en especies de productos a velocidades que dependen de las concentraciones de los reactivos y, a menudo, de las concentraciones de otras moléculas (enzimas, inhibidores, factores de transcripción). En una primera aproximación, una red de reacción se puede describir matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que rastrean los efectos de estas reacciones que ocurren simultáneamente. Para obtener una mejor idea de la dinámica, se propuso a un grupo la siguiente actividad con el fin de orientarlo al estudio del problema:

- Leer atentamente las secciones 6.2.2 y 6.2.3 de [11].

- Construir las ecuaciones diferenciales que permitan modelar las variaciones en el tiempo de las concentraciones de un determinado ARNm, *m(t)*, y una determinada proteína, *p(t)*, teniendo en cuenta las siguientes reacciones y parámetros:

$$\text{Gen} \xrightarrow{k_1} \text{ARNm} \qquad \text{ARNm} \xrightarrow{k_2} \text{Proteína}$$
$$\text{ARNm} \xrightarrow{d_1} 0$$
$$\text{Proteína} \xrightarrow{d_2} 0$$

k_1: constante de transcripción. Representa el número de moléculas de ARNm producidas por gen y por segundo.

d_1: constante de degradación de ARNm

k_2: constante de traducción

d_2: constante de degradación de la proteína

Considere, para el ARNm, una síntesis constante y una degradación lineal, y para la proteína, una síntesis linealmente proporcional a la cantidad de ARNm y una degradación lineal.

- Encontrar el punto crítico de la EDO de $\frac{dm}{dt}$ y clasificarlo.

- Resolver y hallar *m (t)*, proponiendo una condición inicial razonable (no numérica). Verificar el comportamiento límite de la solución, teniendo en cuenta lo hallado en el punto anterior.

- Suponiendo que la concentración de una determinada proteína será constante a largo plazo, $\frac{dp}{dt}|_{t\to\infty} = 0$, estimar el valor de $p(t \to \infty)$ a partir de su ecuación diferencial.

NOTA: La suposición de que a un tiempo suficientemente largo la concentración de proteína será constante es lo que habitualmente se denomina para un proceso dinámico como hipótesis, "estado estacionario". Bajo esta suposición, la variable p se independiza del tiempo. Esta hipótesis permite determinar el comportamiento límite de la solución de una ecuación diferencial, sin necesidad de recurrir a sus soluciones analíticas. En este contexto, ¿qué suposición debe hacerse para $m\,(t)$?

- Con la expresión de m(t) encontrada, resolver analíticamente la ecuación diferencial para p(t) y evaluar su comportamiento límite a largo plazo. ¿Existe alguna restricción para sus constantes? El valor $p(t \to \infty)$ coincide con su estimación anterior?

- Utilizando GeoGebra, crear deslizadores para m_0, p_0, k_1, k_2, d_1 y d_2 y graficar m(t) y p(t) en forma conjunta para estudiar el efecto de los parámetros del modelo sobre las curvas soluciones. Sugerencia: hacer variar las condiciones iniciales entre 0.1 y 1.0 (con un incremento de 0.1 unidades). ¿Puede algún parámetro tomar valores negativos o cero? ¿Existen otras restricciones para los parámetros? En función de lo observado en cada caso, interpretar las salidas del modelo en el contexto del problema biológico, respondiendo preguntas del tipo: ¿qué ocurre si la concentración inicial de proteína es mayor a la de ARNm? ¿Qué ocurre si el ARNm se sintetiza más rápidamente que la proteína? ¿Qué ocurre si la proteína se degrada más rápido que el ARNm? Proponer otras situaciones posibles y comentar.

La Fig. 1 representa la expresión génica y la formación de proteínas, las especies que intervienen, los eventos y las diferentes tasas.

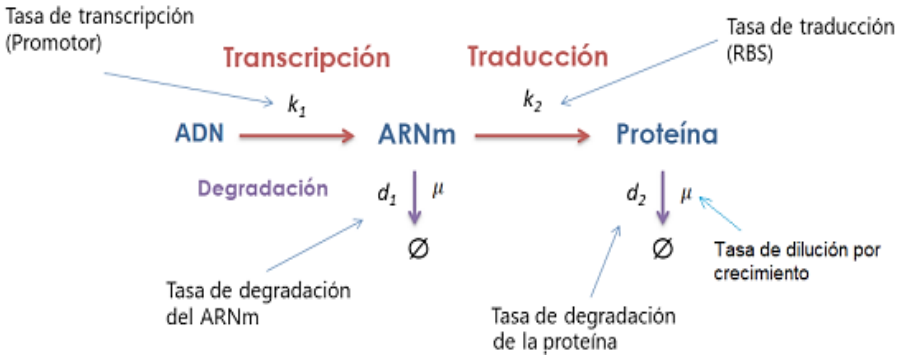


Fig. 1. Esquema de la expresión constitutiva de los genes y la formación de proteínas.

Las ecuaciones diferenciales que conforman el sistema de ecuaciones a resolver, para el problema genérico planteado están dadas por:

$$\frac{d[ARNm]}{dt} = k_1[Gen] - d_1[ARNm] \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{d[Proteína]}{dt} = k_2[ARNm] - d_2[Proteína] \quad \textbf{(2)}$$

donde [ARNm] y [Proteína] representan el número de moléculas de ARNm y Proteína respectivamente. La Fig. 2 contiene el Análisis Cualitativo (campo de direcciones), las Condiciones Iniciales, un arco de trayectoria en el plano fase, los valores de los parámetros de degradación y las soluciones en el tiempo.

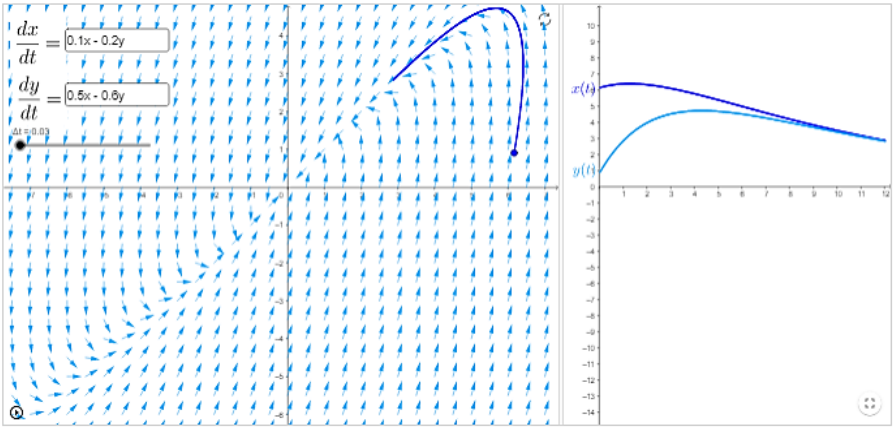


Fig. 2. Plano Fase, soluciones para valores especificos de las constants de degradación, las curvas solución a largo plazo.

Las referencias [8], [11], [12], [13] son muy ricas en la propuesta de armar, simular, analizar y discutir modelos matemáticos y muchos de estos modelos tienen historia en su nombre propio: “Modelo de pesca en cuotas”, “Crecimiento continuo: crecimiento de microorganismos”, “Regulación de la expresión génica. Modelos basados en la función de Hill”, “Constructing a phase-plane diagram for the chemostat”, “Wine fermentation”, “Mathematical models in cancer”.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Se cierra este trabajo realizando una valoración del potencial pedagógico de la propuesta, que desde hace unos 6 años se viene desarrollando en asignaturas que contemplan EDO, como experiencia para el aprendizaje de la matemática y una descripción de las limitaciones del trabajo de investigación realizado junto con sus posibilidades futuras.

El proyecto produjo varias situaciones de “canal abierto”, donde algunos estudiantes se mostraron ansiosos por tener que aprender matemática nueva para su trabajo/seminario. Esta forma abierta de ambientar el trabajo en el aula con actividades de modelización permitió promover competencias de trabajo en equipo, organización de tareas, uso adecuado de tecnología, exposición oral, posibilidad de defender el trabajo ante sus pares y docentes.

Como equipo de trabajo, queda pendiente evaluar por competencias que supone diseñar instrumentos en los que el estudiante demuestre con ejecuciones (evidencias) que puede realizar las tareas de la competencia exigida; definiendo los objetivos de lo que entendemos como buen desempeño, precisando los criterios. Para el aprendizaje tiene como ventajas saber claramente lo que se espera del estudiante y lo motiva a saber cómo se evaluará su rendimiento académico cualitativo.

Referencias

1. Camarena, P.: La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la Modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Vol. 7, No. 10, pp 183-193 (2012)
2. Camarena, P.: Teoría de las ciencias en contexto y su relación con las competencias. *Ingenium* Revista de la Facultad de Ingeniería, Vol. 16, No. 31, pp. 108-127, (2015)
3. Brito, M.; Alemán, I.; Fraga, E.; Para, J.; Arias, R.: Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, Vol. 14, No.2, pp. 129-139 (2011)
4. Rodríguez, R.; Quiroz, S.: Modelación y uso de tecnología en un curso de ecuaciones diferenciales. *Web* https://www.researchgate.net/publication/275155722 (2015). Accedido el 5 de febrero de 2022
5. Crouch, R.; Haines, R.: Mathematical Modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 35, No.2, pp. 197-206 (2004)
6. Santos, M.; Reyes, A.:Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 42, No.3, pp. 313-336 (2011)
7. Alsina, A; Salgado, M. *Introducing Early Mathematical Modelling in Early Childhood Education: a framework for solving real problems. Modelling in Science Education and Learning* Vol. 14, No 1,(2021)
8. Barnes, B.; Fulford, G.: *Mathematical Modelling with Case Studies*. Using Maple and Matlab, Editorial CRC Press. (2015)
9. Kaiser, G.,Sriraman, B. A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 38, No.3, pp. 302-310 (2006)
10. Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Barcelona, Horsori.(1997)
11. Szallasi, Z.; Stelling, J.; Periwal,V.: *System Modeling In Cellular Biology.* Editorial MIT Press Ltd (2006)
12. Jones, DS.; Plank, MJ.; Sleeman, BD. *Differential Equations and Mathematical Biology*. Editorial CRC Press, (2010).
13. Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical models in Biology*, SIAM, (2005)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Estudio del crecimiento poblacional en Ingeniería Ambiental usando Álgebra Lineal

Sonia Valeria Jacamo[1], M.R. Castro[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan.
Avenida Libertador General San Martín 1109(O). C.P. 5400.
{sjacamo,mrcastro}@unsj.edu.ar

Resumen. En este trabajo mostraremos dos aplicaciones de conceptos tan importantes en Álgebra Lineal como son los autovalores y autovectores. Para abordar dichas aplicaciones haremos el modelaje de dos situaciones específicas haciendo uso de conceptos básicos trabajados con los alumnos en la cátedra Álgebra y Geometría Analítica y nociones básicas de Cálculo, siendo ambas asignaturas de primer año. Dichos modelos serán presentados simplificados para que puedan ser comprendidos sin mayores dificultades por los alumnos. El objetivo del trabajo es presentarle al estudiante ejemplos de situaciones reales y brindarles experiencias que resulten motivadoras para ellos y los incentiven al estudio, como así también lograr una mejor comprensión de la materia, acercándolos a lo que será su futuro laboral.

Palabras Clave: Autovalores, Autovectores, Modelo de Leslie, Explotación animal, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

En los procesos de enseñanza y aprendizaje se deben producir cambios conceptuales que permitan la integración de nuevos conocimientos con los previamente adquiridos. Numerosas investigaciones dan muestra que la motivación es uno de los factores más importantes para que este proceso implique un aprendizaje duradero y transferible a nuevas situaciones. [1]

Es sabido que la mayor parte de los conceptos de Álgebra se presentan como definiciones abstractas y formales de objetos no vinculados con conocimientos físicos.

Según la Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación (2009) [2], los principales factores que dificultan el aprendizaje del Álgebra Lineal son:

- Pérdida de conexión con lo que los alumnos ya saben de matemáticas.
- Deficiencia de conocimientos matemáticos básicos y específicos que los estudiantes han debido de adquirir previamente; por ejemplo, ciertas nociones de lógica elemental, que les permiten entender la formalidad de la teoría de espacio vectorial.
- La complejidad del lenguaje especifico del álgebra lineal y el alto grado de abstracción de conceptos.
- Poca utilización de problemas como base para la introducción de conceptos.

Basándonos en el último factor descripto anteriormente es que hacemos la presente propuesta, en la que trabajaremos dos aplicaciones del Álgebra Lineal, en particular de los conceptos autovalores y autovectores relacionados al crecimiento poblacional y a la explotación racional de poblaciones animales, ambos aspectos de vital importancia para el Ingeniero Ambiental.

Para comenzar, expondremos brevemente la importancia del Álgebra Lineal en Ingeniería Ambiental, en la Sección 2 daremos una breve introducción teórica de las cuestiones específicas concernientes a cada ejemplo y a continuación se hará el modelaje respectivo para obtener los modelos.

En Sección 3 daremos ejemplos numéricos y finalmente en la Sección 4 expondremos conclusiones y plantearemos objetivos futuros a desarrollar.

1.1 Medio ambiente e Ingeniería Ambiental. Vinculación con Álgebra Lineal

La intervención humana en la naturaleza ha generado impactos que afectan negativamente la integridad de los ecosistemas, de los cuales depende en gran parte el bienestar de la humanidad, y que, en algunos casos, han llegado a amenazar la integridad de la vida misma en nuestro planeta, tal como se evidencia en forma dramática con el calentamiento global.

Con frecuencia, las intervenciones humanas en el medio natural, incluyendo las efectuadas mediante la ingeniería, se han hecho a partir de la visión predominante de que los bosques, la fauna, las aguas y los suelos, son recursos renovables. En esta perspectiva, cada uno de estos recursos se concibe como un bien para ser modelado en un producto material o como un recipiente para la disposición de desperdicios.

En vista de la situación mundial actual, es que nuestro objetivo como humanidad deba ser la administración racional de los recursos naturales renovables, siendo de gran importancia para ello la Ingeniería Ambiental.

Gracias a esta ingeniería se estudian nuevas formas de conseguir un desarrollo sostenible, de manera que el medio ambiente no se vea afectado por el aumento de la polución y la población de la Tierra.

La Ingeniería Ambiental es una disciplina que permite prevenir, controlar, compensar o mitigar los impactos ambientales ocasionados por las actividades del hombre, mediante la implementación de estrategias de producción más limpia, uso eficiente de energía y manejo integral de los materiales.

El objetivo de estos ingenieros es dar soluciones al deterioro del medio físico (agua, aire, suelo) sin comprometer la estabilidad y disponibilidad de los recursos para las generaciones futuras. Son especialistas que se encargan de diseñar productos y servicios que sean capaces de controlar la degradación ambiental a la que estamos sometidos y que, en la actualidad, tiene altos niveles de peligrosidad.

El Ingeniero Ambiental utiliza el Álgebra Lineal como una herramienta para caracterizar fenómenos y convertirlos a un modelo lineal, que es más sencillo de manejar, graficar y resolver que uno no lineal.

Muchos fenómenos de la naturaleza se pueden aproximar a través de un modelo lineal, como por ejemplo, estimar o predecir cuál será la población de determinado país en cierto lapso de tiempo, información vital para el Ingeniero Ambiental para llevar a cabo los objetivos planteados anteriormente. [3]

2 Presentación del modelo

Para comenzar, daremos una breve introducción del modelo de Leslie para darle a conocer al alumno su origen y su utilización en el análisis del crecimiento de poblaciones.

Este modelo reconoce la existencia de un ciclo de vida, que da lugar a poblaciones con individuos que son distintos en características tales como edad o tamaño y que su probabilidad de morir y/o su tasa de reproducción varía en función de ellas. Es discreto en el sentido que considera que los eventos reproductivos (épocas de apareamiento o de nacimiento) no ocurren continuamente a lo largo del tiempo (un año o el ciclo de vida de un organismo) y hace uso de las técnicas del Álgebra Lineal para proyectar la dinámica de la población.

2.1 Modelo de Leslie

Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo t, obtenemos un proceso (continuo o discreto) que recibe el nombre de dinámica de la población. El objetivo de la dinámica de poblaciones es estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. Un importante modelo de dinámica de poblaciones es el denominado Modelo de Leslie en honor del autor del método, el fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900 - 1974).

Con carácter general, podemos suponer que la población consiste enteramente de hembras ya que en realidad, para la mayoría de las especies la cantidad de machos es prácticamente la misma que la de hembras. Por otra parte, en lo que respecta a las cuestiones reproductivas, el papel determinante es jugado por las hembras y no por los machos.

Agruparemos la población en clases que sean homogéneas a efectos reproductivos y de supervivencia, dicho agrupamiento será por edades con diferentes tasas de fertilidad.

Como nos enfocaremos en la parte femenina de la población clasificaremos a las hembras por edades en intervalos de igual número de años. [4], [5].

Supongamos que la edad máxima alcanzada por una hembra de una población sea de L años y que esta población la dividimos en n clase de edades. Cada clase es evidente que tendrá L/n años de duración. Con lo que tenemos los n intervalos:

$$[0, {}^{L}/_{n}), [{}^{L}/_{n}, {}^{2L}/_{n}), \cdots, [{}^{(n-1)L}/_{n}, L] \qquad \textbf{(1)}$$

Si al momento inicial $(\mathrm{t} = 0)$ conocemos el número de hembras que hay en cada uno de los intervalos y denotamos por $x_i\ (0)$ al número de hembras existentes en el i-ésimo intervalo podemos construir el vector de la distribución inicial de las edades:

$$x(0) = (x_1(0), \cdots, x_n(0)) \qquad \textbf{(2)}$$

Lo que pretendemos es ver cómo evoluciona el vector $\mathrm{x}(0)$ con el tiempo, el Modelo de Leslie requiere que la duración entre dos tiempos consecutivos sea igual a la duración de los intervalos de edad, esto es:

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{L}{n}, t_2 = \frac{2L}{n}, \cdots, t_k = \frac{kL}{n}, \cdots \qquad \textbf{(3)}$$

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos tiempos consecutivos de observación se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- Al promedio del número de hijas que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i, lo llamaremos a_i con $i = 1, \ldots, n$. . Supondremos que habrá nacimientos, con lo que $a_i > 0$ para algún i. A dicha clase la llamaremos clase fértil.
- La fracción de las hembras que están en la clase i y se espera que sobrevivan y pasen a la clase de orden $i + 1$ la llamaremos b_i con i=1,... ,n-1 . El caso $b_i = 0$ no puede ocurrir ya que esto supondría que ninguna hembra viviría más allá de la clase i.

Sea $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$ el vector de distribución de las edades en el tiempo t_k. El número de hembras de la primera clase en el tiempo t_k vendrá dado únicamente por las nacidas entre los tiempos t_{k-1}. y t_k.. Podemos escribir:

$$x_1(k) = a_1 x_1(k-1) + a_2 x_2(k-1) + \cdots + a_n x_n(k-1) \qquad \textbf{(4)}$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase de orden $i + 1$ con $i = 1, \ldots, n$-1 en el tiempo t_k. es igual al número de hembras de la clase de orden i en el tiempo t_{k-1} que todavía están vivas en el tiempo t_k.

$$x_{i+1}(k) = b_i x_i(k-1), \qquad i = 1, \cdots, n-1 \qquad \textbf{(5)}$$

Expresando matricialmente (4) y (5) tenemos,

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_n(k-1) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

O de forma vectorial:

$$x(k) = Lx(k-1) \qquad \textbf{(7)}$$

donde $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ es la denominada matriz de Leslie.

De (7) resulta

$$x(k) = L^k x(0) \qquad \textbf{(8)}$$

De este modo, conocida la distribución inicial $x(0)$ y la matriz L, se puede determinar la distribución de las hembras en cualquier tiempo futuro.

La ecuación (8) escrita de esta manera, no nos aporta de entrada, un cuadro general de la dinámica del crecimiento. Para ello, debemos recurrir al estudio de los valores y vectores propios de la matriz de Leslie.

Lema 1 Una matriz de Leslie L, tiene un único valor propio positivo λ_1. Este valor propio es simple y tiene un vector propio asociado v_1 cuyos elementos son todos positivos de la forma:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9)}$$

Lema 2 Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L y si λ_1 es cualquier otro valor propio (real o complejo) de L, entonces:

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1 \qquad \textbf{(10)}$$

Se llama valor propio dominante de una matriz al valor propio de mayor valor absoluto, en este caso, ya sabemos por el Lema 2 que λ_1 será un valor propio dominante de L.

Es posible encontrar situaciones en las que la matriz de Leslie no tenga valor propio dominante. Sin embargo, el siguiente resultado garantiza que en la mayoría de los casos λ_1 será un valor propio dominante.

Lema 3 Si dos entradas consecutivas $a_i a_{(i+1)}$ de la primera fila de la matriz de Leslie son diferentes de cero, el autovalor positivo de L es dominante.
En consecuencia, si la población femenina tiene dos clases de edad fértil sucesivas, entonces la matriz de Leslie correspondiente tiene un autovalor positivo dominante. Esto en realidad, si los intervalos son suficientemente pequeños sucederá siempre. De ahora en adelante supondremos que se dan estas condiciones.

Supongamos que L es diagonalizable con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores no necesariamente distintos y n autovectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_n$ con los que construiremos la matriz P que diagonaliza a L.

De esta manera:

$$L^k x(0) = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} x(0) \qquad \textbf{(11)}$$

Dividiendo los dos miembros de (11) por λ_1^k considerando (8) y el hecho que $\left({}^{\lambda_i}/_{\lambda_1}\right)^k \to_{k\to\infty} 0$ obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \left({}^{1}/_{\lambda_1^k}\right) x(k) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} x(0) \qquad \textbf{(12)}$$

Al primer elemento del vector columna $P^{-1} x(0)$ le llamaremos c y se puede demostrar que la ecuación (12) se transforma en:

$$\lim_{k\to\infty} \left({}^{1}/_{\lambda_1^k}\right) x(k) = c v_1 \qquad \textbf{(13)}$$

con lo que resulta:

$$x(k) \cong c\lambda_1^k v_1 \qquad \textbf{(14)}$$

para grandes valores de *k*, de este modo, el comportamiento a largo plazo de la distribución de las edades de la población, queda determinado por el autovalor positivo λ_1 y el autovector correspondiente v_1.

Es decir, para valores grandes de tiempo, obtenemos las siguientes conclusiones:

- Cada vector de la distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante el valor propio positivo dominante de la matriz de Leslie.
- La proporción de hembras en cada una de las clases será constante.

Finalmente, la población crece si $\lambda_1 > 1$, decrece si $\lambda_1 < 1$ y se estabiliza si $\lambda_1 = 1$. Este último caso es de particular interés porque determina una población de crecimiento cero.

Se puede probar que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor si y solo si

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} = 1 \qquad \textbf{(15)}$$

La expresión

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \qquad \textbf{(16)}$$

se llama tasa neta de la reproducción de la población.

2.2 Explotación racional de poblaciones animales

En la subsección anterior se describió el modelo de Leslie para el crecimiento de una población femenina dividida en clases de edades en forma discreta.

En esta subsección, propondremos el efecto de la explotación racional de una población animal creciente.

Para nosotros *explotación racional* significa la *separación* de algunos animales de la población para su venta, sacrificio u otro fin. [5]

Nos limitaremos a políticas de explotación racional duradera, lo que significa que la población animal no se agota, solo se explota el excedente debido al crecimiento. Por ejemplo, si partimos de una población de 10 animales y al cabo del crecimiento se tienen 16, el rendimiento de la población será de 6 animales.

Análogo al trabajo hecho anteriormente, solo analizaremos la fracción femenina de la población.

Se parte de una población con una determinada distribución de las edades. Esta población tiene un período de crecimiento descrito por una matriz de Leslie. Al término de este período, se obtiene como rendimiento una cierta fracción de cada una de las clases de edades. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve en comparación con el período de crecimiento, ya que así, el crecimiento o los cambios en la población son despreciables en dicho período de separación. Finalmente, la población debe quedar con la misma distribución de edades que la población original. Este ciclo se repite después de cada separación y por lo tanto, el rendimiento es duradero.

Sea

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

el vector de la distribución de las edades de la población, al inicio del período de crecimiento. x_i será el número de hembras de la clase de orden i que siguen formando parte de la población, es decir, que no se separan como rendimiento.

La duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento, por ejemplo, si el rendimiento se separa una vez al año, la población tendrá que dividirse en clases de un año.

Si L es la matriz de Leslie que describe el crecimiento de la población, Lx es el vector de la distribución de las edades de la población al término del período de crecimiento, es decir, inmediatamente antes de la separación.

Sea h_i, para $i = 1, \dots, n$, la fracción de hembras que se va a separar de la clase de orden i. Con estos n números se puede formar una matriz diagonal

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

llamada matriz de la explotación racional, con $0 \leq h_i \leq 1$ para $i = 1, \dots, n$ donde, puede no separarse ninguna hembra ($h_i = 0$), pueden separarse todas ($h_i = 1$) o puede separarse una fracción ($0 < h_i < 1$).

Como el número de hembras de la clase de orden i, inmediatamente antes de la separación, es el elemento $(Lx)_i$ del vector Lx, la entrada de orden i del vector columna

$$HLx = \begin{pmatrix} h_1(Lx)_1 \\ h_2(Lx)_2 \\ \vdots \\ h_n(Lx)_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

será el número de hembras que se separan de la clase de orden i.

Teniendo en cuenta la definición de política de explotación racional se tiene

$$(I - H)Lx = x \tag{20}$$

en (20) queda claro que x debe ser el autovector de la matriz $(I\text{-}H)L$ que corresponde al autovalor uno.

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente, para que una matriz de Leslie (en este caso consideraremos a la matriz $(I\text{-}H)L$ tenga como autovalor a la unidad, es que su tasa neta de reproducción sea igual a la unidad, con lo que obtenemos:

$$(1 - h_1)[a_1 + a_2 b_1 (1 - h_2) + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}(1 - h_2) \cdots (1 - h_n)] = 1 \tag{21}$$

Esta ecuación es una restricción para las fracciones permitidas en una explotación racional. Sólo aquellos valores de $h_1, \dots, h_n$ que satisfacen (21) y pertenecen al intervalo (0,1) dan origen a un rendimiento duradero.

3 Ejemplos

Ejemplo 1 [5]: Una población de hembras alcanza la edad máxima de 15 años. Para aplicar el modelo de Leslie dividiremos a la población total en tres clases de cinco años cada una. Supongamos que la matriz de Leslie para esta población es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

Si inicialmente hay 1000 hembras en cada una de las clases, aplicando (8) obtenemos:

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} \\ x(2) &= \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix} \\ x(3) &= \begin{pmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \textbf{(23)}$$

Por lo que al cabo de 15 años habrá 14375 hembras entre 0 y 5 años de edad, 1375 entre 5 y 10 y 875 entre 10 y 15 años de edad.

Para intervalos de tiempo más grandes haremos uso de (14) para lo que debemos encontrar el autovector y autovalor dominante de *L*. Resolviendo la ecuación característica obtenemos:

$$\lambda_1 = 1.5, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/18 \end{pmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

Empleando (14) y (17) resulta:

$$x(k) \cong c(1.5)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/18 \end{pmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

donde la constante *c* dependerá de la correspondiente matriz *P*.

En consecuencia, las hembras estarán distribuidas de acuerdo con la proporción 1:1/3:1/18, lo que corresponde a una distribución del 72% en la primera clase, 24% en la segunda y un 4% en la tercera.

Ejemplo 2: Para una cierta especie de ovejas domésticas cuyo período de crecimiento es de un año, se encontró la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\ 0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(26)}$$

Estas ovejas tienen una vida de 12 años, por lo que se dividen en 12 clases de un año cada una. Haciendo cálculos se obtiene que el único autovalor positivo de L es λ_1=1.221

Si en (20) hacemos la suposición que todos los h_i son iguales entre sí e iguales a un cierto valor h, esta ecuación se reduce a:

$$Lx = \left(\frac{1}{1-h}\right)x \quad \textbf{(27)}$$

Así, $1/((1\text{-h}))$ debe ser el único autovalor positivo λ_1 de la matriz de crecimiento de Leslie L, de lo que se obtiene

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.221} = 0.181 \quad \textbf{(28)}$$

Entonces, la política de explotación racional uniforme consiste en separar, cada año, el 18.1% de las ovejas en cada una de las doce clases.

El autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.692 \\ 0.552 \\ 0.436 \\ 0.339 \\ 0.257 \\ 0.189 \\ 0.131 \\ 0.084 \\ 0.048 \\ 0.022 \\ 0.007 \end{pmatrix} \quad \textbf{(29)}$$

Nos proporciona la siguiente información: por ejemplo, hay 1000 ovejas cuya edad está comprendida entre 0 y 1 año después de la separación, hay 692 ovejas cuya edad está comprendida entre 1 y 2 años, 552 entre 2 y 3 y así sucesivamente.

4 Conclusiones

En los ejemplos trabajados mostramos el uso de los modelos obtenidos. La importancia de conocer estas estimaciones es evidente para tener un desarrollo sustentable y amigable con el medio ambiente.

Para tal fin, entre otras cosas, será necesario predecir la población a futuro de una ciudad en un determinado lapso de años, como así también hacer una correcta explotación de una población de animales.

Se eligieron estos ejemplos por su sencillo modelaje e interpretación de los resultados.

Referencias

1. Gaitán, M; Gandulfo, M; Vaira, S; Braun, A; Dupleich, D: Aportes para aplicar contenidos de Álgebra Lineal en Ingeniería Electrónica con la mediación de la tecnología. III REPEM – Memorias, http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Propuestas/CB%2001.pdf. Accedido el 19 de Diciembre de 2019.
2. Memoria 2009 de Reice: Revista Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación. Verónica González de Alba Editora (2010) - Volumen 8, Número 1. https://scholar.google.com.ar/scholar?q=Revista+Iberoamericana+sobre+-Calidad,+Eficacia+y+Cambio+en+Educaci%C3%B3n+2009&hl=pt-PT&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart. Accedido el 20 de Diciembre de 2019.
3. Rodríguez Becerra, M: Ingeniería y medio ambiente. *Revista de Ingeniería. Facultad de Ingeniería Universidad de los Andes. Bogotá. Colombia* http://www.scielo.org.co/pdf/ring/n26/n26a8.pdf (Diciembre 2007). Accedido 07 de Febrero de 2020.
4. Valdivieso, A: Aplicaciones de los sistemas matriciales en Dinámica de Poblaciones. *Universidad Nacional del Callao. Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. Instituto de investigación*, http://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/UNAC/904/119.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Accedido el 21 de Diciembre de 2019.
5. Rorres, C; Anton, H: Aplicaciones de Álgebra Lineal. Limusa, pp 127-142 (1979).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

El uso de algoritmos en Scilab para la enseñanza y el estudio de dinámica de rotores

Fernando D. Palmieri[1], Andreas E. Klempnow[2], Wadi P. Chiapparoli[1]
[1] grupo de estudio de vibraciones Mecánicas. Departamento Mecánica, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colon 332, B2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{fpalmieri,wchiapparoli}@frsn.utn.edu.ar
[2] grupo de investigación de vibraciones Mecánicas., Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional
San Martín 1175, B2804 Campana, Buenos Aires, Argentina
andreas.klempnow@gmail.com

Resumen. La dinámica de rotores es una de las disciplinas donde el estudiante de ingeniería se puede encontrar con resultados que contradicen la intuición, aun cuando dicho estudiante tenga cierto grado de conocimientos de dinámica clásica. Este trabajo presenta una serie de algoritmos desarrollados para incluir temas avanzados de dinámica de rotores dentro de la unidad de vibraciones mecánicas como complemento del tema dinámica de sistemas, de la asignatura Mecánica Racional (tercer nivel de la carrera ingeniería mecánica). Dichos algoritmos serán empleados para que los estudiantes puedan generar gráficas de respuesta dinámica, para rotores con distintos grados de simplificación, y experimentar de forma numérica el comportamiento de los mismos, con el propósito de entender fenómenos como el de inversión de fase durante el pasaje por una velocidad crítica. La aplicación de esta secuencia demás permite al estudiante identificar "ocasiones de uso" lo los saberes aprendidos de matemáticas.

Palabras Clave: Dinámica de rotores, Vibraciones mecánicas, Scilab, Mecánica racional

1 Introducción

La dinámica de rotores es una disciplina que se ocupa de estudiar el comportamiento de los ejes giratorios de las máquinas rotantes. Normalmente no está incluida como una asignatura del plan de estudios de ingeniería mecánica, pero es un tema que se incluye de manera parcial en asignaturas como mecánica racional, elementos de máquinas y máquinas alternativas y turbomáquinas. La importancia de esta disciplina fue creciendo a raíz del hecho de que las máquinas rotantes son elementos cruciales en la industria y en el transporte moderno, además, el avance científico y tecnológico de las áreas de materiales, lubricación y mecanizado, ha permitido lograr grandes potencias y altísimas velocidades de giro, en dimensiones pequeñas y con ejes relativamente flexibles. Esto aumenta la posibilidad de aparición de problemas dinámicos en los rotores y la necesidad de incluir su estudio de forma más específica.

Como disciplina tiene más de 150 años de historia, donde gran parte del desarrollo teórico viene impulsado por las experiencias prácticas que los ingenieros fueron adquiriendo desde la construcción de las primeras máquinas a vapor. Rankine [1] fue quien realizó el primer análisis teórico de un eje giratorio y con este desarrollo fue capaz de demostrar que más allá de una cierta velocidad de giro "... el eje está considerablemente doblado y gira alrededor de esta forma doblada". Definió esta velocidad particular como whirling speed (velocidad de batido del eje, o velocidad de precesión, dependiendo del traductor, la traducción literal hace referencia al movimiento de la soga de saltar, el whirling es la rotación de la forma flexionada del eje en torno a la forma recta original). Para

este estudio empleó un modelo que remplaza al rotor por una masa giratoria concentrada, sujeta a un resorte, de la rigidez equivalente a la del eje original.

El modelo que uso Rankine permite concluir que más allá de una determinada velocidad de rotación, la desviación radial aumenta sin límite, *lo que no es cierto en la realidad*. Esta velocidad de rotación es la denominada velocidad crítica, y ocurre cuando la frecuencia de excitación (en este caso la de rotación) coincide con una frecuencia natural y en la práctica puede conducir a amplitudes de vibración excesivas.

A pesar de las conclusiones del modelo de Rankine, las turbinas construidas por Parsons en 1884 y De Laval en 1893 tuvieron éxito en funcionar por encima de la velocidad crítica. Este último fue quien teorizó que por encima de la velocidad crítica existía un efecto de auto centrado y trabajo con un modelo de rotor de un solo disco sobre un eje flexible, que hoy se conoce como rotor de Jeffcott, en referencia al creador de la primera teoría fundamental registrada de la dinámica rotores se puede encontrar en un artículo clásico de dicho autor [2] en 1919.

De allí en más, muchas de las conclusiones de la dinámica de rotores se pueden alcanzar a partir de modelos matemáticos con distinto grado de simplificación o complejidad, pero en la mayoría de los casos, tienen la particularidad de llegar a resultados que contradicen muchas veces las ideas previas o las conclusiones primarias de los estudiantes.

Actualmente en la literatura específica [3] se pueden encontrar métodos analíticos para determinar velocidades críticas y la respuesta del rotor a fenómenos como desbalance o cambios en las propiedades de los cojinetes, entre otros; pero dichos métodos casi siempre se aplican a modelos relativamente simples como el rotor de Jeffcot y los resultados de los mismos, y permiten comprender conceptualmente los fenómenos antes descritos.

Para el modelado de rotores reales el método de los elementos finitos (FEM) y el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) son los dos caminos numéricos más usuales. La aplicación de modelos de elementos finitos en dinámica de rotores ha sido exitosamente verificada [4]. No obstante, el principal inconveniente de este camino es que emplea una gran capacidad de cálculo, la programación es compleja y, en general, requiere un conocimiento preciso de la geometría del rotor.

El MMT, en cambio, resuelve el problema dinámico utilizando un procedimiento de aproximación que consiste en partir de un extremo del rotor, donde las condiciones de contorno son conocidas, luego usando expresiones clásicas obtenidas de la mecánica de Newton, de la resistencia de materiales y de la teoría de la elasticidad, se determina la deflexión lateral, el ángulo de giro y los esfuerzos del eje en determinados puntos característicos a lo largo del eje (cambios de sección, apoyos intermedios, rodetes de álabes, etc.), avanzando en forma progresiva hasta llegar al otro extremo. La satisfacción de las condiciones de contorno de en los extremos y en todos los puntos intermedios permite plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar las velocidades críticas. Luego para cada velocidad se puede obtener el estado del rotor en esos puntos característicos intermedios, a través de las mismas ecuaciones, y de esa manera se obtienen las formas modales. Este método tiene como principal ventaja que no requiere almacenar o manipular grandes matrices, se puede trabajar con datos concretos, como son los diámetros del rotor y las masas de los componentes y resulta más rápido para obtener resultados cuando la capacidad de cálculo es reducida, además desde el punto de vista didáctico, las ecuaciones usadas son más familiares para los estudiantes y las operaciones a realizar se resumen a determinantes y productos de matrices.

La idea fundamental del método de las matrices de transferencias fue propuesta por Holtzer para sistemas sometidos a vibraciones en torsión, luego Myklestad lo generalizó para sistemas sometidos a la flexión [5]. Desde entonces distintas publicaciones fueron ofreciendo variantes del método para distintos sistemas rotor-cojinete. Como sugiere Murphy [6] en algunos casos puede presentar errores en la determinación de algunas de las velocidades críticas, pero existen técnicas para asegurar la precisión y mejorar los resultados.

Existen muchos trabajos realizados con el propósito de determinar las velocidades críticas, frecuencias de precesión o batido y formas modales que incorporan distintos efectos o detalles, como la influencia de los soportes y cojinetes [7], [8], [9], la inercia rotacional de los rodetes [10] o la distribución de masa e inercia rotacional del eje [11]. También se han desarrollado trabajos que usan este método para estudiar la respuesta del rotor a fenómenos como el desbalance, la desalineación [12], [13] o la presencia de una fisura del eje [14].

Todos estos modelos numéricos son relativamente sencillos, pero requieren el manejo de alguna herramienta informática para poder hacer utilizarse. En este trabajo, se presentan los algoritmos desarrollados en Scilab de algunos modelos de rotores, que fueron realizados para complementar las clases introducción a la dinámica de rotores, tema incluido dentro del tópico de dinámica de sistemas de la asignatura mecánica racional. Los algoritmos serán usados para que los estudiantes analicen variaciones en parámetros de los rotores y puedan hacer pruebas virtuales.

La necesidad de incluir problemas y herramientas de este tipo en el trabajo de los estudiantes en el aula, pretende mejorar el desarrollo de competencias en los egresados. La aprobación de la propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina o "Libro Rojo de CONFEDI" [15] pone el acento en el desarrollo de competencias frente a la trasmisión de contenidos. Este enfoque demanda de

competencias específicas que exige el mundo actual requiere de ingenieros que tengan una fuerte formación matemática para la comprensión de los fenómenos físicos involucrados en un problema específico de su especialidad. En ese contexto se presenta necesario reforzar la articulación entre las materias de especialidad y las básicas, con el objetivo de mejorar la comprensión y la capacidad de análisis de los egresados.

El enfoque de enseñanza dirigida a las competencias, tomado en el sentido de que el estudiante demuestre habilidades en usar los conocimientos en acciones nuevas, ya era introducido por Chevallard [16] al hablar de una correcta transposición didáctica dado que, si el estudiante construyó aprendizajes significativos, implica en el sentido original pensado por Chevallard que el estudiante pueda entre otras cosas identificar las denominadas "ocasiones de uso" de esos saberes. En tal sentido, el enfoque de aprendizaje basado en problemas (ABP) es uno de los que permite lograr un currículo por competencias [17]. Además, en la enseñanza de la ingeniería, "la importancia que se le asigna a la resolución de problemas ha sido enfatizada por los criterios de evaluación de las carreras de ingeniería planteados por la CONEAU para la acreditación de las mismas" [18] dado que el ingeniero en su quehacer profesional debe actuar sobre distintas situaciones usando los conocimientos técnicos y científicos.

Es por ello que el abordaje de problemas complejos como los de dinámica de rotores permite combinar contendido de la asignatura, el uso de recursos informáticos y la necesidad de recurrir a la matemática dándole la oportunidad de identificar las mencionadas "ocasiones de uso" de los saberes adquiridos en matemáticas e informática. Estos aspectos pueden mejorar la articulación porque obligan al estudiante a recordar contenidos de matemáticas que se usan para construir modelos de la realidad, operar con ellos y analizar los resultados numéricos en función del fenómeno físico. Además, incluir una serie de problemas a resolver con la computadora acerca al estudiante a un entorno más complejo y parecido al del trabajo real, donde se deben emplear saberes conceptuales y procedimentales de distintas áreas, junto con la capacidad de análisis.

Se pretende incluir estos códigos durante el corriente año en una secuencia didáctica donde los estudiantes puedan ensayar y analizar distintas posibilidades de respuesta de rotores. La actividad será complementada con un cuestionario guiado, otro abierto y un problema de aplicación. En este trabajo se presentan los algoritmos y la secuencia a usar, se espera en un futuro presentar los resultados de la intervención didáctica.

2 Modelos matemáticos implementados

Los modelos desarrollados se pensaron para incluir en una secuencia didáctica donde se comienza por el modelo de un rotor flexible de un solo disco sobre soportes rígidos (Jeffott), luego el modelo de rotor rígido sobre soportes flexibles y finalmente un modelo general basado en el método de la matriz de transferencia.

2.1 Rotor de eje flexible sobre soportes rígidos con rotor asimétrico.

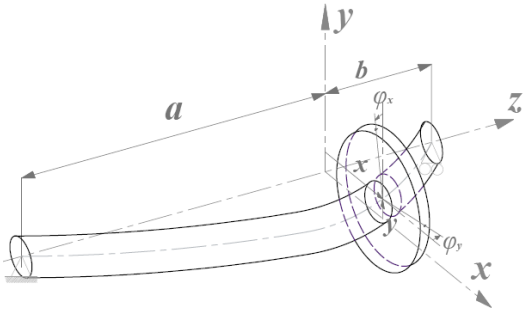


Fig. 1. Modelo de rotor de Jeffcot con disco desplazado.

Este es uno de los modelos más simples de la dinámica de rotores y se presenta en la figura 1, para su resolución se parte de considerar los desplazamientos complejos.

$$r = x + y\,i \quad y \quad \varphi_r = \varphi_y + \varphi_x\,i \tag{1}$$

Donde *x* e *y* son las componentes del punto de intersección de la fibra neutra del eje curvado en el plano original del disco donde está montado, respecto del eje recto que une los cojinetes o eje sin deflexión, φ_y y φ_x son las componentes de inclinación del disco respecto del plano *x*-*y* medidas en el plano *x*-*z* e *y*-*z*. Las ecuaciones de movimiento entonces son:

$$m_d\ddot{r} + k_{11}r + k_{12}\varphi_r = m_d e\omega^2 e^{i\omega t} \tag{2}$$

$$I_d\ddot{\varphi}_r + k_{21}r + k_{22}\varphi_r = 0 \tag{3}$$

Donde m_d es la masa del disco e I_d es el momento de inercia del disco respecto de un eje diametral, k_{ij} es el coeficiente de rigidez y se define como la fuerza *i* en el punto i-*ésimo* debido a un desplazamiento unitario *j* en la estación *j-ésima* manteniendo todos los otros desplazamientos iguales a cero, este valor se obtiene por la técnica de coeficientes de influencia.

Proponiendo como solución:

$$r = Re^{i(\omega t - \phi_r)} \quad \text{y} \quad \varphi_r = \Phi_r e^{i(\omega t - \phi_{\varphi r})} \tag{4}$$

Trabajando se llega a la expresión de la respuesta del rotor, entendida como tal al desplazamiento radial del centro de masa del disco del rotor.

$$R = \frac{m_d\omega^2 e(k_{22} - I_d\omega^2)}{(k_{11} - m_d\omega^2)(k_{22} - I_d\omega^2) - k_{12}k_{21}} \tag{5}$$

Y posteriormente se arriba a la expresión para determinar las velocidades críticas

$$\omega_{cr_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left({\omega_r}^2 + {\omega_\varphi}^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left({\omega_r}^2 + {\omega_\varphi}^2\right)^2 - 4\left({\omega_r}^2{\omega_\varphi}^2 - {\omega_{r\varphi}}^2{\omega_{\varphi r}}^2\right)}} \tag{6}$$

Con:

$${\omega_r}^2 = \frac{k_{11}}{m_d},\ {\omega_\varphi}^2 = \frac{k_{22}}{I_d},\ {\omega_{r\varphi}}^2 = \frac{k_{12}}{m_d} \quad y \quad {\omega_\varphi}^2 = \frac{k_{21}}{I_d} \tag{7}$$

Algoritmo 1. Programa para obtención de respuesta de un rotor flexible de disco descentrado sobre soportes rígidos sin amortiguamiento.

```
function RespJeffcotASimgen(a, b, d_eje, m_disco, I_disco, exentricidad)
    ecc=exentricidad
    md=m_disco
    Ir = I_disco
    L=a+b
    J=%pi/64*(d_eje^4)
    E=210000000000
    den=3*E*J*L
    alfa11=(a*a*b*b)/den
```

```
    alfa12=(-1)*((3*a*a*L)-(2*a*a*a)-(a*L*L))/den
    alfa21=(a*b*(b-a))/den
    alfa22=(-1)*((3*a*L)-(3*a*a)-(L*L))/den
    den2=(alfa11*alfa22)-(alfa21*alfa12)
    k11= alfa22/den2
  k22 =alfa11/den2
    k12=-alfa12/den2
    k21 =-alfa21/den2
    N_ptos=10000
    om_u=k11/md
    om_p=k22/Ir
    om_up=k12/md
    om_pu=k21/Ir
    om_cr1=sqrt(0.5*(om_u+om_p)+0.5*sqrt((om_u+om_p)^2-4*(om_u*om_p-om_up-
*om_pu)));
    om_cr2=sqrt(0.5*(om_u+om_p)-0.5*sqrt((om_u+om_p)^2-4*(om_u*om_p-om_up-
*om_pu)));
    fn_1=om_cr1/(2*%pi)
    fn_2=om_cr2/(2*%pi)
    printf(' w(1)    f(1)       \t .');
    printf('%11.7f \t %11.7f \t\n',om_cr1,fn_1);
    printf(' w(2)     f(2)     \t .');
    printf('%11.7f \t %11.7f \t\n',om_cr2,fn_2);
    resp=hypermat([1 (N_ptos)])
    frec=hypermat([1 (N_ptos)])
    for i =1:N_ptos
        omega=1+0.05*i
         frec(1,i)=omega
         u1=md*(omega^2)*ecc*(k22-Ir*(omega^2));
         u2=((k11-md*(omega)^2)*(k22-Ir*(omega^2)))-(k21*k12);
         resp(1,i)=abs(u1/u2)
         end
    endfunction
```

2.2 Rotor flexible sobre soportes flexibles

En este caso la deflexión central del rotor se debe determinar como la superposición de la deflexión del disco debido al desequilibrio cuando el eje es rígido, es decir, la deflexión del disco (en el centro geométrico) causada únicamente por el movimiento de los extremos del eje (movimiento de cuerpo rígido) sobre los cojinetes flexibles, a la que se le debe sumar la deflexión debida a la deformación del eje con respecto a las ubicaciones de los cojinetes. La deflexión asociada con la flexión del eje se calcula de la misma forma que en el apartado anterior. Para el cálculo de la deflexión del disco por el efecto de los cojinetes mediante la expresión:

$$\{U_{s1}\} = [B][K]^{-1}[A]\{F_s\} = [C]\{F_s\} \qquad \textbf{(8)}$$

Donde $\{U_{s1}\}$ es el vector de desplazamientos del disco $\{x, y, \varphi_y, \varphi_x\}$ debido al movimiento de eje producto de la elasticidad de los cojinetes, y $\{F_s\}$ es el vector de fuerza que actúa sobre el disco. Donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} (1-a/l) & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & (1-a/l) & 0 & 1/l \\ a/l & 0 & 1/l & 0 \\ 0 & a/l & 0 & -1/l \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} (1-a/l) & 0 & a/l & 0 \\ 0 & a/l & 0 & (1-a/l) \\ 1/l & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 1/l \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9)}$$

Estas últimas son las matrices que relacionan los desplazamientos del disco con el de los apoyos y la matriz [*K*] es la matriz de rigidez de los cojinetes que, en caso de ser idénticos, queda como:

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_{xx} + i\omega c_{xx}) & (k_{xy} + i\omega c_{xy}) & 0 & 0 \\ (k_{yx} + i\omega c_{yx}) & (k_{yy} + i\omega c_{yy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k_{xx} + i\omega c_{xx}) & (k_{xy} + i\omega c_{xy}) \\ 0 & 0 & (k_{yx} + i\omega c_{yx}) & (k_{yy} + i\omega c_{yy}) \end{bmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

Al vector $\{U_{s1}\}$ se debe sumar deflexión del disco debido a la flexión del eje solo $\{U_{s2}\}$, sin tener en cuenta los cojinetes, la misma se determina por coeficientes de influencia.

$$\{U_{s2}\} = [\alpha]\{F_s\} \quad \textbf{(11)}$$

Finalmente, la deflexión neta del rotor $\{U_s\}$causada por la deflexión de los cojinetes más la debida a la flexión del eje se obtiene como:

$$\{U_s\} = \{U_{s1}\} + \{U_{s2}\} = ([C] + [\alpha])\{F_s\} = [D]\{F_s\} \quad \textbf{(12)}$$

Despejando el vector fuerza sobre el disco se obtiene:

$$\{F_s\} = [D]^{-1}\{U_s\} \quad \textbf{(13)}$$

Aplicando las ecuaciones de la dinámica al disco, considerando que el mismo tiene el centro de masa desplazado respecto del punto de vínculo con el eje, se llega a la respuesta a desequilibrio.

$$\{F_{desequilibrio}\} = -\omega^2[M]\{U_s\} + \{F_s\} \quad \textbf{(14)}$$

$$\{F_{desequilibrio}\} = -\omega^2[M]\{U_s\} + [D]^{-1}\{U_s\} \quad \textbf{(15)}$$

$$\{U_s\} = (-\omega^2[M] + [D]^{-1})^{-1}\{F_{desequilibrio}\} \quad \textbf{(16)}$$

Donde ω es la velocidad de rotación del eje, [*M*] es la matriz de masa del disco (contiene masa y momento de inercia) y la fuerza de desequilibrio puede tener componentes de fuerza centrífuga en x e y. Además, si el disco está cruzado componentes de desequilibrio de cupla. Las excitaciones del modelo dependerán del rotor estudiado.

Algoritmo 2. Programa para obtención de respuesta de un rotor flexible sobre soportes flexibles con amortiguamiento y excitación de desbalance radial con proyección en *x* e *y*.

```
function Resprotflexsoportesflex(v, paso, N_ptos, masa_disco, inercia_disco,
d_eje, longeje, Dist_apoyoA, kxx, kyy, kxy, kyx, cxx, cyy, cxy, cyx)
m=masa_disco //masa del rotor kg
Id=inercia_disco// momento de inercia diametral kg-m2
ecc=1.0e-4
a_ecc=1e-3
l=longeje
a=Dist_apoyoA
b=l-a
J=%pi/64*(d_eje^4)
E=210000000000
den=3*E*J*l
alfa11=(a*a*b*b)/den
alfa12=(-1)*((3*a*a*l)-(2*a*a*a)-(a*l*l))/den
alfa21=(a*b*(b-a))/den
```

```
alfa22=(-1)*((3*a*l)-(3*a*a)-(l*l))/den
resp=hypermat([1 (N_ptos)])
frec=hypermat([8 (N_ptos)])
for i =1:N_ptos
    omega=1+paso*i
    frec(1,i)=omega
    K=[kxx+%i*cxx*omega kxy+%i*cxy*omega 0 0;kyx+%i*cyx*omega kyy+%i*-
cyy*omega 0 0;0 0 kxx+%i*cxx*omega kxy+%i*cxy*omega ;0 0 kyx+%i*cyx*omega
kyy+%i*cyy*omega];
    Ki=inv(K);
    A=[(1-a/l) 0 -1/l 0;0 (1-a/l) 0 1/l;a/l 0 1/l 0; 0 a/l 0 -1/l];
    B=[(1-a/l) 0 a/l 0;0 a/l 0 (1-a/l);1/l 0 -1/l 0; 0 -1/l 0 1/l];
    C=B*Ki*A;
    Alpha=[alfa11 0 alfa12 0;alfa21 0 alfa22 0;0 alfa11 0 alfa12; 0 alfa21
0 alfa22];
    D= C+Alpha
    E=inv(D)
    M=[m 0 0 0;0 m 0 0;0 0 Id 0;0 0 0 Id];
    H=-1*omega*omega*M+E
    F=[m*ecc*omega*omega; -1*%i*m*ecc*omega*omega; 0; 0];
    X=inv(H)*F;
    resp(1,i)=abs(X(1))
      if real(X(1))<0 then
          resp(2,i)=180/%pi*(atan(imag(X(1))/real(X(1)))-%pi)
    else
       resp(2,i)=180/%pi*(atan(imag(X(1))/real(X(1))))
    end
   end
endfunction
```

2.3 Rotor multidisco sobre soportes flexibles con amortiguamiento MMT

El Método de la Matriz de Transferencia (MMT) es un método aproximado que trata al sistema continuo como un sistema de n-grados de libertad, donde n es un número finito. Se plantean ecuaciones de equilibrio que se resuelven asumiendo una solución que tiene generalmente la forma de series de funciones conocidas. Este procedimiento conduce a un problema de autovalores, similar en estructura al problema de un sistema discreto de "n" grados de libertad. Su solución es un conjunto de "n" autovalores distintos, que proveen las aproximaciones para las primeras "n" frecuencias naturales o velocidades críticas del sistema, dependiendo de los datos y las simplificaciones realizadas, estos autovalores se corresponden con los "n" autovectores, que se calculan por el mismo método y son usados para construir las "n" formas modales del sistema original. Para tal fin, se aproxima la geometría del rotor a un número de discos rígidos conectados por tramos de eje (figura 2). Los discos son considerados como cuerpos rígidos y son llamados estaciones. Los tramos de eje son llamados campos. También, se consideran estaciones en los extremos, en los apoyos y los cambios de sección.

Para cada estación o campo se plantea un sistema de ecuaciones que relacione la deflexión lateral δ, el ángulo de giro ψ, el esfuerzo de corte Q, y el momento flector M_f a ambos lados de dicho elemento. Ese sistema se presenta como una matriz de coeficientes o matriz de transferencia.

$$\{\delta_i^r \quad \psi_i^r \quad M_i^r \quad Q_i^r\}^T = [T_{f/s}]_i \{\delta_i^l \quad \psi_i^l \quad M_i^l \quad Q_i^l\}^T \tag{17}$$

Por último, considerando todos los campos y estaciones se llega al sistema de ecuaciones que rige el comportamiento del rotor y se puede expresar de la forma.

$$\{\delta_{n+1}^r \quad \psi_{n+1}^r \quad M_{n+1}^r \quad Q_{n+1}^r\}^T = [T_s]_{n+1}[T_f]_n \dots [T_f]_2[T_s]_2[T_f]_1[T_s]_1\{\delta_1^l \quad \psi_1^l \quad M_1^l \quad Q_1^l\}^T \tag{18}$$

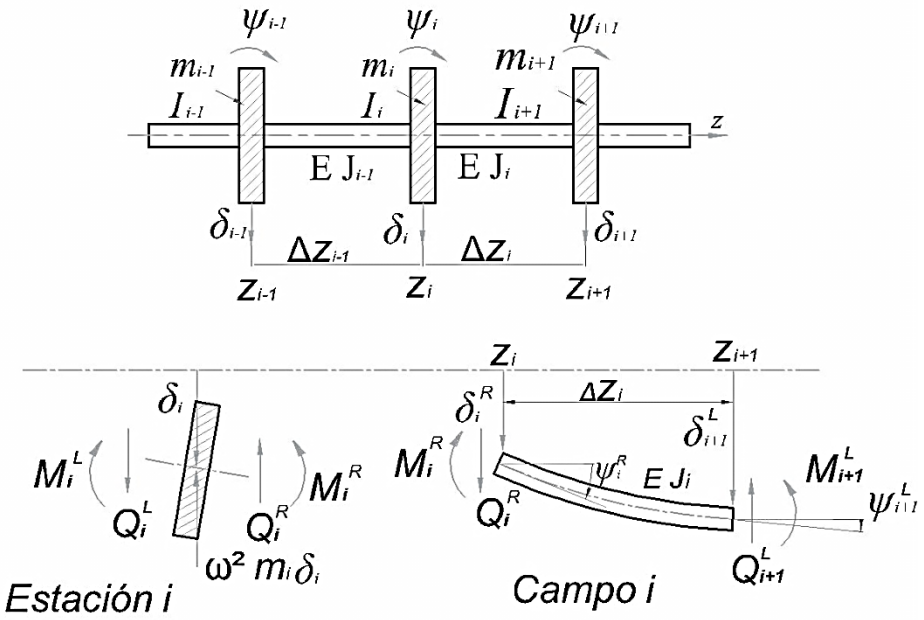


Fig. 2. Ejemplo de descomposición de un rotor en campos y estaciones.

Una vez resulta la ecuación **(18)** para una determinada condición de contorno se puede calcular los desplazamientos de cada disco incluyendo el disco desequilibrado y de esta manera determinar la respuesta en desbalance.

2.3.1. Formulación de matriz de transferencia de campo

Si se considera cada tramo de eje como una viga ideal de masa despreciable, las relaciones entre deformación y esfuerzos entre ambos extremos del campo, se pueden encontrar planteado los coeficientes de influencia que relacionan estos parámetros entre extremos de una viga, a partir de las expresiones tradicionales de la resistencia de materiales, esto permite armar el siguiente sistema de ecuaciones presentado matricialmente a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{i+1}^L \\ \psi_{i+1}^L \\ M_{i+1}^L \\ Q_{i+1}^L \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta z_i & \Delta z_i{}^2/2EI_i & -\Delta z_i{}^2/6EI_i & 0 \\ 0 & 1 & \Delta z_i/EI_i & -\Delta z_i{}^2/2EI_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} = [T_f]_i \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \textbf{(19)}$$

Donde Δz_i es la diferencia de ordenadas a lo largo del eje de los extremos del campo, *E* es el módulo de elasticidad del material e *I* es el momento de inercia de la sección respecto a un eje transversal a la misma.

2.3.2. Formulación de la matriz de transferencia de una estación

Para obtener las matrices de transferencia de cada disco o estación, algunos autores plantean la energía cinética del disco y usan el principio de Hamilton [12]. Otros, en cambio plantean las ecuaciones clásicas de movimiento de un cuerpo rígido expresando el momento cinético en un sistema solidario al disco [7]. Partiendo de esta manera, considerando el efecto giroscópico y la masa del disco, se puede llegar a un sistema de ecuaciones que permite obtener una matriz de transferencia relativamente simple para el disco [3],[10].

$$\begin{Bmatrix} \delta_i^L \\ \psi_i^L \\ M_i^L \\ Q_i^L \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_p\omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -m_d\omega^2 & 0 & 0 & 1 & m_d exc\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} = [T_s]_i \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \textbf{(20)}$$

Donde ω es velocidad de rotación, m_d es la masa del disco, I_p es el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular al de giro, los superíndices *R* y *L* indican derecha e izquierda del disco y *exc* es la excentricidad de masa del disco desbalanceado.

Algoritmo 3. Fragmento de programa simple de respuesta por el método de la matriz de transferencia para un rotor de 9 estaciones. (Se presenta solo la parte de armado de matriz de transferencia total por cuestiones de extensión).

```
function f1=MMTUNIDISCv1Respdesb(w,Omg)// función de respuesta para una ve-
locidad
.
.
.
Delta=hypermat([5 1 9])
Delta(1,1,1)=0;
   Delta(2,1,1)=((TTM(3,5,9)*TTM(1,4,9)/TTM(3,4,9))-TTM(1,5,9))/(TT-
M(1,2,9)-(TTM(3,2,9)*TTM(1,4,9)/TTM(3,4,9)));
   Delta(3,1,1)=0;
   Delta(4,1,1)=((TTM(1,5,9)*TTM(3,2,9)/TTM(1,2,9))-TTM(3,5,9))/(TT-
M(3,4,9)-(TTM(3,2,9)*TTM(1,4,9)/TTM(1,2,9)));
   Delta(5,1,1)=1;
for l =2:9
    for i=1:5
           for k=1:5
               Delta(i,1,l) = Delta(i,1,l)+TT(i,k,l-1)*Delta(k,1,l-1)
            end
        end
end
-
endfunction
```

3 Secuencia didáctica propuesta

Los modelos presentados en este trabajo, serán incluidos en una secuencia didáctica de las clases sobre dinámica de rotores. La secuencia didáctica comienza con el docente explicando el tema con rigor matemático necesario, para ello se desarrollarán las operaciones matriciales en modalidad de clase participativa o dialogada, intentando que los estudiantes recuerden los contenidos de matemáticas involucrados y las metodologías. Luego se explicarán los algoritmos a los que se arriba y se invita a los estudiantes a usar los códigos para que puedan probar valores y obtener conclusiones desde la dinámica. La secuencia se estima puede llevar entre 2 y 3 clases de 1 hora y media.

La idea de usar los algoritmos como instrumentos de prueba a manipular por los estudiantes cambiando valores de diámetros, distancia entre apoyos, masas y coeficientes de cojinetes, durante la clase, posibilita a los estudiantes ensayar distintos rotores y apreciar que pasa cuando el rotor es más rígido o cuando los soportes son más rígidos y poder contrastar los resultados con la teoría que se está presentando. No se pretende que los estudiantes desarrollen los mismos por una cuestión de tiempos y extensión de la asignatura.

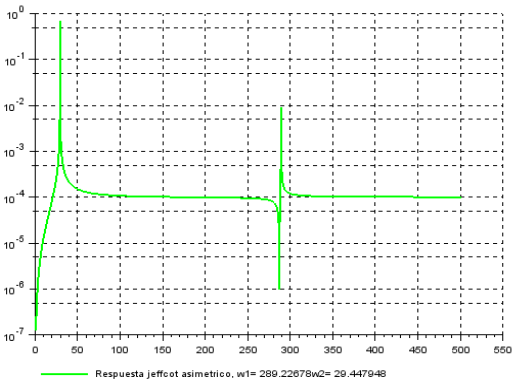


Fig. 3. Grafica obtenida por el algoritmo 1 para un rotor desbalanceado con eje de 1metro, desplazado 25cm del techo, diámetro del eje 10mm, disco de 10kg de masa y momento de inercia 0,02kgm^2

En materia de aplicación de conocimientos previos y transferencia, se puede reconocer que los estudiantes, durante la clase, deberán retomar conocimientos de ecuaciones diferenciales a los efectos de comprender que los modelos del rotor abordados se expresan como sistema de ecuaciones diferenciales que se resuelven mediante series trigonométricas. También podrán verificar que algunos problemas de rotores se reducen a un problema de ecuaciones lineales donde la solución, frecuencias naturales y formas modales, son los autovalores y autovectores del problema matemático. Finalmente deberán recordar las propiedades y la metodología de las operatorias con matrices para comprender la resolución. Todos estos aspectos de los problemas abordados, se entienden, favorecen la articulación de contenidos entre asignaturas y le permiten al estudiante apreciar la aplicación de la matemática aprendida en los años previos.

Si bien, la clase y los instrumentos desarrollados no ahondan en la didáctica de la matemática usada, porque no es el objetivo de la asignatura en cuestión, la misma durante todo su desarrollo constantemente interpela los conceptos de análisis matemático para explicar los principios físicos como modelos matemáticos de carácter diferencial o integral (fuerza y variación de cantidad de movimiento, trabajo y energía, momento de fuerzas y variación del momento cinético) y del álgebra mediante el uso de matrices y vectores para trabajar con las cantidades físicas (tensor de inercia, vectores velocidad y aceleración), por lo tanto los estudiantes están constantemente ejercitando metodologías aprendidas en las materias del área matemáticas y recurriendo a conceptos aprendidos de las mismas. Esta secuencia solo propone continuar con la articulación identificando nuevas ocasiones de uso para los aprendizajes de matemáticas y además darle el valor agregado de que los modelos matemáticos permite distintos grados de aproximación al mismo problema con resultados distintos y en ocasiones llegar a conclusiones que contradicen los preconceptos pero son verificables en la realidad.

El trabajo comienza por analizar el modelo de Rankine con sus limitaciones, luego el modelo de un rotor flexible de un solo disco sobre soportes rígidos (Jeffott), a partir de comparar estos dos modelos se pretende que los estudiantes comprendan la diferencia entre resonancia y velocidad crítica y las razones por las que se puede superar las velocidades críticas. Las gráficas que se pueden lograr con el programa del algoritmo 1 son como la presentada en la figura 3.

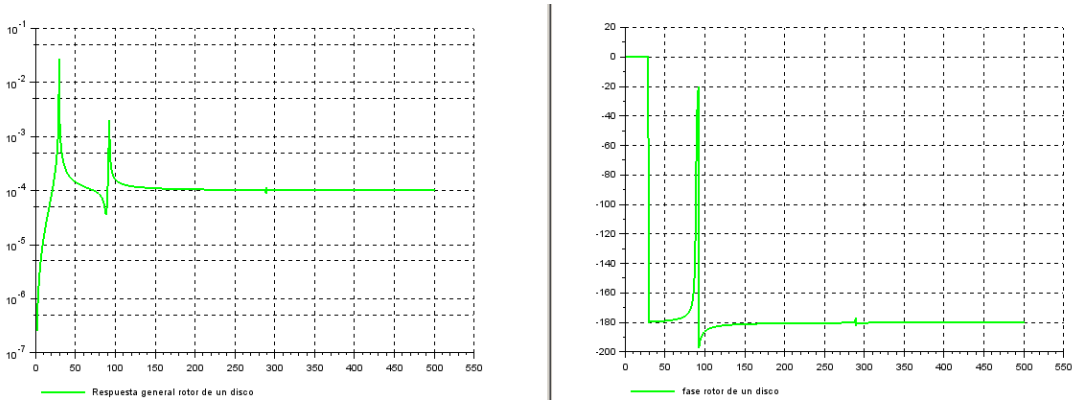


Fig. 4. Gráfica obtenida por el algoritmo 2 para un rotor desbalanceado con eje de 1 metro, desplazado 25cm del techo, diámetro del eje 10mm, disco de 10kg de masa y momento de inercia 0,02kgm^2 y cojinetes flexibles de rigideces: k_{xx} = 1000N/m, k_{yy} =44000N/m, k_{xy} =500N/m, k_{yx} =750N/m y amortiguamientos $c_{xx} = c_{yy}$ =0.5 N-s/m, $c_{yx} = c_{xy}$=0.05 N-s/m

Luego se analiza el modelo de rotor rígido sobre soportes flexibles, con el que se pretende introducir el amortiguamiento y a continuación el modelo de rotor flexible sobre cojinetes flexibles como el algoritmo 2. En la figura 4, se presenta un ejemplo de las gráficas de respuesta obtenidas por este algoritmo. Finalmente, un modelo general basado en el método de la matriz de transferencia cuyo algoritmo es presentado en parte en el apartado 2.3 de este trabajo.

Las pruebas con estos modelos matemáticos son muy importantes desde el punto de vista pedagógico porque en dinámica de rotores solo se encuentra la explicación a la situación física desde el análisis de los resultados matemáticos. La intuición y los preconceptos en general inducirán al estudiante a pensar que no se puede superar la crítica porque el punto pesado del rotor desbalanceado intenta sacar de sus soportes al eje y eso es mayor a más velocidad, pero con el análisis de los modelos aquí presentados el estudiante podrá ver que la matemática indica lo contrario y es lo que realmente se verifica en la práctica.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Estos algoritmos permiten llegar a resultados numéricos de modelos de dinámica de rotores clásicos sin necesidad de un programa comercial de elementos finitos, haciendo uso de una herramienta gratuita, y esto permite usarlo en el aula, sin necesitada de inversión económica alguna.

Los mismos no fueron usados aún como herramienta didáctica, pero se espera poder emplearlos en el corriente año. Se realizará una evaluación de resultados de la secuencia didáctica por dos caminos: mediante preguntas incluidas en un cuestionario teórico del parcial de la materia y mediante una encuesta de opinión.

En un futuro, se espera complementar estos algoritmos con un entorno gráfico.

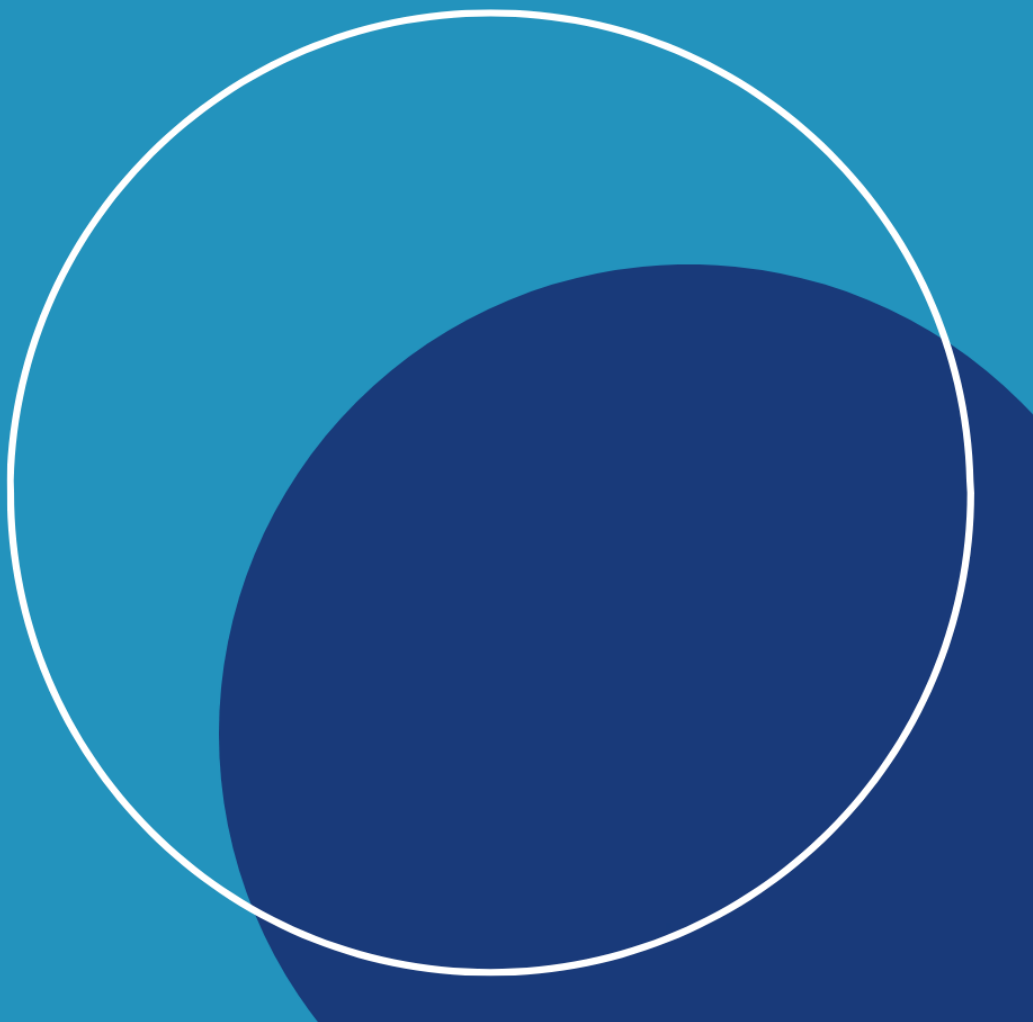
Referencias

1. Rankine, W. J. M.: On the centrifugal force of rotating shaft. *The Engineer*, N° 27, pp. 249(1869)
2. Jeffcott, H. H.: The lateral vibration of loaded shafts in neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance. *Philosophical Magazine*, Ser. 6, Vol. 37,Issue 219, pp. 304-314 (1919)
3. Vance, J. M.: *Rotordynamics of Turbomachinery*. Jhon Willey & Sons, (1988)
4. Sheng-Chung Hsieh, Juhn-Horng Chen, An-Chen Lee: A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp 294-333, (2006)
5. Meirovitch, L.: *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company, (1967)
6. Murphy, B.T.; Vance, J. M.: An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turboma-

chinery. *Transactions of the ASME- Journal of Engineering for Power*, vol. 105, pp. 591-595, (1983)
7. Ghasemalizadeh, O.; Reza Mirzaee, M.; Sadeghi, H.; Taghi Ahmadian, M.: Rotor bearing System Analysis Using the Transfer Matrix Method with Thickness Assumption of Disk and Bearing. *International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering*, Vol. 2, N° 4, pp. 206-213, (2008)
8. Varney, P.; Green, I.: Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 6258-6272,(2014)
9. Sung Jun, O.: Influence coefficients on rotor having thick shaft elements and resilient bearings. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, pp. 657-673,(2004)
10. Farshidianfar, A.; Soheili, S.: Effects of Rotary Inertia and Gyroscopic Momentum on the Flexural Vibration of Rotating Shafts Using Hybrid Modeling. *Transaction B: Mechanical Engineering*, Vol. 16, N° 1, pp. 75-86, (2009)
11. Jong-Shyong Wu; Foung-Tang Lin; Huei-Jou Shaw: Analytical Solution for Whirling Speeds and Mode Shapes of a Distributed-Mass Shaft With Arbitrary Rigid Disks. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, N° 3, ID 034503: 10 pág. (2014)
12. Chao-Yang Tsai; Shyh-Chin Huang.: Transfer matrix for rotor with parallel misalignment. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1383-1395, (2009)
13. Chao-Yang Tsai; Shyh-Chin Huang.: Vibrations of a rotor system with multiple coupler offsets. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 35, N° 1, pp. 81-100, (2011)
14. Green, I.; Casey, C.: Crack Detection in a Rotor Dynamic System by vibration Monitoring- Part I: Analysis. *Journal of Engineering for gas turbines and Power*, Vol. 127, pp. 425-436, (2005)
15. CONFEDI. (2018). *Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina: Libro Rojo de CONFEDI*. Rosario
16. Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber Sabio al Saber enseñado*. Aique
17. Martínez Alonso, G. F.; Garza, J. A. y Portuondo Padrón, R. (2008). El currículo basado en competencias y su implementación en curos de ingeniería. *Ingenierías*, XI(41), 40-50.18. Jóver, M. L. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de la ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 4(6), 81-86.

EMCI 2022

Eje: Experiencias de cátedra



EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

¿Qué opinan los estudiantes sobre el uso de GeoGebra en Análisis Matemático I?

Betina Williner[1], Adriana Favieri[1]
[1] Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Buenos Aires, Argentina
{bwilliner, afavieri}@unlam.edu.ar

Resumen. El objetivo de esta presentación es mostrar el diseño y resultados de una encuesta sobre uso de GeoGebra realizada por los alumnos de Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza durante el contexto de pandemia. Mostramos las bases teóricas de dicho diseño y la forma de implementación. La encuesta está compuesta por cinco bloques: soporte en el que se usa GeoGebra, momentos de uso, utilidad, relación con la materia e interés y motivación. Los principales resultados están relacionados con un uso mayoritario desde la web, especialmente en el momento de hacer ejercicios. A su vez el software contribuyó positivamente en la realización de gráficos, visualización de conceptos importantes de la asignatura y motivación hacia el estudio La mayoría de los estudiantes percibe que no conoce muchos comandos y que no realiza un uso colaborativo del mismo.

Palabras Clave: Encuesta, GeoGebra, Análisis Matemático I.

1 Introducción

Es mundialmente sabido que la tecnología continuamente nos presenta nuevos desafíos en el aula. En particular, existen varias experiencias sobre la incorporación de software matemático para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral. Entre los softwares más utilizados encontramos GeoGebra (GG), cuyas ventajas radican en ser de uso libre, sencillo e intuitivo, de contar con un gran desarrollo y una importante comunidad de usuarios. Además, existe una trayectoria de investigaciones sobre el uso de GG en todos los niveles educativos con resultados positivos a nivel cognitivo y de motivación: [1], [2], [3], [4], [5], [6]; [7]; [8] y [9]. Si bien cada estudio tiene sus propias características, objetivos y metodología, en general se centran en el diseño de un Applet o actividad por parte del profesor referida a un determinado contenido y los resultados de su implementación en el aula. Dentro de las conclusiones de estos estudios podemos citar que el docente debe tener una idea clara sobre el tipo de tarea que amerita uso de tecnología y qué beneficio puede aportar. Todos coinciden que es necesaria la orientación del profesor, sobre todo a la hora de formalizar contenidos. En la mayoría de los casos existe una fase de exploración en la que se usa el recurso tecnológico, predomina la habilidad visual y manipulativa y el alumno puede realizar conjeturas. Luego es necesario la formalización o institucionalización de los contenidos, siendo primordial la presencia del docente. Otra conclusión común en estas experiencias es la motivación y participación que se logra en el alumno cuando usa este tipo de recursos.

Somos docentes de la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). Hace más de una década que incorporamos tecnología al aula, en proyectos de investigación, mediante recursos y actividades diseñados con el objetivo de favorecer en los alumnos el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas y digitales. Nuestro objetivo fue (y es) crear tareas en las que los estudiantes se involucren, reflexionen, exploren, formulen hipótesis, generalicen, saquen conclusiones, ejemplifiquen, es decir,

que realicen un "trabajo matemático rico" [10] con uso de tecnología como facilitadora de esos procesos.

En los primeros años de investigación pudimos dar cuenta que los alumnos lograban un desempeño aceptable de las habilidades que fomentamos con las tareas con software matemático (en ese momento Wolfram Mathematica). Estas habilidades estaban ligadas al contenido tratado. El último proyecto, relacionado con el uso de GG durante las clases, estuvo atravesado por el contexto de pandemia, razón por la cual nos dedicamos al estudio de recursos didácticos con tecnología incorporando videos y tareas o actividades en el aula (explicaciones del profesor) con GG. Observamos que a los alumnos los motiva usar el software y que la visualización de los conceptos con esta herramienta favorece el entenderlos.

Nos interesó conocer en mayor profundidad lo que los alumnos opinaban sobre GG y sobre su uso en la clase de Análisis Matemático I de UNLaM, por lo que diseñamos una encuesta. Por lo tanto, el objetivo de este artículo es mostrar la fundamentación teórica del diseño de la misma y los resultados obtenidos.

2 Breve descripción del contexto y de cómo utilizamos GG en las clases

La materia Análisis Matemático I es de régimen cuatrimestral y cuenta con un programa tradicional de Cálculo Diferencial e Integral en una variable. La carga horaria es de 8 horas semanales y contamos con 12 comisiones de aproximadamente 80 alumnos y dos docentes cada una. Durante el año 2021 las clases virtuales se daban en forma sincrónica a través de la plataforma Teams. En general los soportes que usaron los docentes para exponer los temas fueron: diapositivas de PowerPoint, pizarrones digitales con uso de tabletas para escribir, PDF o videos.

El uso de GG en 2021 fue optativo. Durante las exposiciones varios profesores lo utilizaron como apoyo en las explicaciones de conceptos tales como:

- desplazamientos, reflexiones, contracciones y dilataciones de funciones
- función inversa
- asíntotas a una curva
- recta tangente como límite de rectas secantes
- estudio completo de funciones (extremos, crecimiento, concavidad)
- aproximación de una función por polinomios de Taylor (y recta tangente como caso particular)
- integral definida (sumas de Riemann).

A su vez varios videos de la cátedra se basan en acciones con GG. Algunos docentes realizaron actividades con los alumnos con uso de GG en forma sincrónica. Otros, en el momento, pedían captura de pantalla de lo que estaban haciendo con el software.

Las respuestas de los alumnos a la encuesta dependieron, en cierta medida y por lo explicado anteriormente, de la comisión en la que estaban cursando.

3 Encuesta sobre el uso de GG

3.1 Diseño e implementación

Para el diseño de la encuesta tuvimos en cuenta lo desarrollado por Mamani Quea [11] quien, en su estudio, se preguntó de qué manera el uso de la App de GG mejora el aprendizaje de la matemática en sus tres dimensiones: conceptual, procedimental y actitudinal frente a la resolución de problemas, en estudiantes de ingeniería. Este autor realizó una encuesta cuyas preguntas las dividió en cinco grupos:

1. Preguntas acerca del uso de GG (basadas en actividades en clase, comprensión de conceptos vistos y trabajo colaborativo)
2. Preguntas acerca de la eficiencia del uso de la App de GG (sobre acciones realizadas con GG como derivar, graficar, resolver)
3. Preguntas de dimensión conceptual (una serie de ejercicios sobre conceptos del Cálculo Diferencial)
4. Preguntas de dimensión procedimental (sobre ejecución, argumentación e interpretación con el software)

5. Preguntas de dimensión actitudinal (basadas en la motivación, trabajo con los compañeros, comunicación con el profesor)

Por su parte Lima Bendezu [12] efectuó una investigación para determinar si la aplicación de GG mejora significativamente las actitudes hacia el aprendizaje de la asignatura de Matemática en estudiantes de Licenciatura en Administración. La encuesta suministrada por la autora constó de 12 ítems divididos en las dimensiones:

1. Confianza en matemática
2. Compromiso con la matemática
3. Motivación hacia el ordenador
4. Interacción del estudiante con la matemática y los ordenadores

De las cuales consideramos estas dos últimas para la elaboración de nuestras preguntas.

Por último, nos basamos también en la encuesta presentada por Corona Sánchez, Villalpando Becerra y Vera Soria [13]. El objetivo planteado fue el de determinar el efecto que produce de poner en práctica una propuesta didáctica basada en el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval y la cual incluye el uso de GG, sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería en el tema de área entre dos curvas. Entre los instrumentos utilizados se aplicó al grupo experimental una encuesta de opinión con preguntas sobre el desarrollo de las actividades en el cuaderno de trabajo, el uso del programa GG, el desempeño del profesor y también incluyó una sección para comentarios y sugerencias.

Las secciones y preguntas recopiladas en los tres estudios anteriormente citados nos permitieron diseñar nuestra propia encuesta que dividimos en:

- *Soporte en el que se usa GG*: este bloque estuvo muy ligado al contexto de pandemia, ya que en sus hogares los alumnos podían utilizar diferentes versiones del software.
- *Momentos de uso*: en esta sección decidimos preguntar cuándo los alumnos usaban el software debido a que no estaban organizadas formalmente tareas o actividades durante la cursada.
- *Utilidad*: bloque relacionado sobre el conocimiento (o no) de varios comandos de GG, entre ellos el de graficar y resolver.
- *Relación con la materia*: aquí indagamos sobre qué aspectos del software ayudan al estudiante en su aprendizaje específico de conceptos del cálculo diferencial e integral.
- *Interés y motivación*: sección ligada a aspectos actitudinales relacionados con el uso de GG.

En el encabezado de la encuesta le comentábamos al estudiante el objetivo propuesto y le agradecíamos su respuesta. Asimismo, le pedíamos que complete en qué comisión de la materia había cursado.

Presentamos las preguntas de cada bloque. Excepto el bloque 1, los demás involucran escala Likert en las respuestas.

Bloque 1: Soporte para usar GG

Pregunta ¿Cómo usás GG?

Opciones de respuesta

- Desde la computadora o notebook (descargado)
- Desde la App en el dispositivo móvil
- Desde la web
- Desde dos o más soportes mencionados anteriormente
- No uso GG

Si la respuesta es “No uso GG”, solicitamos indicar el motivo.

Bloque 2: Momentos de uso

Brindamos las siguientes afirmaciones y los estudiantes tenían como opciones de respuestas: nunca, pocas veces, a veces, casi siempre y siempre.

- Uso GG durante el desarrollo o exposición del profesor en la clase.
- Uso GG cuando estoy haciendo los ejercicios de la guía de TP.

- Uso GG cuando estoy estudiando los conceptos teóricos de la materia.
- Uso GG en forma colaborativa con mis compañeros

Bloque 3: Utilidad

Mostramos las siguientes afirmaciones y el alumno debía responder la frecuencia con la que realiza cada una con las opciones nunca, pocas veces, a veces, casi siempre y siempre.

- Utilizo y conozco varios comandos y herramientas de GG que me permiten usarlo en cualquier situación.
- Utilizo el software GG para encontrar resultados de operaciones matemáticas como si fuese una calculadora.
- Utilizo el software GG para graficar.
- Utilizo el software GG para poder ver y analizar distintas posibilidades en alguna situación problemática o ejercicio.

Bloque 4: Relación con la materia

Dimos las siguientes afirmaciones sobre el uso de GG y el aprendizaje de la materia y el alumno debía responder el grado de acuerdo que percibía de cada una (siendo 1 totalmente en desacuerdo y 5 totalmente de acuerdo).

- Puedo entender y relacionar resultados obtenidos con los conceptos aprendidos en clases con ayuda GG.
- Puedo interpretar resultados con mayor facilidad con ayuda de GG.
- Puedo aplicar lo aprendido en clase con facilidad utilizando como apoyo a GG.
- Puedo ejecutar procedimientos para resolver problemas de la materia utilizando GG.
- Puedo justificar los resultados obtenidos con ayuda de GG.
- Puedo llegar a la solución de un problema con mayor rapidez usando GG.
- Puedo escribir en el cuaderno la información que me da GG.
- Puedo visualizar mejor el concepto tratado en clase cuando uso GG.
- Busco en la web materiales o recursos hechos con GG para poder comprender un tema específico de la materia.
- El uso de GG me vuelve dependiente de la computadora y no logro razonar por mí mismo.

Bloque 5: interés y motivación

Expusimos las siguientes oraciones sobre el uso de GG y la motivación y el alumno debía responder el grado de acuerdo que percibía de cada una (siendo 1 totalmente en desacuerdo y 5 totalmente de acuerdo).

- El uso de GG fomenta el trabajo de forma colaborativa.
- El uso de GG motiva el interés por la materia.
- El uso del GG motiva el estudio de la materia.
- El uso de GG crea un ambiente de trabajo positivo.

La diseñamos en un formulario Google (https://bit.ly/3BKBGIh) y la implementamos en noviembre de 2021. Fue respondida por 173 alumnos pertenecientes a todas las comisiones de la cátedra.

3.2 Resultados obtenidos

Bloque 1: Soporte para usar GG

Tres alumnos respondieron que no usan GG porque no aprendieron cómo hacerlo y/o no entienden su manejo Para estos alumnos la encuesta terminó, con lo cual quedaron 170 estudiantes.

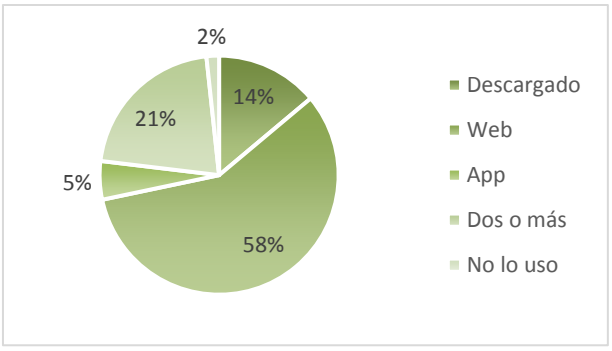


Fig. 1. Resultados de la primera pregunta de la encuesta sobre el soporte desde el cual usa GG.

La mayoría de los alumnos, casi un 60% lo usa desde la Web, solo un 14% lo utiliza descargado desde su computadora, un 21% lo utiliza en más de un soporte. Llama la atención que solo un 5% use la App desde el celular como único soporte.

Bloque 2: Momentos de uso

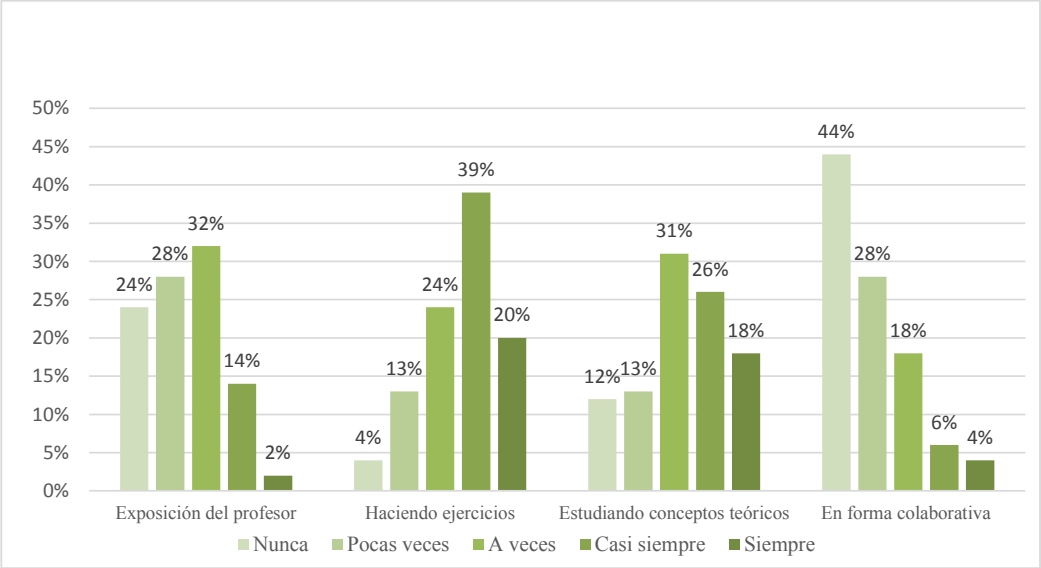


Fig. 2. Gráfico de barras con los resultados obtenidos en el bloque 2 de la encuesta.

En la lectura de los gráficos que siguen consideramos las opciones “casi siempre” y “siempre” y; “nunca y “pocas veces” juntas para poder extraer conclusiones.

La mayoría de los alumnos (62%) no lo usa cuando el profesor está desarrollando la clase, pero sí cuando hace ejercicios de la guía de trabajos prácticos (59%) en forma particular. Respecto a los conceptos teóricos, un 44% lo utiliza cuando los está estudiando y prácticamente no lo usan en forma colaborativa.

Bloque 3: Utilidad

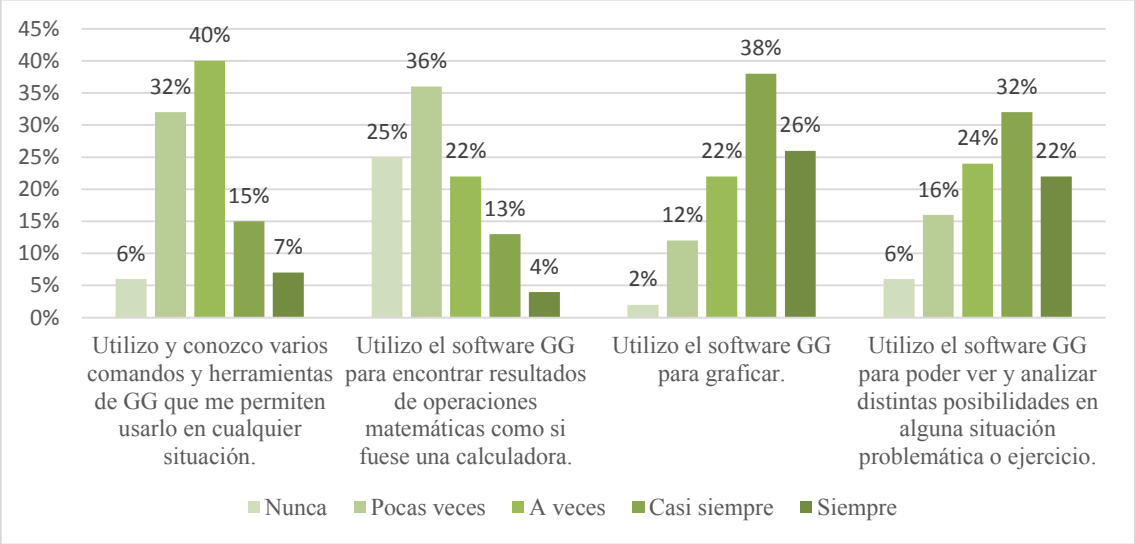


Fig. 3. Gráfico de barras con los resultados obtenidos en el bloque 3 de la encuesta.

Solo el 22% de los alumnos afirma utilizar y conocer varios comandos de GG que le permiten usarlo en forma idónea. La mayoría no lo usa como una calculadora (un 61%), pero sí para graficar (un 64%). Un 54% lo usa con frecuencia para analizar distintas situaciones problemáticas y/ o ejercicios.

Bloque 4: Relación con la materia

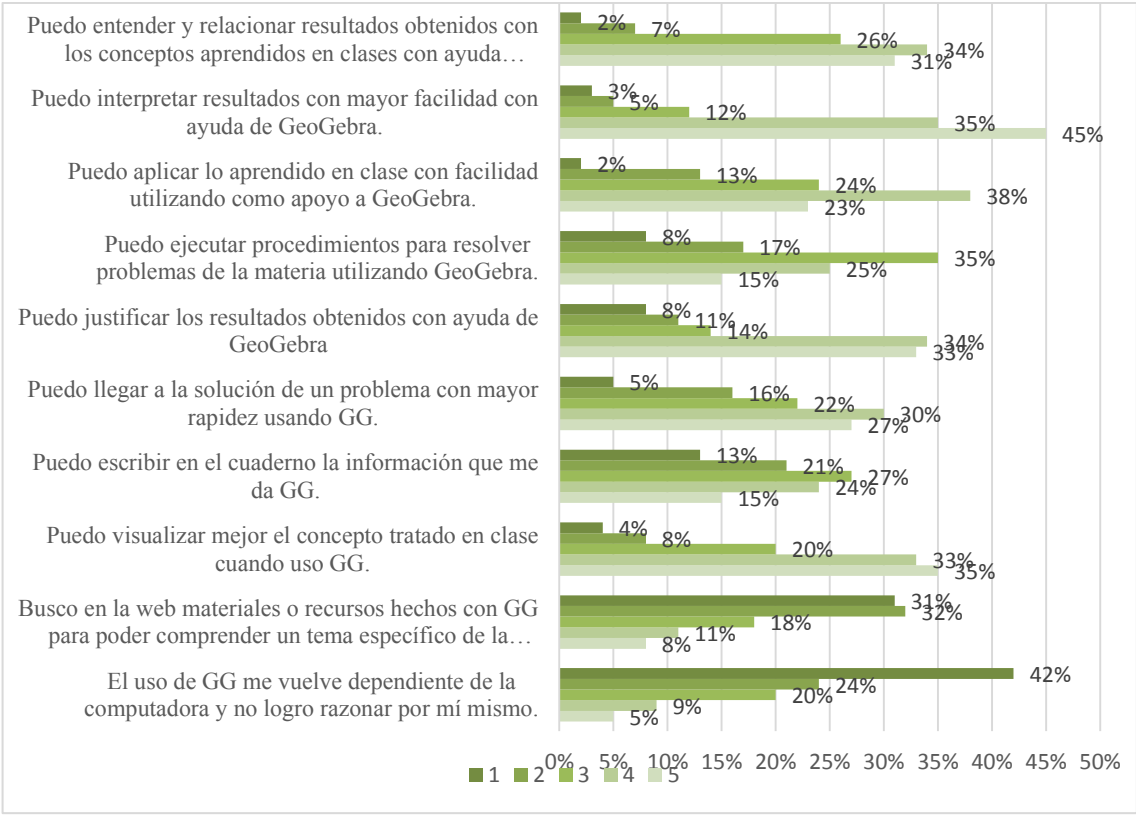


Fig. 4. Gráfico de barras con los resultados obtenidos en el bloque 4 de la encuesta.

Antes de realizar la lectura de los gráficos, recordamos que para este bloque y el siguiente, brindamos afirmaciones y el alumno debía responder el grado de acuerdo que percibía de cada una (siendo 1 totalmente en desacuerdo y 5 totalmente de acuerdo).

Un 65% de los alumnos que respondieron la encuesta puede entender y relacionar resultados obtenidos con GG con lo estudiado en clase y un 80% interpreta mejor resultados con la ayuda del software. Un 61% puede aplicar lo aprendido en clase con facilidad utilizando como apoyo a GG. Este porcentaje disminuye a 40% cuando se trata de resolver problemas con ayuda del programa. Respecto a la justificación de los resultados, un 68% afirma que el software le es de utilidad. Un 57% puede llegar a la solución de un problema con mayor rapidez usando GG y sólo un 39% de los alumnos escribe lo que obtiene. Un 68% visualiza mejor un concepto tratado en clase con la ayuda del software. La mayoría no busca materiales complementarios en la web realizados con GG ni se considera dependiente del problema para razonar.

Bloque 5: Interés y motivación

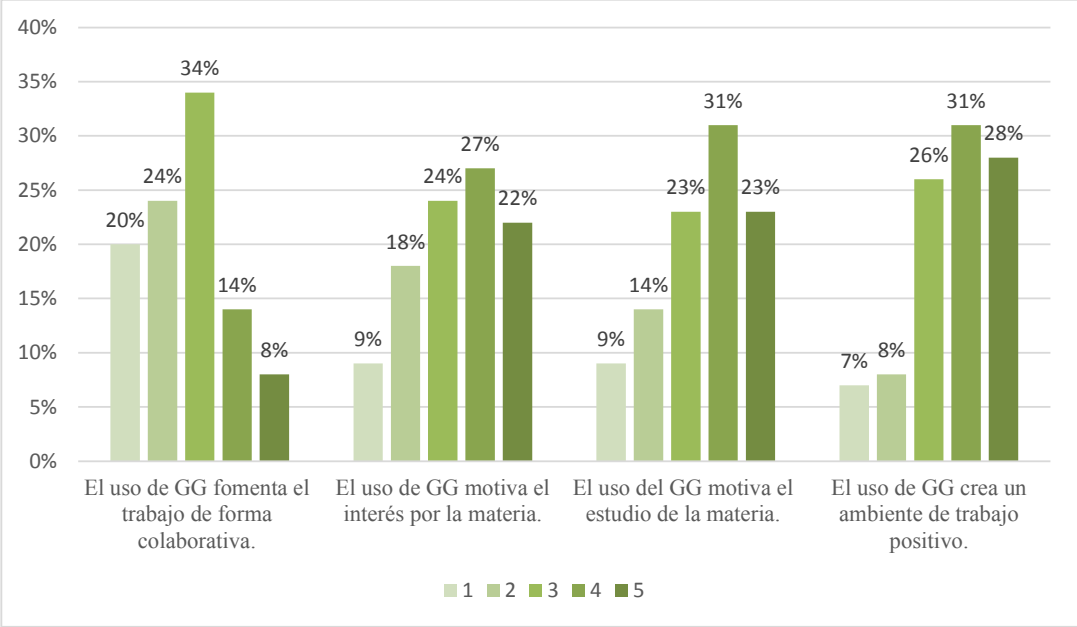


Fig. 5. Gráfico de barras con los resultados obtenidos en el bloque 5 de la encuesta.

Para un 44% de los alumnos el uso de GG no motiva el trabajo en forma colaborativa, sí el interés por la materia (49%). Cuando hablamos de la motivación por el estudio de la materia este porcentaje es levemente inferior al anterior (44%). Un 59% de los alumnos encuestados piensan que el uso de este software ayuda a crear un ambiente de trabajo positivo.

4 Reflexiones y trabajos futuros

Destacamos que el estudio bibliográfico sobre encuestas vinculadas al uso de GG incidió positivamente en el diseño de la que presentamos en este trabajo y permitió que nos concentráramos en 5 bloques bien diferenciados: *soporte en el que se usa GG*, *momentos de uso*, *utilidad, relación con la materia* e *interés y motivación.*

La encuesta se realizó a estudiantes de ingeniería que participaron de clases virtuales en las que el profesor gestionaba el uso de GG como se explicó en el apartado 2. Por lo tanto, las respuestas están condicionadas, en cierta medida, a cómo el docente utilizó el software en sus clases.

La mayoría de los alumnos usa GG desde la web y no descargado en su computadora o como App en su dispositivo móvil. Este soporte elegido tiene, tal vez, relación con la virtualidad; ya que los alumnos cursaban desde sus hogares.

En cuanto al momento en que el alumno más lo utiliza es cuando está haciendo ejercicios. A su vez pocas veces acompañan el estudio de conceptos teóricos con GG. Al respecto Costa [14] afirma que algunos alumnos logran resolver ejercicios y problemas estándar con GG, pero no hay ninguna garantía que esto conduzca a un trabajo autónomo de reflexión y comprensión.

En general no acompañan al profesor con lo que está mostrando en GG en la clase ni lo utilizan en forma colaborativa. Respecto a lo primero quizás el estudiante prefiera prestar atención a lo que muestra el docente en vez de hacerlo en forma conjunta.

No lo usan como calculadora, pero sí para graficar y analizar distintas posibilidades en los ejercicios. La mayoría percibe que no conoce todos los comandos o que no tiene un uso dúctil del mismo.

En cuanto al aprendizaje se destaca que la mayoría puede interpretar y justificar resultados con la ayuda del software y puede visualizar mejor un concepto tratado en clase.

No buscan materiales en la web para completar lo que ya tienen ni se sienten dependientes del programa para aprender.

Por último, el uso del software motiva el interés y estudio de la materia y crea un ambiente de trabajo positivo, resultado acorde a lo obtenido por diversas investigaciones ya citadas.

Como síntesis y en base a la percepción de los alumnos en la encuesta de opinión, podemos decir que el uso de tecnología con GG les ayudó a graficar, a visualizar conceptos importantes de la asignatura y a contribuir a la motivación para su estudio. La mayoría percibe que no conoce muchos comandos y que no realizan un uso colaborativo del mismo.

La información recabada en la encuesta nos da una base sólida para el diseño de actividades con uso de GG durante las clases. Creemos que es preciso guiarlos para un conocimiento más profundo del software, y dado que las clases pasan a ser presenciales, preferimos inclinarnos por el uso de la App así la tienen disponible en sus celulares y sin necesidad de conexión a internet. Pensamos que las tareas de clase deben guiar al alumno a un uso más intenso de la App y que deben estar enfocadas en el desarrollo de la reflexión, la comprensión de los conceptos matemáticos del Cálculo y un trabajo autónomo. En resumen, nos queda la inquietud sobre cómo lograr que el alumno haga un uso flexible de la App GG y ésta se convierta en una herramienta de trabajo en forma cotidiana más allá de realizar un gráfico.

Referencias

1. Barahona, F.; Barrera, O.; Vaca, B e Hidalgo: GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL (RTE),* Vol. 28, No. 5, pp. 121-132 (2015).
2. Fiallo, J. y Parada, S.: Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica,* Vol. 20, pp. 56-71 (2014).
3. García Cuellar, D.; Martinez-Miraval, M. y Flores Salazar, J.: Génesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 31, No. 2, pp. 1876-1883 (2018).
4. Garelik, M. y Montenegro, F.: Un problema de movimiento parabólico en Cálculo con uso de GeoGebra. *VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia,* pp. 410-421 (2015).
5. Pabón Gómez, J.; Nieto Sánchez, Z. y Gómez Colmenares, C.: Modelización matemática y GEOGEBRA en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología,* Vol. 7, No. 1, pp. 65-70 (2015).
6. Ramos, J.; Briceño Solís, E.; Zaldívar Rojas, J.: Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes del bachillerato con el uso de tecnología. *Revista Electrónica AMIUTEM,* Vol. IV, No. 2, pp. 15-32 (2016).
7. Ruiz, L.; Del Rivero, S. y Valenzuela, H.: GEOGEBRA: autoregulador del aprendizaje en conocimientos previos en cálculo diferencial. *Revista Entorno Académico,* Vol. 20, pp. 15-22 (2018).
8. Salcedo Lagos, P. La noción de función: su enseñanza aprendizaje realizando transformaciones de registros de representación con el apoyo de GeoGebra. Trabajo final para obtener el título de Magister en Didáctica de la Matemática. Universidad de Concepción (2018).
9. Saucedo, R.; Godoy, J.; Fraire, R. y Herrera, H.: Enseñanza de las integrales aplicadas con GeoGebra. *El Cálculo y su enseñanza,* Vol. 5, pp. 125-138 (2014).
10. Rodríguez, M.; Barreiro, P.; Leonian, P., Marin, T. y Pochulu, M. *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Ediciones UNGS (2017).
11. Mamani Quea, Loo Javier. *El uso de la aplicación móvil GeoGebra mejora el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes del primer ciclo de la Facultad de ingeniería geológica, minera y Metalúrgica de la Universidad Nacional de*

Ingeniería. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú (2021).
12. Lima Bendezu, M.P. *GeoGebra para mejorar las actitudes en el aprendizaje de matemática II, en la facultad de administración de la Universidad Nacional Micaela Bastidas, Apurímac*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional del Altiplano, Perú (2017).
13. Corona Sánchez, J.;Villalpando Becerra, J. C. y Vera Soria, G.: Propuesta didáctica para el cálculo de áreas entre dos curvas con el apoyo de GeoGebra. *EDUCATECONCIENCIA*, Vol. 29, No. 31, pp. 9-38 (2021).
14. Costa, L. J.: Problematización de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico "desde abajo hacia arriba". *Enseñanza de las ciencias*, Vol. 29, No. 1, pp. 101-114 (2011).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Tareas interdisciplinarias en Cálculo en Varias Variables

Gabriela Righetti, Silvia Seminara
Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Mozart 2300, C1407IVT - CABA
righettigab@gmail.com; seminarasilvia@gmail.com

Resumen. En este trabajo relatamos una experiencia llevada a cabo con alumnos de Análisis Matemático II, asignatura de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires (FRBA UTN). Para trabajar con el contenido multiplicadores de Lagrange, a menudo carente de sentido para los estudiantes que sólo lo ven como un procedimiento "artificial" para encontrar los valores extremos de funciones de varias variables sujetas a una o más condiciones, elegimos un problema en el área de la economía donde los multiplicadores cobran significado en el contexto de la tarea. Se propone a los estudiantes descubrir ese significado. Se los guía, para ello, a través de varios pasos que intentan imitar el razonamiento que podría seguir un ingeniero que desea extraer conclusiones de una situación problemática real. Analizamos las producciones de los alumnos y realizamos una encuesta para conocer su opinión sobre diversos aspectos de la actividad.

Palabras Clave: Problemas interdisciplinarios, Aprendizaje significativo, Competencia en resolución de problemas.

1 Introducción

Los diversos documentos elaborados desde 2014 por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) ([1], [2], [3]) implican un cambio profundo en la enseñanza de la Ingeniería. La definición del perfil del ingeniero a partir de las competencias que deberían caracterizar al egresado nos obliga a abandonar la idea de que la formación profesional puede alcanzarse por simple transferencia de conocimientos: "el mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional ('el saber'), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el 'saber hacer') [1].

Entre las competencias genéricas que definen el "saber hacer" se encuentra la de identificar, formular y resolver problemas de Ingeniería y es con respecto a esta competencia que la resolución de problemas y, en particular, de problemas contextualizados, adquiere un rol protagónico. Para contribuir al desarrollo de estas habilidades resulta imprescindible que los docentes pensemos en actividades que favorezcan las "condiciones para que los alumnos se vean confrontados a formular conjeturas, validarlas, producir argumentos deductivos, arriesgar respuestas para las cuestiones que se plantean, producir formas de representación que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan (y) reformular y reorganizar los viejos conocimientos a la luz de los nuevos que se producen" [4].

Por otro lado, todos los docentes hemos escuchado alguna vez en nuestras aulas la pregunta "¿y esto para qué me sirve?" que revela la búsqueda de sentido, por parte de los estudiantes, de los objetos matemáticos con que trabajan. Esta ausencia de "sentido" suele desmotivar al alumno, que acaba apelando a la memorización y la repetición de algoritmos para tratar de superar las demandas de la acreditación.

La resolución de problemas interdisciplinarios desde las materias básicas es una estrategia que, además de otorgar "sentido" a la tarea de los estudiantes, los introduce en la modelización matemática de los fenómenos reales, en la elaboración y puesta a prueba de conjeturas, en el análisis de respuestas y en la redacción de conclusiones, a través del empleo de problemas que pueden llegar a simular los de su futura práctica profesional, contribuyendo al desarrollo de las competencias buscadas.

Dentro del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Empleo de problemas interdisciplinarios en asignaturas de matemática en carreras de Ingeniería"[1] del que participamos desde 2018, decidimos plantear un problema relacionado con la economía de una empresa para trabajar con multiplicadores de Lagrange. Se trata de un contenido que, en general, se aplica sólo a problemas intramatemáticos o geométricos, y es muy común que los estudiantes consideren su utilización como una herramienta que les viene dada sin demasiado fundamento, y que funciona sin que alcancen a saber muy bien porqué.

En la propuesta fomentamos el trabajo con GeoGebra, para que la interpretación geométrica les facilite la comprensión y les permita anticipar conclusiones y confrontar los resultados analíticos con los gráficos. Además, guiamos a los estudiantes para que descubran por sí mismos el significado de los "misteriosos" multiplicadores, que en el contexto económico adquieren un sentido real bien preciso.

Esta experiencia fue llevada a cabo con alumnos voluntarios de Análisis Matemático II, asignatura de segundo año en las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional (FRBA UTN). Fue realizada durante el segundo cuatrimestre de 2020, en el transcurso de una cursada de carácter virtual a que obligó la pandemia; los alumnos participantes fueron pocos (un 20% del curso), creemos que por el carácter no obligatorio del trabajo y las difíciles condiciones de cursada en la emergencia, pero los resultados observados nos parecen dignos de compartir y esperamos poder repetir experiencias similares con mayor número de participantes.

2 Marco teórico

Si hablamos del "saber hacer", el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje sólo se podrá apreciar cuando se observen los saberes "funcionando".

En palabras de Font, "un aprendizaje es funcional cuando la persona que lo ha realizado puede utilizarlo de una manera efectiva, en una situación concreta, para resolver un problema determinado" [5]. Este mismo autor advierte que la comprensión es un proceso mental y que para que los objetos matemáticos sean realmente comprendidos se deben establecer relaciones no sólo entre distintos conceptos matemáticos, sino también con objetos externos, para resolver tareas. Esto es imposible de lograr a menos que se planteen problemas contextualizados. "La importancia que tiene contextualizar el conocimiento matemático es hoy en día ampliamente asumida, ya que se considera que el contexto puede ser la clave para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden con lo que, por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado" [5].

Font menciona también que numerosas investigaciones que tratan de comprender cómo hacen las personas para resolver problemas en el ámbito de sus trabajos, ponen de manifiesto la existencia de una brecha entre las matemáticas académicas y las de uso laboral, y que personas que fracasan en situaciones matemáticas académicas pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo contenido matemático; atribuye este hecho a que, en situaciones reales, las personas se sienten personalmente implicadas cognitiva, emocional y socialmente y suelen utilizar matemáticas más creativas, incluso diferentes, de las aprendidas formalmente [5]. Esta observación fundamenta la necesidad de recurrir a problemas en contextos reales si se desea alcanzar la comprensión funcional de los conceptos matemáticos como competencia del futuro egresado.

Por otra parte, debemos mencionar que los problemas en contextos reales obligan a emplear modelos matemáticos, con el consiguiente análisis de sus limitaciones y su utilidad, para lo cual es necesario cuestionarlos y confrontarlos. Oliva sitúa los modelos en el ámbito del aprendizaje: "desde el punto de vista del aprendizaje, la idea de modelo conecta con los modelos mentales de la psicología cognitiva, los cuales tienen para las personas una utilidad semejante al que poseen los modelos de la ciencia para el científico, ya que se elaboran con objeto de comprender y predecir los sistemas físicos con los que se interactúa. Son formas de pensar y de representar el mundo exterior que elaboramos y activamos los individuos cuando queremos comprender o predecir situaciones, y surgen de la necesidad de dar sentido a una situación, un problema, una conversación con otra persona, una lectura, etc., tratándose por tanto del producto de la interacción del conocimiento previo con información proveniente del exterior. Desde esta perspectiva, las ideas o concepciones del alumnado pueden reinterpretarse en términos de modelos mentales usados por los individuos para interpretar fenómenos y situaciones del mundo real" [6]. En síntesis, "los modelos son el núcleo central en torno al que se genera el conocimiento, tanto en la ciencia como en el alumno" [6].

Así, los problemas situados en contextos reales que correspondan a ámbitos de incumbencia del ingeniero tienen la doble función de dotar de sentido a los conceptos matemáticos y ejemplificar el empleo de modelos que, a la vez, interpretan el mundo y organizan el conocimiento y lo tornan significativo.

1"Empleo de problemas interdisciplinarios en asignaturas de matemática en carreras de Ingeniería", PID dependiente de la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva, FRBA UTN, Identificación del Proyecto: Cod. UTN 4390, Disp. SeCTyP 246/16.

A su vez, los problemas reales con carácter de interdisciplinares (vale decir, que involucran diversas disciplinas de la formación profesional) adquieren un valor agregado. Ackerman, por ejemplo (citado por van Linde, [7]), ha puntualizado los beneficios de la interdisciplinariedad: señala que "contribuye a generar un pensamiento flexible, desarrolla la habilidad de realizar analogías y metáforas, facilita un mejor entendimiento de las fortalezas y limitaciones de las disciplinas e incrementa la habilidad de acceder al conocimiento adquirido". Y más aún: "engrandece el pensamiento y las habilidades de aprendizaje, mejora las habilidades cognitivas de más alto orden y la retención del contenido. Igualmente, capacita para desarrollar el pensamiento proactivo y autónomo, adquirir habilidades que establezcan conexiones entre contextos aparentemente disímiles" [7]. Estos beneficios se apreciarían en toda su magnitud si todo el curriculum de Ingeniería se diseñara con carácter de interdisciplinario (ver, por ejemplo, [8]), pero la introducción paulatina de tareas con este carácter en las disciplinas tradicionales es ya una manera de encaminarse hacia el cambio.

3 Nuestra experiencia

Con la intención de incluir un trabajo interdisciplinario en nuestra asignatura (Análisis Matemático II), se elaboró una propuesta alrededor de un problema que relaciona los multiplicadores de Lagrange con conceptos económicos en el contexto de un problema realista. Economía es una asignatura que se encuentra en el plan de estudios de las carreras de Ingeniería de la UTN y que los alumnos suelen cursar con posterioridad a las matemáticas básicas, pero los conceptos involucrados en la actividad – producción y capital – no son desconocidos para ellos.

Redactamos un problema, al que llamaremos "Problema de la función de Cobb-Douglas" (Fig. 1), que es una adaptación del problema 26, p. 218, de la obra *Cálculo de varias variables* de McCallum et al. [9].

Una aplicación económica: ¿qué representan los Multiplicadores de Lagrange?

La *función de Cobb-Douglas* es una función que permite modelizar la producción de una empresa durante determinado lapso de tiempo (Q) en función del número de trabajadores que intervienen en el proceso productivo (x) y la cantidad de capital invertido (y) .

La expresión funcional es

$$Q(x,y) = cx^a y^b$$

donde a, b y c constantes positivas que dependen de la unidad de producción que se esté modelizando.

Supongan que para cierta Pyme las constantes que permiten modelar la producción, por semana de actividad, son $a = 0{,}75$; $b = 0{,}25$ y $c = 6$

a) Utilicen GeoGebra 3D para graficar la producción semanal Q de esta empresa en función del número de obreros (x) y de la cantidad de capital que se invierte (y).

b) Supongan que la producción semanal Q está expresada en miles de pesos. Encuentren los pares de valores (x, y) (cantidad de obreros y capital invertido) con los que se pueden obtener producciones de 750, 800, 850, 900 y 950 mil pesos semanales. Usen GeoGebra 2D para graficar las curvas correspondientes.

c) Supongan que el costo semanal por trabajador es de 10 y el costo semanal de capital invertido es de 20 (siempre en miles de pesos). Si se cuenta con un presupuesto semanal de 3.000.000 $ (observen que deberán considerarlo como 3000 si lo expresan en miles de pesos, como el resto de las cantidades), ¿qué expresión representaría "todas las formas posibles en que se puede repartir ese presupuesto entre el costo laboral y el costo de capital invertido"? Representen esa expresión en el mismo gráfico de GeoGebra que trazaron en el punto b).

d) Observando las curvas que trazaron en b) y c), analicen: ¿es posible, con los pares (x, y) correspondientes al presupuesto semanal de 3000, alcanzar *cualquier valor arbitrario* de producción?

e) Se desea encontrar *la máxima producción posible* para ese presupuesto semanal de 3000. Usen el método de *multiplicadores de Lagrange* para determinar ese valor de producción $Q_{\acute{o}ptima}$ y la cantidad de obreros y de unidades de capital que se deben invertir para lograrla (Ayuda: para resolver el sistema de ecuaciones resultante tal vez sea útil dividir algunas de las ecuaciones entre sí).

f) Las derivadas parciales Q'_x y Q'_y se denominan *"productividad marginal de la mano de obra"* y *"productividad marginal del capital"* respectivamente. Verifiquen que, para los valores de (x, y) encontrados en *e)*, la relación de proporción entre las productividades marginales de la mano de obra y del capital coincide con la que existe entre el *costo por unidad de mano de obra* y el *costo por unidad de capital invertido.*

g) Investiguen ahora qué ocurriría si el presupuesto disponible aumentara...
Supongan que se aumenta de 3000 a 3001, ¿en cuánto aumenta la producción $Q_{\acute{o}ptima}$? Comparen ese aumento con el valor del multiplicador de Lagrange correspondiente.
¿Qué ocurriría si el presupuesto aumentara de 3000 a 4000? ¿En cuánto aumentaría la producción $Q_{\acute{o}ptima}$?

h) Intenten explicar, con sus propias palabras, qué significado tiene el multiplicador de Lagrange en esta aplicación económica que acaban de ver.

Fig. 1. "Problema de la función de Cobb-Douglas".

El enunciado presenta, con una breve explicación, el modelo a utilizar. Luego, se plantean varios requerimientos de cálculo, gráficos y de análisis de las respuestas obtenidas, guiando a los alumnos para que obtengan varios resultados y extraigan conclusiones.

Se les solicitó a los estudiantes un análisis gráfico con GeoGebra, tanto en el plano como en el espacio, y un trabajo comparativo entre los resultados obtenidos analítica y gráficamente. Este análisis permite visualizar el sentido geométrico del método de multiplicadores de Lagrange mediante la búsqueda del paralelismo de los gradientes de dos funciones y la tangencia de las curvas de nivel. Una de las finalidades de la tarea era arribar a una interpretación del significado económico del multiplicador. Los datos dados en el ítem g) fueron elegidos teniendo en cuenta que la restricción es lineal.

El modelo, expresado por la función de Cobb-Douglas, fue explicitado para asegurar que todos los estudiantes trabajaran a partir de la misma expresión funcional.

La actividad se propuso a los estudiantes luego de una exposición de los conceptos fundamentales del método de multiplicadores de Lagrange.

La consigna fue que resolvieran el problema con todo detalle, explicitando y justificando todos los procedimientos. Podían recurrir al material teórico de clase, a la bibliografía sugerida por la cátedra, y a cualquier otra fuente de ayuda.

El trabajo se realizó en un curso virtual de 40 alumnos de Análisis Matemático II de FRBA UTN, durante el segundo cuatrimestre de 2020. La entrega del trabajo resuelto fue optativa y no vinculante en cuanto a la califica-

ción para aprobar la asignatura, en parte porque consideramos que una entrega optativa nos permitiría cuantificar el grado de interés en nuestros estudiantes.

Posteriormente se les pidió a los estudiantes participantes que completaran una encuesta, con el fin de conocer su opinión con respecto a varios ítems relacionados con este tipo de trabajos interdisciplinarios.

4 Resultados

La experiencia se realizó durante el segundo cuatrimestre del 2020, en que la asignatura se cursó en forma virtual. Durante las primeras semanas no estaba claro si se podría retornar a la presencialidad o no. Esto generó incertidumbre en los estudiantes que, además, aún estaban adaptándose a la modalidad virtual. En un ciclo lectivo anterior habíamos realizado una experiencia similar, y con el mismo carácter de voluntaria, y la participación había sido muy buena [10], por lo que creemos que la escasa participación en esta actividad (8 de 40 alumnos) se relaciona con las circunstancias excepcionales de cursada en las cuales muchos estudiantes prefirieron no sumar tareas en este contexto de emergencia si no eran obligatorias.

Observando los trabajos de los alumnos podemos decir que, en general, no hubo dificultades en el planteo de la condición de ligadura ni en la resolución analítica de los sistemas no lineales que resultan a partir del método de multiplicadores de Lagrange.

El objetivo de la pregunta g) era ayudar a responder la pregunta h), que en general fue contestada correctamente y casi todos los estudiantes pudieron encontrar una expresión matemática para interpretar el significado del multiplicador de Lagrange. Sin embargo, a algunos les resultó dificultoso expresar dicha interpretación en lenguaje coloquial.

Respecto al uso de GeoGebra, los estudiantes pudieron, en general, cumplir con la consigna sin inconvenientes; se observó que ninguno usó deslizador para los gráficos de las curvas de nivel. En la mayoría de los casos no hubo análisis del dominio de la función (por el contexto x e y deben ser positivos) ni de en qué cuadrante deberían situarse las curvas de nivel.

Seleccionamos fragmentos de algunas respuestas de los alumnos, para ilustrar su desempeño.

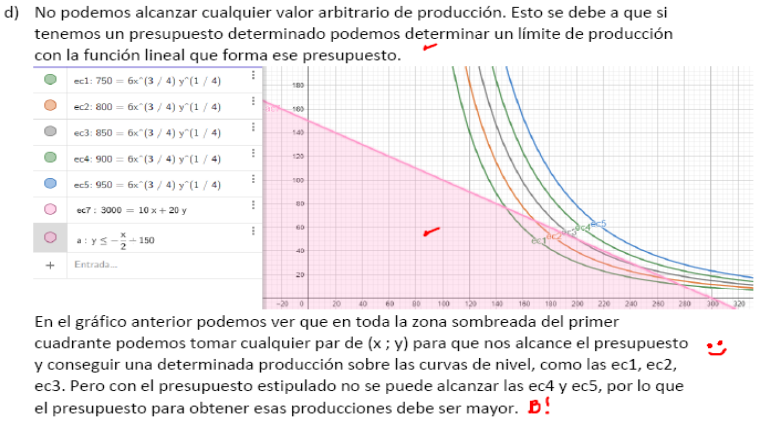


Fig. 2. Un alumno analiza por qué no se puede alcanzar cualquier valor de producción.

En la Fig. 2 se muestra el trabajo de un alumno que explica gráficamente por qué no se puede alcanzar un valor arbitrario de producción;

En la Fig. 3 se ve un análisis que procura la interpretación geométrica del método de multiplicadores de Lagrange a partir de la tangencia de las curvas. Si bien el gráfico no es exacto, este esquema ayudó al estudiante a razonar que los vectores normales deben ser paralelos.

En la Fig. 4, se observa que una resolución del sistema de ecuaciones no lineal que queda planteado;

En las Fig. 5, 6 y 7 se muestran trabajos de distintos alumnos interpretando el significado del multiplicador de Lagrange.

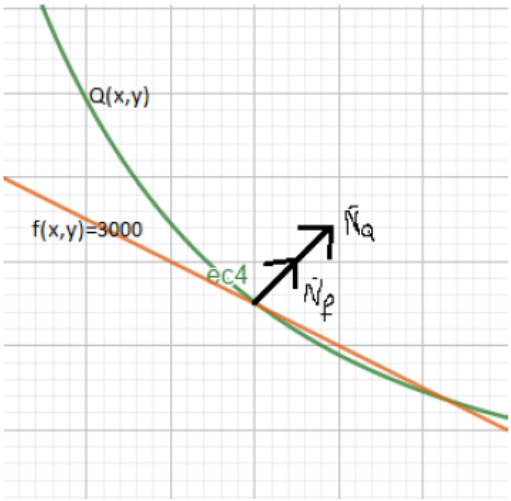


Fig. 3. Intento de interpretación geométrica del método de multiplicadores de Lagrange.

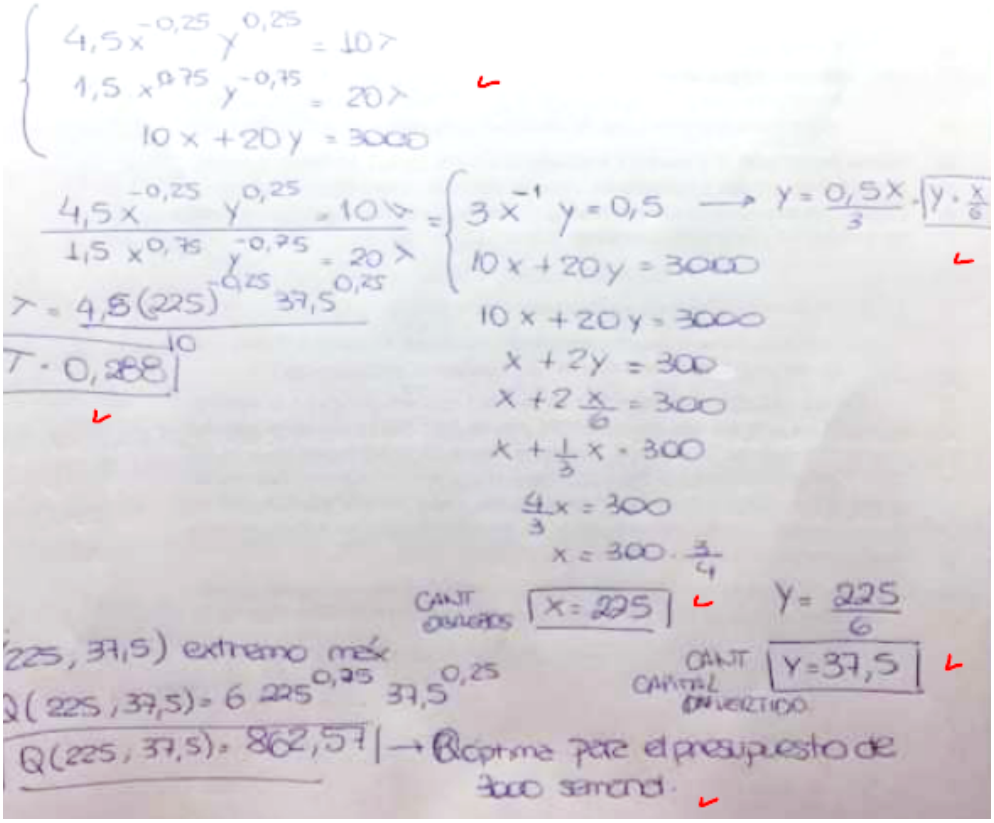


Fig. 4. Un alumno muestra la resolución del sistema.

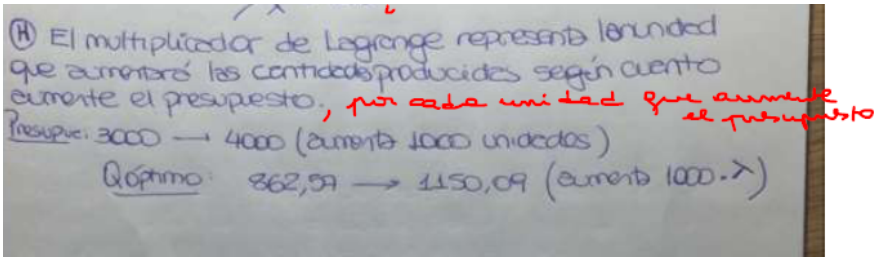


Fig. 5. Otro alumno ensaya una interpretación del multiplicador de Lagrange.

h) En el primer caso, el presupuesto disponible aumentó 1, y la producción óptima aumentó 0.2875. Es decir, con la variación de presupuesto x, la producción óptima varía λx. (Te conviene usar otra letra en vez de x)

Se verifica que en el segundo caso, el presupuesto disponible aumentó 1000 y la producción óptima aumentó $1000 * 0{,}2875 = 287{,}5$ ✓

Entonces, el multiplicador de Lagrange indica la proporción entre la variación de presupuesto semanal y la variación de la producción óptima. ✓

Fig. 6. Otra interpretación del multiplicador de Lagrange.

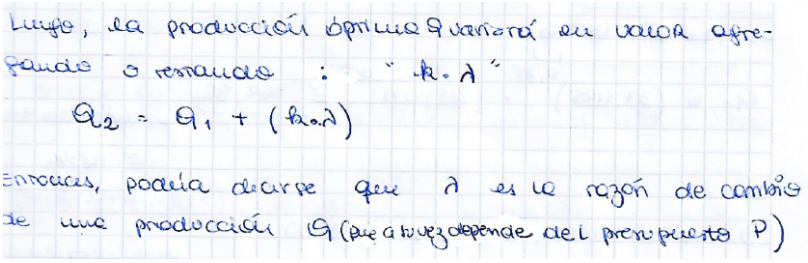


Fig. 7. Una tercera interpretación del multiplicador.

Finalmente, en las Figs. 8, 9 y 10, se presenta la encuesta realizada, con el promedio de las respuestas obtenidas.

Si bien los alumnos participantes fueron pocos y las respuestas variadas (Figs. 12a, 12 b y 12 c), el análisis de estas respuestas permite apreciar la importancia que para todos ellos tiene el hecho de relacionar la asignatura con otras disciplinas, y los beneficios que creen obtener a partir de estos trabajos de integración. Esta opinión de los estudiantes está en sintonía con los requerimientos de los nuevos diseños curriculares basados en competencias que proponen dejar de lado la fragmentación de contenidos y abordar un trabajo multidimensional. Al decir de Morin, "el conocimiento especializado es una forma particular de abstracción. La especialización « abs-trae », en otras palabras, extrae un objeto de su contexto y de su conjunto, rechaza los lazos y las intercomunicaciones con su medio, lo inserta en un sector conceptual abstracto que es el de la disciplina compartimentada cuyas fronteras resquebrajan arbitrariamente la sistemicidad (relación de una parte con el todo) y la multidimensionalidad de los fenómenos; conduce a una abstracción matemática que opera en sí misma una escisión con lo concreto, privilegiando todo cuanto es calculable y formalizable" [11]. Esta afirmación es particularmente aplicable al contenido que nos ocupa - multiplicadores de Lagrange - que suele ofrecerse a los estudiantes como una "receta" de difícil interpretación y fundamentación poco clara, que acaban aplicando "de memoria".

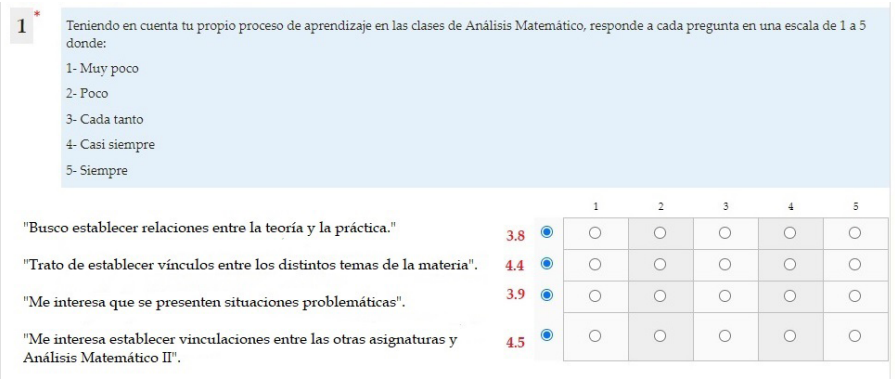


Fig. 8. Encuesta a posteriori. En rojo, el promedio de las respuestas obtenidas.

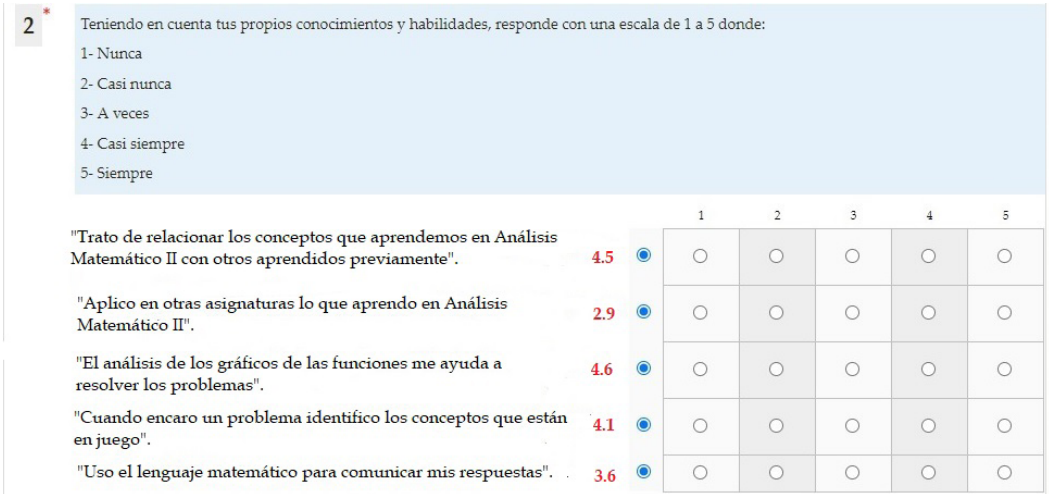


Fig. 9. Encuesta a posteriori. En rojo, el promedio de las respuestas obtenidas.

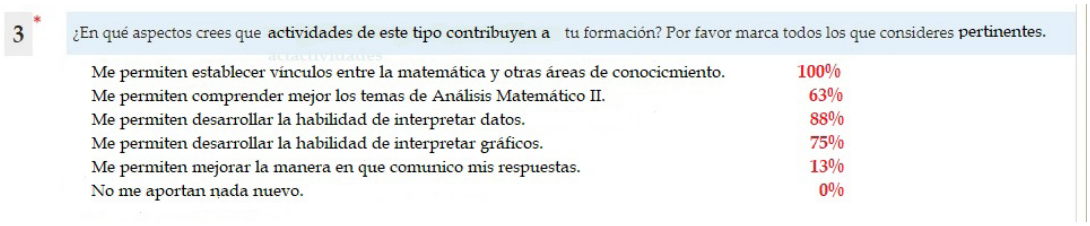


Fig. 10. Encuesta a posteriori. En rojo, los porcentajes de alumnos que eligieron cada respuesta.

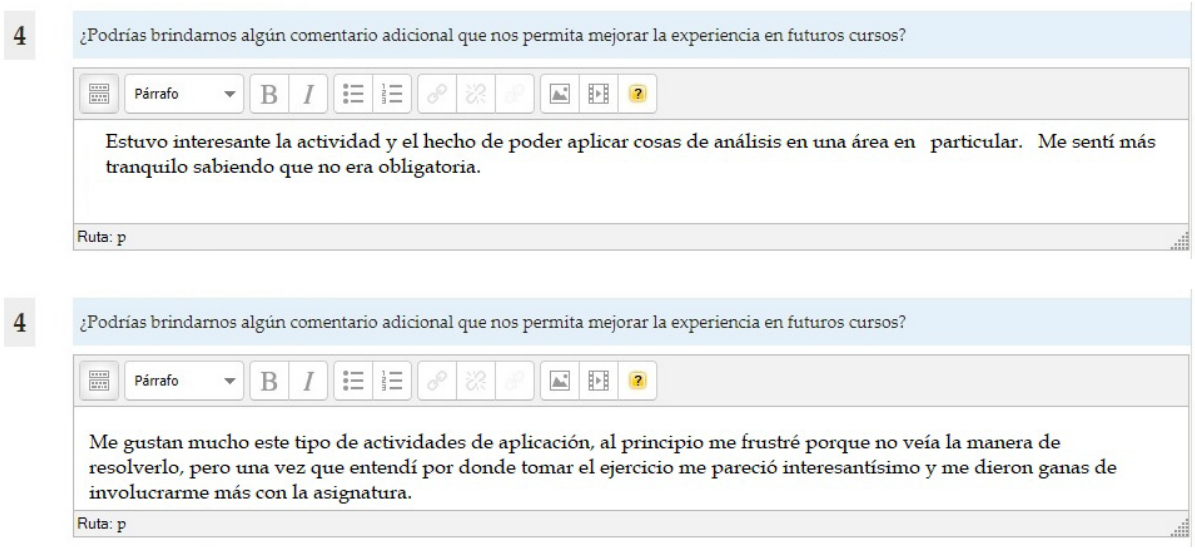


Fig. 11. Encuesta a posteriori. Dos respuestas libres.

Otro de los resultados observados es que, en su mayoría, los estudiantes manifestaron su buena predisposición a resolver situaciones problemáticas y apreciaron la importancia de ser capaces de comunicar adecuadamente los resultados.

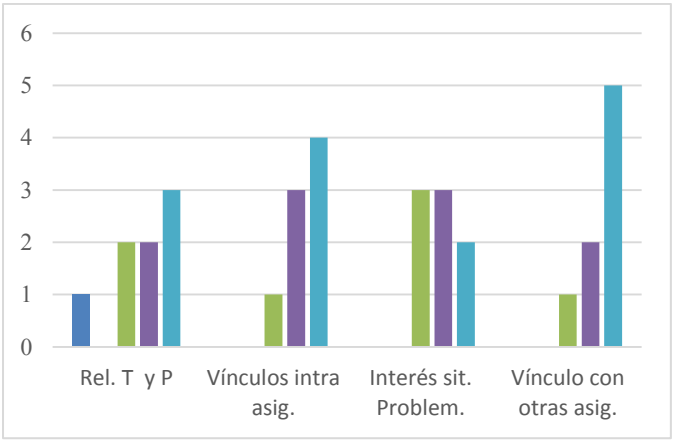


Fig. 12a. Resultados de las Pregunta 1 de la encuesta.

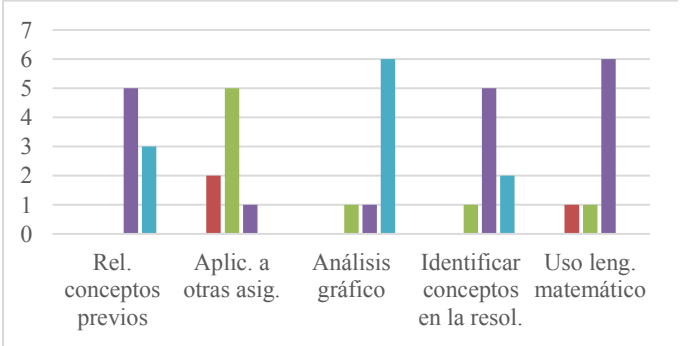


Fig. 12b. Resultados de las Pregunta 2 de la encuesta.

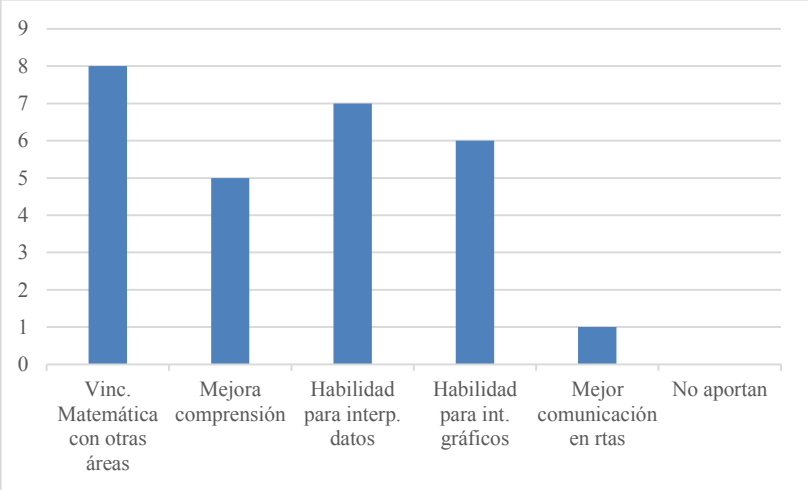


Fig. 12c. Resultados de la Pregunta 3 de la encuesta.

5 Conclusiones

Es muy frecuente que en las materias básicas los estudiantes de Ingeniería encuentren "carentes de sentido" algunos contenidos, sobre todo por no verles una aplicación inmediata en su futuro desempeño profesional. Esto desmotiva al alumnado y los conduce a un aprendizaje memorístico y de corto plazo. La utilización de tareas interdisciplinares es una alternativa para intentar dotar de significado a los conceptos y procedimientos y resulta, además, una oportunidad para estimular el desarrollo de competencias básicas como la identificación de situaciones problemáticas, el análisis de datos y gráficos, el planteo de conjeturas y su contrastación con los resultados y la comunicación efectiva de las respuestas, emulando en cierta medida el trabajo del futuro profesional. En este caso, bastaron unos pocos conceptos del área económica para ubicar una situación problemática de estudio de extremos condicionados en el ámbito, con visos de realidad, de una Pyme, que bien se le podría presentar a un futuro ingeniero. La noción, normalmente abstracta y "artificial", de multiplicador de Lagrange cobra así sentido, y es más probable que los estudiantes se hayan apropiado de manera significativa del procedimiento para estudiar extremos condicionados y sean capaces de aplicarlo en situaciones nuevas que se les pudieran presentar (líneas de trabajo futuro deberían comprender, además de la propuesta de tareas interdisciplinares en torno a otros contenidos de la asignatura, el constatar la permanencia a largo plazo de la apropiación de los conceptos involucrados en estas actividades propuestas).

Estas tareas son un intento de superar el aprendizaje rutinario, memorístico y de corto plazo que todavía caracterizan a algunos contenidos de las matemáticas básicas de las carreras de Ingeniería. Debemos ser conscientes, sin embargo, de que para algunos estudiantes puede resultar intimidante esta invitación a salir de su zona de confort - consistente en "recordar procedimientos y resolver ejercicios tipo" - y con más razón si este tipo de tareas no les son requeridas luego en la evaluación para la acreditación. La experiencia realizada fue bien recibida por un grupo de estudiantes que apreció los beneficios potenciales de la tarea propuesta, más allá de que tuviera o no peso en la acreditación, pero se trata, por el momento, de una acción aislada en un contexto que aún se resiste al cambio de paradigmas revelando una inercia difícil de romper.

La puesta en vigencia de los diseños curriculares fundamentados en competencias nos llevará, inevitablemente, a que este tipo de tareas vaya ganando espacio en nuestro trabajo diario de aula, en la medida, por supuesto, en que también se vayan viendo reflejadas en la evaluación para la acreditación.

Referencias

1. CONFEDI: *Competencias en Ingeniería*, 1ra. Edición. Mar del Plata: FASTA Ediciones, (2014).
2. CONFEDI: *Primer Acuerdo sobre Competencias Genéricas. 3er. Taller s/ Desarrollo de Competencias en la Enseñanza de la Ingeniería Argentina*. Villa Carlos Paz, 14 y 15 de agosto 2006, 3er. Informe, (2006).
3. CONFEDI: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en la República Argentina: Libro Rojo de CONFEDI*. Mar del Plata: FASTA Ediciones, (2018).
4. Sadovsky; P.: *Enseñar Matemática hoy*, 1ra. Edición. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal, (2005).
5. Font; V: "Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas". *La Gaceta de la RSME*, 10(2), pp. 427–442, (2007).
6. Oliva, J.M: Conferencia impartida en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Sociales y Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. https://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/7573/ Resumen%20Conferencia%20Jos%C3%A9%20Mar%C3%ADa%20Oliva.pdf?sequence=1. Accedido el 10 de abril de 2022.
7. Van der Linde, G.: "¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior?", *Cuaderno de Pedagogía Universitaria*, 4(8), pp. 11–12, (2007).
8. Milevicich, L.; Lois, A.: "Interdisciplinariedad. Un aspecto clave en la formación actual del ingeniero", *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación* 14, pp. 37 – 46, (2014).
9. Mc Callum; G. et al.: *Cálculo de varias variables*. México: C.E.C.S.A., (1999).
10. Righetti, G., Seminara, Silvia: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: resultados de una experiencia de aula basada en problemas interdisciplinarios*. Libro de Actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI 2021), 19 al 21 de mayo de 2021, Montevideo, Uruguay.
11. Morin, E.: *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. París: UNESCO, (1999). Traducción de Mercedes Vallejo-Gómez.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Experiencia del Estudio de Números Complejos a partir de un Ejemplo de Aplicación

Carlos A. Chiuro[1], Fernando A. Otero[1]
[1] Grupo de Matemática Aplicada a Ingeniería, Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
7600
{cchiuro, foterovega}@fi.mdp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se describe una clase presencial dictada luego del período de pandemia sobre el tema números complejos de la asignatura Álgebra A de las carreras de ingeniería. La clase se estructura como una clase invertida, donde a partir de un problema sencillo de electricidad, que es en este caso, el análisis de un circuito RL, se introducen los números complejos. Se pretende seguir dando uso al material audiovisual generado durante la virtualidad e incentivar a los estudiantes a aprender de forma autónoma. Asimismo, se describen los pasos a seguir en una estrategia metodológica con un enfoque basado en competencias, vinculadas fundamentalmente con identificar, formular y resolver problemas de ingeniería bajo un entorno de aprendizaje autónomo.

Palabras Clave: Álgebra, Estrategias de enseñanza, Números complejos. Electricidad.

1 Introducción

El aprendizaje invertido es un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa se realiza fuera del aula y el tiempo presencial se utiliza para desarrollar actividades de aprendizaje significativo y personalizado [1].

En el método tradicional el contenido educativo se presenta en el aula y las actividades de práctica se asignan para realizarse en casa. El Aprendizaje invertido da un giro a dicho método, mejorando la experiencia en el aula al impartir la Instrucción directa fuera del tiempo de clase, generalmente a través de videos. Esto libera tiempo para realizar actividades de aprendizaje más significativas tales como: discusiones, ejercicios, laboratorios, proyectos, entre otras, y también, para propiciar la colaboración entre los propios estudiantes [1].

En la asignatura Álgebra A se ha decidido a partir de la vuelta a la presencialidad utilizar el material disponible en el aula virtual de la asignatura [2] y dictar las clases presenciales a partir de los contenidos que se encuentran desarrollados en videos y/o archivos en formato PDF disponibles en la misma. Este material se elaboró durante el año 2020 debido a la virtualidad impuesta por el Aislamiento Social Preventivo Obligatorio por la pandemia del COVID19. Esto hace que la estrategia de aprendizaje invertido sea una de las más utilizadas durante las clases, aunque no la única. Este trabajo en particular se refiere a una actividad implementada para la introducción de los números complejos y sus operaciones.

2 Números complejos

Se presentará en esta sección una breve descripción del enfoque tradicional y el propuesto en cuanto a la teoría de los números complejos.

2.1 El enfoque tradicional

Tradicionalmente se han presentado los números complejos desde el punto de vista matemático formal. Se define entonces a los números complejos como el conjunto $C = \{(a,b), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ formado por todos los pares ordenados de números reales entre los que definimos una relación, la igualdad, y dos operaciones binarias que llamamos suma y multiplicación.

Igualdad: $(a,b) = (c,d)$ sii $a = c$ y $b = d$
Suma: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
Multiplicación: $(a,b) \,.\, (c,d) = (a.c - b.d, a.d + b.c)$

donde la suma y la multiplicación entre los elementos de los pares son las usuales en $\mathbb{R}$.

A partir de esta definición se dan las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación y se establece la estructura del conjunto de los números complejos como la de un cuerpo conmutativo no ordenado. Luego se introduce la representación de los números complejos en forma puntual en el plano complejo o plano de Argand-Gauss y recién entonces se presenta la unidad imaginaria $i = (0,1)$ lo que permite escribir al número complejo en su forma binómica $z = a + bi$.

2.2 El enfoque propuesto

En esta propuesta de clase, se presenta a los números complejos a partir de una aplicación a la ingeniería y al buscar información en internet se obtiene inicialmente la forma binómica que es la más utilizada, junto a la exponencial, en las aplicaciones ingenieriles. Por lo tanto las operaciones de suma, resta, multiplicación y división se introducen en la forma binómica, poniendo menor énfasis en la estructura algebraica.

3 La clase

En esta nueva modalidad, previo a la clase presencial, se indica a los alumnos por medio del aula virtual que vean los videos disponibles en la misma respecto del tema números complejos. En estos videos se explican las operaciones con números complejos tanto en forma binómica como en forma polar y se muestra la representación en el plano complejo.

Habitualmente, durante las clases presenciales se retoman los contenidos desarrollados en los videos, a través de preguntas o de ejercicios integradores. Para realizar esta experiencia, en lugar de abordar los contenidos con las actividades guiadas ya mencionadas, se presenta el problema que está enunciado en la próxima sección. Debe tenerse en cuenta, que es la primera clase presencial en la que se trabaja la unidad de números complejos.

3.1 Problema

Dado el circuito serie RL que se muestra en la fig. 1:

a. Calcula la impedancia y la admitancia de este circuito.
b. Calcula la corriente que circula por el circuito.
c. Representa en un mismo gráfico la corriente que circula por el circuito y la tensión aplicada (representación fasorial).
d. Representa en un mismo gráfico la reactancia inductiva, la resistencia y la impedancia y analiza la relación entre ellas.
e. Calcula el factor de potencia del circuito.

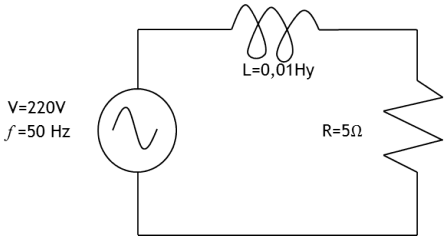


Fig. 1. Diagrama del circuito serie RL utilizado para el ejercicio.

3.2 Explicación de los elementos del diagrama

Antes de comenzar a resolver el problema, se explica a los alumnos el significado de los diferentes símbolos que se observan en el diagrama de la fig.1, mostrando ejemplos por medio de una presentación en PowerPoint. En la fig. 2 se muestran las equivalencias entre los modelos y objetos de la vida cotidiana. Se explica así que el círculo con la onda senoidal representa la tensión de línea de 220V, 50Hz que es la tensión presente en los enchufes de nuestras casas y que varía en forma senoidal 50 veces por segundo, que es la frecuencia. Las líneas que unen los componentes son cables, la bobina o inductancia es un alambre de cobre barnizado y enrollado como puede verse por ejemplo en el bobinado de un motor. Y la resistencia es la oposición que todos los materiales tienen al movimiento de sus electrones y en este caso representa la resistencia del alambre de la bobina.

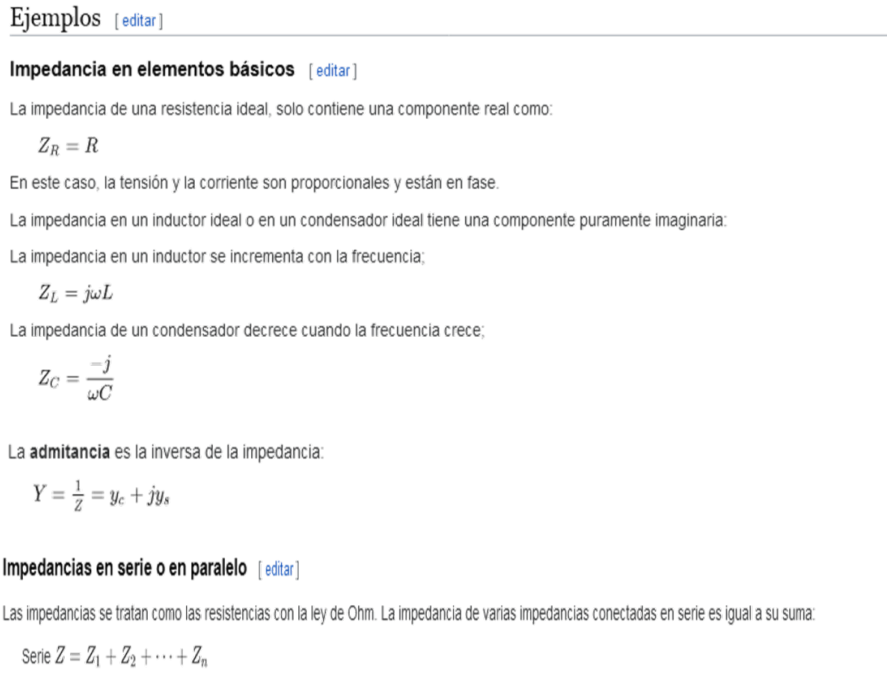
Fig. 2. Equivalencia entre los símbolos del diagrama del circuito y los elementos físicos que representan.

3.3 Desarrollo del problema

Una vez explicados los elementos que conforman el circuito se invita a los estudiantes a trabajar en grupos pequeños utilizando la siguiente guía que se proyecta en pantalla. Los alumnos se pueden conectar a la red de la facultad mediante sus dispositivos móviles para llevar adelante esta tarea. El docente actúa como guía recorriendo los distintos grupos.

1 Investiga en internet los conceptos de impedancia y admitancia y cómo se calculan para el caso de una bobina (L) y de una resistencia (R). Busca además cómo se calcula la impedancia total de un circuito serie.
2 Analiza qué tipo de números son los que se utilizan para el cálculo de impedancia de bobinas y resistencias y que tipo de número se obtiene cuando ambas se combinan en un circuito serie y resuelve los 3 primeros incisos del problema dado.
3 Expresa en forma polar R(resistencia), x_L(reactancia inductiva) y z(impedancia) y resuelve el inciso d).
4 Averigua en internet qué es y cómo se calcula el factor de potencia de un circuito y resuelve el inciso e).

Para el primer punto, si bien pueden encontrar información en distintos sitios de internet, a modo de ejemplo vemos en la fig. 3 una captura de lo que pueden encontrar en Wikipedia [3].


Ejemplos [editar]

Impedancia en elementos básicos [editar]

La impedancia de una resistencia ideal, solo contiene una componente real como:

$$Z_R = R$$

En este caso, la tensión y la corriente son proporcionales y están en fase.

La impedancia en un inductor ideal o en un condensador ideal tiene una componente puramente imaginaria:

La impedancia en un inductor se incrementa con la frecuencia;

$$Z_L = j\omega L$$

La impedancia de un condensador decrece cuando la frecuencia crece;

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

La **admitancia** es la inversa de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z} = y_c + jy_s$$

Impedancias en serie o en paralelo [editar]

Las impedancias se tratan como las resistencias con la ley de Ohm. La impedancia de varias impedancias conectadas en serie es igual a su suma:

Serie $Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$

Fig. 3. Captura de la información extraída de internet sobre impedancia y admitancia.

Luego de que los alumnos han tenido un tiempo razonable para buscar esta información, el docente pregunta qué encontraron y qué dudas se les presentan con lo que hallaron. Las dudas que se presentan más frecuentemente son acerca de qué representan j y ω. El docente explica que j es la unidad imaginaria a la que nosotros llamamos i, pero que en electrónica y electricidad se suele llamar j para no confundir con otra magnitud a la que se llama i. También menciona que $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia medida en Hz y pregunta a los alumnos si, observando los datos del problema, pueden saber cuánto vale f en este caso.

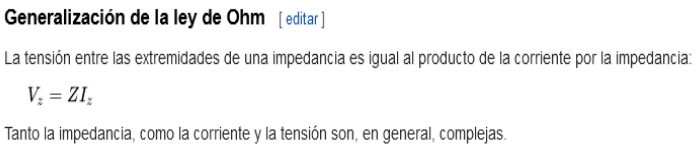
Con la información obtenida los estudiantes pueden resolver el inciso a) del ejercicio dado. A continuación se pide que algún alumno escriba sus respuestas en el pizarrón y los demás digan si llegaron al mismo resultado. Los resultados esperados son:

$Z_R = R = 5$
$Z_L = i\omega L = i.\ 2\pi.50.0{,}01 \cong 3{,}14i$
$Z = Z_R + Z_L \cong 5 + 3{,}14i$

El docente pregunta qué tipo de números se han obtenido en cada caso a lo cual la mayoría de los alumnos coincide en que Z_R es real, Z_L es imaginaria y Z es compleja. A partir de esto el docente puede hacerles recordar el concepto de parte real y parte imaginaria de un número complejo y que el conjunto de los números complejos incluye a todos los otros conjuntos numéricos que han visto, siendo los números reales números complejos con parte imaginaria nula, y los imaginarios números complejos con parte real nula.

Al llegar al inciso b) del problema, los alumnos se encuentran con un nuevo concepto que quizás algunos conozcan y otros no, que es el de corriente eléctrica. Aquí algunos alumnos pueden repetir lo hecho antes y buscarlo en internet, aunque otros preguntan al docente: Cuando esto sucede, el docente los invita a continuar con la me-

todología empleada antes fomentando de esta manera el trabajo autónomo. En la fig. 4 se muestra lo que pueden encontrar sobre corriente eléctrica en Wikipedia [4].



Generalización de la ley de Ohm [editar]

La tensión entre las extremidades de una impedancia es igual al producto de la corriente por la impedancia:

$$V_z = ZI_z$$

Tanto la impedancia, como la corriente y la tensión son, en general, complejas.

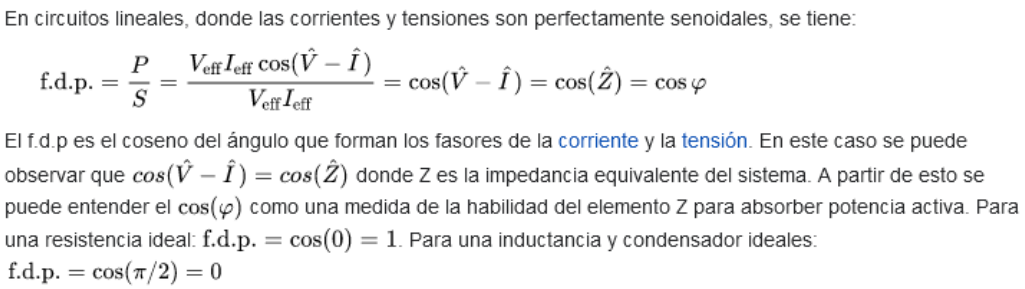
Fig. 4. Captura de la información extraída de internet sobre corriente eléctrica.

Con la información obtenida los estudiantes pueden resolver el inciso b) del problema

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{z}} \cong \frac{220}{5+3{,}14\mathrm{i}} = \frac{220}{5+3{,}14\mathrm{i}} . \frac{5-3{,}14\mathrm{i}}{5-3{,}14\mathrm{i}} = 31{,}5 - 19{,}8\mathrm{i}$$

Como los estudiantes ya han visto en los videos la forma polar y la representación en el plano de Argand Gauss se invita a algún alumno a desarrollar en el pizarrón el punto 3 y resolver los incisos c) y d) del problema.

Para terminar con el problema los alumnos buscan en internet cómo se calcula al factor de potencia (f.d.p.) de un circuito. A modo de ejemplo, en la fig. 5 podemos ver lo que se encuentra al respecto en Wikipedia [5]. En esta figura podemos ver que hay mucha información que no es fácilmente comprensible para un alumno de primer año de una carrera de ingeniería. Por lo cual es importante que el docente haga notar la necesidad de descubrir cuál es la información relevante para el problema en cuestión, y descartar lo demás. En este caso podemos ver que dice que el factor de potencia es el coseno del ángulo que forman la corriente y la tensión, magnitudes que ya han sido calculadas y graficadas previamente.



En circuitos lineales, donde las corrientes y tensiones son perfectamente senoidales, se tiene:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\hat{V} - \hat{I})}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \cos(\hat{V} - \hat{I}) = \cos(\hat{Z}) = \cos\varphi$$

El f.d.p es el coseno del ángulo que forman los fasores de la corriente y la tensión. En este caso se puede observar que $cos(\hat{V} - \hat{I}) = cos(\hat{Z})$ donde Z es la impedancia equivalente del sistema. A partir de esto se puede entender el $\cos(\varphi)$ como una medida de la habilidad del elemento Z para absorber potencia activa. Para una resistencia ideal: $\text{f.d.p.} = \cos(0) = 1$. Para una inductancia y condensador ideales: $\text{f.d.p.} = \cos(\pi/2) = 0$

Fig. 5. Información extraída de internet sobre factor de potencia.

En este caso $V = 220 = 220$ y por lo tanto arg (V) = 0 mientras que $I \cong 31{,}5 - 19{,}8\mathrm{i} = 37{,}2\lfloor 328°$ y por lo tanto arg(I) ≅ 328°. Entonces arg(V) – arg(I) ≅ 0° – 328° = – 328° + 360° = 32° y fdp ≅ cos 32° ≅ 0,848

4 La encuesta

En esta oportunidad y por ser la primera vez que se realizó esta experiencia, una vez terminada la clase, se invitó a los alumnos a completar una encuesta disponible en el aula virtual de la materia. La encuesta estaba formada por 3 preguntas, cada una de las cuales tenía 3 opciones de respuesta: mucho, poco, nada. Las preguntas que se hicieron fueron:

1. El ejemplo del circuito, ¿Te ayudó a comprender mejor el tema de números complejos?
2. ¿Pensás que el uso de un ejemplo de aplicación te hizo más interesante el tema?
3. ¿La actividad te permitió conocer la importancia del uso de los números complejos en ingeniería?

En las figuras 6, 7 y 8 se pueden ver los gráficos con los porcentajes de respuesta de los alumnos. El total de alumnos presentes en la clase fueron 85, de los cuales 55 enviaron la encuesta. En el análisis de los resultados de

la misma, se nota que si bien a la mayoría de los estudiantes, el ejemplo no les ayudó en la comprensión del tema en sí, aumentó su interés por el estudio del mismo.

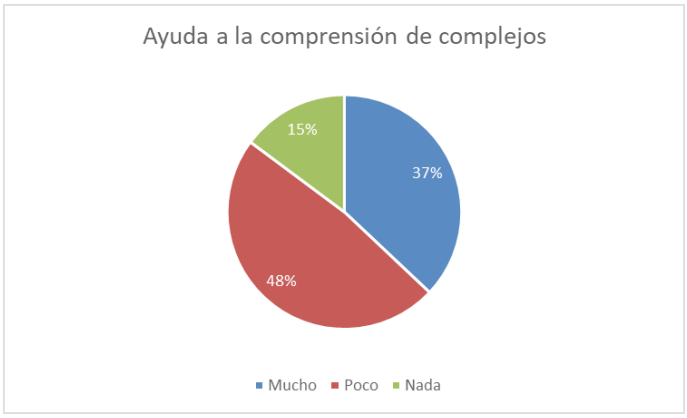


Fig. 6. Gráfico de porcentajes de respuestas a la pregunta 1.

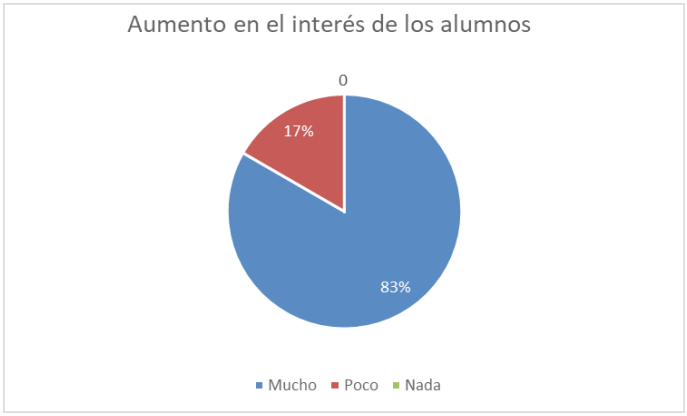


Fig. 7. Gráfico de porcentajes de respuestas a la pregunta 2.

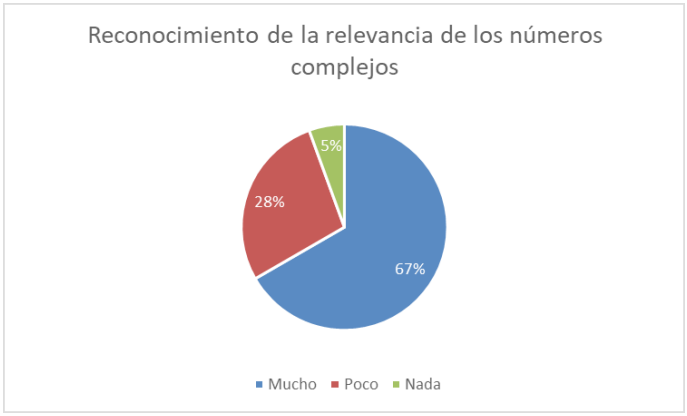


Fig. 8. Gráfico de porcentajes de respuestas a la pregunta 3.

5 Conclusiones y trabajos futuros

En relación al uso de la clase invertida se ha notado un aumento de la participación de los estudiantes en los en-

cuentros presenciales respecto a lo que sucedía antes de la pandemia. Queda por ver si esta mayor participación se traduce en una mejor comprensión de los temas y por lo tanto en un porcentaje mayor de alumnos que acrediten la materia. No es posible asegurar esto último ya que a la fecha de elaboración de este trabajo no se han tomado exámenes parciales.

En relación con dar la clase comenzando con un ejemplo de aplicación a la ingeniería, surge de la encuesta realizada que la presentación de este tipo de actividad aumenta el interés de los alumnos por el tema de estudio. Queda por delante implementarlo en las demás comisiones de la materia y buscar ejemplos de aplicación sencillos para otros temas de la materia. En este sentido el inconveniente que puede surgir es la falta de conocimiento por parte de los docentes sobre los temas relacionados a una rama específica de la ingeniería, por lo cual habría que analizar posibles estrategias para formar a estos docentes en estos aspectos específicos.

Agradecimientos. Los autores agradecen la colaboración de los estudiantes de Álgebra A que participaron de la clase y completaron la encuesta en forma anónima, así como el apoyo financiero del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la UNMdP.

Referencias

1. Escamilla, J. y col.: Aprendizaje invertido. *Edu Trends*. https://observatorio.tec.mx/edutrendsaprendizajeinvertido (2014). Accedido el 1 de marzo de 2022
2. Cátedra de Álgebra A, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata: Unidad 2: Números Complejos. https://ciclobasico.fi.mdp.edu.ar/course/view.php?id=59 (2022). Accedido el 23 de marzo de 2022.
3. Colaboradores de Wikipedia: Impedancia. *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Impedancia (2022). Accedido el 23 de marzo de 2022.
4. Colaboradores de Wikipedia: Corriente Eléctrica. *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Corriente_el%C3%A9ctrica (2022). Accedido el 23 de marzo de 2022.
5. Colaboradores de Wikipedia: Factor de Potencia. *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Factor_de_potencia (2022). Accedido el 23 de marzo de 2022.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Evaluación Formativa para el Aprendizaje de Transformaciones de Funciones Elementales según el Enfoque Basado en Competencias

Valeria Iliana Bertossi[1], Cristian Ricardo Bernal[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610
{vbertossi, cbernal}@frsf.utn.edu.ar

Resumen. El paradigma pedagógico en educación superior basado en la formación de competencias exige prácticas evaluativas diferentes a las tradicionales, en las que se hacía foco en la acreditación al final del proceso de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, la evaluación formativa y continua, cuya función principal es la de promover y mejorar los aprendizajes de los estudiantes durante el proceso, se erige como práctica consustancial del enfoque por competencias. La presente comunicación socializa y discute los resultados de una experiencia de evaluación formativa en el espacio curricular de Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional que implementa las tres formas de evaluar según el agente que la lleva a cabo: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.

Palabras Clave: competencia, enfoque basado en competencias, evaluación por competencias, evaluación formativa, resultados de aprendizaje, transformaciones de funciones

1 Introducción

A fines del año 2016, cumplidos los dos ciclos de acreditación de las carreras de Ingeniería en Argentina, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) inició un camino de revisión de estándares y de propuestas de innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje para desarrollar los conocimientos, habilidades, capacidades, competencias, actitudes y valores necesarios para el ejercicio de la profesión en aras a satisfacer las demandas actuales del mercado laboral y de la sociedad en su conjunto. El proceso concluyó con la edición del Libro Rojo [1], que condensa las competencias genéricas, competencias específicas y descriptores de contenidos mínimos necesarios para garantizar la formación de calidad de profesionales de Ingeniería en orden al cumplimiento de las actividades reservadas (y estrictamente esas actividades) especificadas por el Consejo Interuniversitario Nacional para cada terminal. Esto generó un marco conceptual para la educación en ingenierías que responde al Enfoque Basado en Competencias (EBC) y centrado en el estudiante, en el que la evaluación cobra relevancia, no como elemento externo, aislado y sumativo que aporta únicamente a la acreditación, sino como parte concomitante del propio proceso de enseñanza y aprendizaje, que dé cuenta de forma continua de los avances de los alumnos, sus comprensiones y confusiones abriendo un espacio en beneficio de la autorregulación de los aprendizajes, a la vez que evidencie los desatinos en las estrategias de enseñanza que sean necesarias reajustar para orientarlas hacia los resultados de aprendizaje que se pretenden de los estudiantes en línea con los objetivos de la planificación pedagógica.

La evaluación formativa se consolida así como el punto de partida para regular las dos dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje: (i) los procesos de construcción llevados a cabo por los alumnos sobre los contenidos académicos, para tomar conciencia si se encuentran en el camino señalado por la intención educativa; y (ii) la eficacia de las estrategias pedagógicas ejecutadas por el profesor que apuntan a que sus alumnos logren autonomía en la comprensión, manipulación y aplicación de los contenidos.

Sin embargo, Ríos y Herrera [2] advierten que la evaluación en los modelos educativos centrados en la formación de competencias ha sido relegada de las innovaciones curriculares, en parte por la dificultad para comprender qué es una competencia y en parte por el reto que significa transformarla en objeto evaluativo con diseño propio, implementación y formalización en diferentes instrumentos evaluativos.

En este sentido, la presente contribución pretende dar una respuesta a ese desafío. Presenta, en el marco del EBC, un diseño e implementación de evaluación formativa a través de una experiencia de cátedra para el aprendizaje de transformaciones realizadas sobre funciones elementales y el impacto que operan dichas transformaciones sobre cotas, extremos absolutos, período, asíntotas y paridad. La experiencia se llevó a cabo en el espacio curricular de Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Ingeniería de la Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional. Se aplicaron los tres tipos de evaluación que involucran a los distintos agentes evaluadores: autoevaluación (el propio sujeto es evaluador de sí mismo), coevaluación (los pares someten a juicio las elaboraciones de sus compañeros) y heteroevaluación (el docente evalúa a sus alumnos).

El artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se enuncia el marco teórico, la sección 3 describe los materiales y métodos aplicados en la experiencia, en la sección 4 se exponen los resultados y finalmente se discuten los mismos, se vierten las conclusiones y se proponen trabajos futuros.

2 Marco teórico

2.1 Sobre las competencias

El concepto de competencia entraña una discusión compleja que no es sino el reflejo de la complejidad inherente a todo proceso de formación, lo que hace difícil encontrar en la literatura una definición precisa del término. Aun así, esas definiciones, que no son cabales en sí mismas, se complementan, completan y enriquecen unas a otras. Entre ellas podemos encontrar la que propone CONFEDI [3]: "[competencia] es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales". Según Tobón [4] "[las competencias son] procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético, con la meta de contribuir al desarrollo personal, la construcción y afianzamiento del tejido social, la búsqueda continua del desarrollo económico-empresarial sostenible, y el cuidado y protección del ambiente y de las especies vivas".

Por otro lado, el EBC no se limita a la formación del individuo únicamente para su desempeño en el contexto profesional, sino que pretende potenciar su vida futura, planteando contenidos de significado integral aplicables a la vida misma [5]. Cano (2008) [6] sostiene que este diseño promueve en las personas el desarrollo de "capacidades amplias, que les permitan aprender, y desaprender, a lo largo de toda su vida para adecuarse a situaciones cambiantes". Según Kowalsky et al. [7] el EBC supone cambiar la lógica de pensar la formación: pasar de sólo *enseñar recursos*, esto es, los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a una combinación de *enseñar recursos* junto a *enseñar a articular, movilizar e integrar esos recursos*.

Para estructurar el contenido de la formación universitaria y las habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes se han clasificado las competencias en genéricas y específicas. Las primeras son comunes a todas las titulaciones y están relacionadas con el desarrollo personal de los sujetos, involucran habilidades interpersonales, aptitudes para la comunicación, capacidad de trabajar en equipo, de aprender y actualizarse permanentemente, de análisis y de síntesis y de toma de decisiones, entre otras. Por su parte, las competencias específicas se relacionan con las actividades reservadas de cada titulación y le confieren entidad y consistencia al programa de estudios [8].

En el plano académico, como educadores, sólo accedemos a algunos atisbos de esas competencias que se aspiran desarrollar, a unas cuantas evidencias de lo que los alumnos son capaces de hacer con los contenidos curriculares (conceptuales, procedimentales y actitudinales): los resultados de aprendizaje (RA). Éstos no reflejan ni expresiones de deseo del docente ni sus preferencias ni sus intenciones ni idea peregrina alguna sobre lo que le gustaría que el alumno haga. Bajo el EBC los RA expresan taxativamente los desempeños que se espera de los estudiantes en una estructuración coherente, significativa lógicamente, que los relaciona por un lado con los contenidos académicos (su comprensión, manipulación y aplicación) y por otro, con las competencias a las que tributarán

de manera progresiva y evolutiva a lo largo de la cursada de una asignatura en particular, de la carrera en general, y que, posteriormente, se irán perfeccionado con el devenir de la vida profesional. CONFEDI [3] explicita que un RA "describe lo que se espera que sepan los estudiantes y sean capaces de hacer al final de un cierto período de aprendizaje (Ciclo, módulo, unidad, etc.) o cuando se gradúan. Se relaciona con las habilidades, conocimientos y conductas que los estudiantes adquieren a medida que avanzan en su carrera".

2.2 Sobre la evaluación

Las conceptualizaciones del apartado anterior dejan entrever que las competencias suponen saberes en acción que comienzan a desarrollarse en un continuo durante la academia, evolucionan a través del tiempo y se pulen con el ejercicio de la profesión en situaciones concretas. En consecuencia, no pueden pensarse como un concepto estanco y acabado, lo que impacta indefectiblemente en su evaluación. Tardif [10] propone pensar esta última bajo una mirada videográfica en lugar de fotográfica. CONFEDI [3] la define como "uno o más procesos formativos que sirven para identificar, recolectar y preparar datos que permitan determinar el logro de los resultados del aprendizaje. La evaluación puede utilizar tanto métodos cualitativos como cuantitativos, según cuál sea el resultado del aprendizaje a verificar, y debe ser entendida como un proceso de mejora". Al respecto, Anijovich y González [11] sostienen que la forma de evaluar consustancial a la enseñanza por competencias es la de tipo formativo y auténtico, ya que es procesual, tiene por finalidad contribuir a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes (a la vez que impacta en el rediseño o ajuste de las estrategias de enseñanza) y los induce a activar sus competencias para la vida, más allá del entorno académico, al enfrentarlos a tareas situadas, problemas relevantes y complejos del mundo real, en los que apliquen sus conocimientos previos y demuestren la comprensión de los nuevos. Se pretende así formar estudiantes autónomos que tomen conciencia sobre qué es lo que están haciendo, cómo lo están haciendo, qué estándares deben alcanzar y cómo harán para lograrlo. Además, la evaluación formativa se ocupa de los aspectos afectivos porque se interesa por el impacto que provoca en el alumno el modo con el que el docente le hace una devolución. Sintetizando, los autores distinguen los siguientes aspectos de la evaluación formativa:

- *Continuidad* en el proceso de mejora de los aprendizajes de los alumnos.
- *Aumento de la probabilidad de que todos los estudiantes aprendan*.
- *Comunicación de las expectativas de logro*. El docente comunica con claridad los estándares que espera que logre el alumno, como una manera de que éste aprenda autónomamente hacia dónde va, por qué y para qué.
- *Retroalimentación.* Es la devolución hecha sobre el trabajo realizado por el alumno con la intención que utilice esa información en futuros desempeños. Ocupa un lugar relevante, no sólo porque impacta sobre los aspectos emocionales de la autoestima del estudiante, sino también sobre la producción de sus tareas dado que su finalidad es ayudarlo a mejorar sus aprendizajes. En este sentido, en la comunicación importa no sólo el contenido sino también la forma; el impacto (negativo o positivo) de la retroalimentación está vinculado al modo que el docente emplea, al sentido de oportunidad y a la situación o contexto en la que se realiza [12].
- *Criterios de evaluación públicos y compartidos*. El docente los construye junto a sus estudiantes. Esto contribuye a que el propio estudiante sea conocedor de sus propios procesos, identifique en qué momento del aprendizaje se encuentra, por dónde tiene que avanzar y hacia dónde.

Otro aspecto de la evaluación, si se pretende que sea un proceso de mejora continua de los aprendizajes, es no limitarla a una mera ejecución del profesor, sino que participen todos los sujetos implicados [13]:

- *Autoevaluación.* El alumno es evaluador de su propio progreso según pautas dadas por el profesor. Ejercitar esta práctica favorece el desarrollo de su autonomía y autocrítica, lo motiva y compromete con el proceso educativo intensificando la responsabilidad en su propio aprendizaje y promoviendo la honestidad en el juicio valorativo de sus desempeños. La potencialidad de este tipo de evaluación radica en que la capacidad de reflexionar sobre los logros y lo que aún falta es en sí misma una competencia a desarrollar en el estudiante.
- *Coevaluación.* Es un proceso en el que los pares se constituyen agentes evaluadores que someten a juicio las producciones de sus compañeros, teniendo como base ciertos criterios y propiedades de calidad de las evidencias presentadas. Además de agudizar los conocimientos adquiridos y fomentar procesos metacognitivos de supervisión, fortalece actitudes del saber ser como la responsabilidad, la honestidad, la lealtad,

el compañerismo, entre otras, reforzando su desarrollo integral en un ambiente de formación democrática y orientado a la interacción de los sujetos [2].

- *Heteroevaluación.* El profesor, quien dispone del conocimiento disciplinar experto y es el primer responsable de la formación de sus estudiantes, emite su juicio profesional y riguroso sobre los desempeños de éstos.

3 Materiales y Métodos

La experiencia tuvo lugar en el espacio educativo de la asignatura Análisis Matemático I en dos comisiones de primer año de carreras de Ingeniería de la Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional. Una de la terminal Industrial y la otra de Sistemas de Información (ISI), de 47 y 49 alumnos respectivamente. El proceso evaluativo fue de tipo formativo, justamente porque se llevó a cabo durante el proceso de aprendizaje del tema transformaciones de funciones elementales, sin pretender acreditación, sino con el claro propósito que interpreten y comprendan el tema para ser capaces de aplicarlo en los venideros. La experiencia implicó la planificación de la actividad evaluativa y su implementación a lo largo de cinco momentos diferentes: (i) acciones extra clase previas; (ii) transformaciones de funciones; (iii) coevaluación; (iv) autoevaluación metacognitiva; (v) heteroevaluación y retroalimentación. La experiencia insumió dos clases de tres horas cátedra cada una para los momentos (ii) y (iii). El alumno requirió, además, dos horas extra clase para (i) más minutos adicionales en (iv).

3.1 Planificación de la actividad

En primer lugar, se identificaron las competencias genéricas de egreso (CGE) comunes a todas las carreras de Ingeniería [3] vinculadas al tema a evaluar (Tabla 1).

Tabla 1. Competencias genéricas de egreso asociadas al tema Transformaciones de funciones.

CGE	Enunciado	Tipo
1	Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería	Tecnológicas
2	Comunicarse con efectividad	Sociales, políticas y actitudinales
3	Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global	
4	Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo	
5	Aprender en forma continua y autónoma	

En segundo lugar, se redactaron los RA esperados que contribuyen al logro progresivo de cada CGE, siguiendo la sintaxis de cuatro componentes especificada en (1) que proponen Kowalski et al. [7].

$$\textbf{RA = [Verbo] +[Objeto de conocimiento]+ [Finalidad/es]+ [Condición/es]} \quad (1)$$

- **[Verbo]** responde a la pregunta ¿qué hacer? Identifica la actuación que deberá demostrar el estudiante sobre el objeto de conocimiento al finalizar una unidad temática o un curso. Se redacta en tercera persona del presente del modo indicativo y pertenece a alguno de los niveles del dominio cognitivo de la taxonomía Bloom [9]: (i) conocimiento; (ii) comprensión; (iii) aplicación; (iv) análisis; (v) síntesis o (vi) evaluación
- **[Objeto de conocimiento]** responde a ¿con qué hacer? Refiere al saber que debe mostrar el alumno en relación a alguna de las dimensiones de la competencia: (i) saber conocer (conceptos y teorías); (ii) saber hacer (habilidades procedimentales y técnicas) y (iii) saber ser (actitudes y valores).
- **[Finalidad/es]** responde a ¿para qué hacer? Indica, en el contexto del verbo y el objeto de conocimiento, para qué se actúa. Puede haber más de una finalidad.
- **[Condición/es]** responde a ¿cómo hacer? Hace mención a: (i) calidad; (ii) contexto; (iii) disciplina o (iv) ejecución. Puede haber más de una condición.

En la Tabla 2 se listan los RA relacionándolos con las CGE a la que tributan (primera columna) [1] y en orden creciente de complejidad según la taxonomía Bloom (última columna) [9].

Tabla 2. Resultados de aprendizaje del tema Transformaciones de funciones.

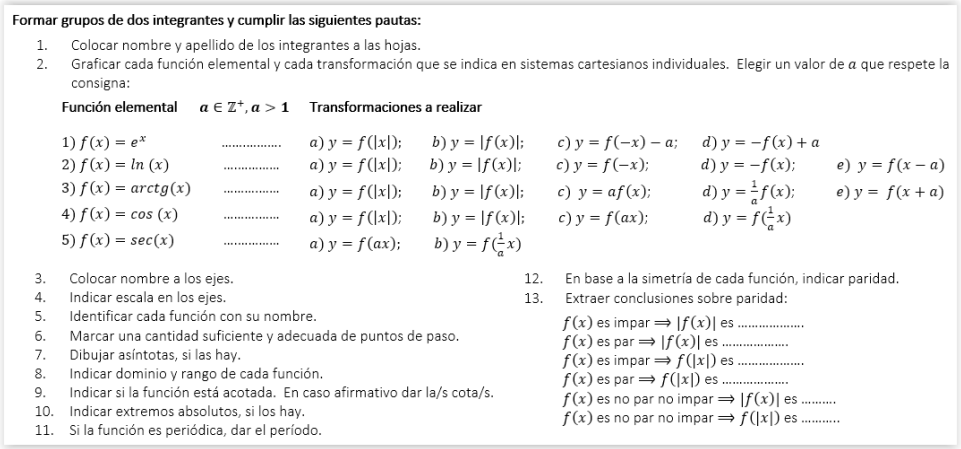
CGE	RA	Verbo *¿qué hacer?*	Objeto de conocimiento *¿con qué hacer?*	Finalidad *¿para qué hacer?*	Condición *¿cómo hacer?*	Nivel del Dominio cognitivo
1-2-3-5	2	Grafica	las funciones	para visualizar su comportamiento	empleando todos los elementos cartesianos (ejes, escala, puntos de paso, curvas, asíntotas)	Conocimiento
1-3-5	8	Identifica	el domino	para condicionar todas las operaciones a realizar con la función	aplicando los conocimientos de precálculo	Conocimiento
1-3-5	3	Interpreta	el concepto de extremos absolutos	para identificarlos en las gráficas	diferenciándolos del concepto de cota	Comprensión
1-3-5	4	Interpreta	el concepto de cotas	para identificarlas en las gráficas	diferenciándolas del concepto de extremos absolutos	Comprensión
1-3-5	5	Interpreta	el concepto de asíntota	para señalarla en las gráficas	distinguiéndola del concepto de cota	Comprensión
1-3-5	6	Clasifica	paridad	para relacionarla con su cálculo analítico	según el tipo de simetría de la gráfica	Comprensión
1-3-5	7	Decodifica	el período	para facilitar la realización de gráficas de funciones periódicas	teniendo en cuenta el coeficiente de la variable independiente	Comprensión
1-3-5	9	Reconoce	el rango	para determinar el alcance de la función	observándolo de la gráfica	Comprensión
2-3-5	10	Prepara	el informe	para comunicar su producción	considerando la prolijidad y las notaciones gráficas y simbólicas propias de la Matemática	Aplicación
1-2-3-4-5	1	Aplica	Transformaciones a funciones elementales	para interpretar los cambios que provocan en las gráficas	utilizando lápiz y papel, Geogebra, el libro de cátedra y trabajando en parejas	Aplicación

3.2 Primer momento: acciones extra clase previas

Se solicitó a los alumnos que instalaran Geogebra en sus celulares y que visualizaran en horario extra clase dos videos explicativos, uno sobre gráficas de funciones elementales y el otro sobre las distintas transformaciones aplicables. Estos recursos fueron reutilizados de clases virtuales desarrolladas y grabadas en pandemia durante el ciclo lectivo 2021. Las funciones elementales trabajadas fueron: identidad, parábola, parábola cúbica, hipérbola equilátera, trigonométricas, hiperbólicas, exponencial natural y logaritmo natural. Las transformaciones operadas fueron: desplazamiento vertical y horizontal; alargamiento y contracción vertical y horizontal; reflexión vertical y horizontal; valor absoluto a la función; valor absoluto a la variable independiente. Además, los alumnos contaban con las explicaciones del tema en libro de cátedra [14], aunque no se les indicó expresamente que lo consultaran.

3.3 Segundo momento: transformaciones de funciones

Dentro de la primera clase presencial, los alumnos fueron agrupados en parejas según su libre elección para realizar con lápiz y papel la actividad detallada en la Fig. 1. En la misma se solicita graficar algunas funciones elementales más un conjunto de transformaciones, además de señalar las asíntotas en la gráfica e indicar dominio, rango, cotas, extremos absolutos, paridad y período. Se les permitió dar soporte a la tarea haciendo uso de los siguientes materiales: aplicación móvil Geogebra, libro de cátedra y apuntes personales. Durante el desarrollo de la actividad el docente pasó por los bancos para monitorear el trabajo y estar disponible para evacuar dudas. Si finalizada la clase el trabajo no se hubo terminado quedó de tarea para traerlo resuelto la próxima semana.



Formar grupos de dos integrantes y cumplir las siguientes pautas:

1. Colocar nombre y apellido de los integrantes a las hojas.
2. Graficar cada función elemental y cada transformación que se indica en sistemas cartesianos individuales. Elegir un valor de a que respete la consigna:

Función elemental	$a \in \mathbb{Z}^+, a > 1$	Transformaciones a realizar				
1) $f(x) = e^x$	.....	a) $y = f(\|x\|)$;	b) $y = \|f(x)\|$;	c) $y = f(-x) - a$;	d) $y = -f(x) + a$	
2) $f(x) = ln\,(x)$	.....	a) $y = f(\|x\|)$;	b) $y = \|f(x)\|$;	c) $y = f(-x)$;	d) $y = -f(x)$;	e) $y = f(x - a)$
3) $f(x) = arctg(x)$	.....	a) $y = f(\|x\|)$;	b) $y = \|f(x)\|$;	c) $y = af(x)$;	d) $y = \frac{1}{a} f(x)$;	e) $y = f(x + a)$
4) $f(x) = cos\,(x)$	.....	a) $y = f(\|x\|)$;	b) $y = \|f(x)\|$;	c) $y = f(ax)$;	d) $y = f(\frac{1}{a} x)$	
5) $f(x) = sec(x)$	.....	a) $y = f(ax)$;	b) $y = f(\frac{1}{a} x)$			

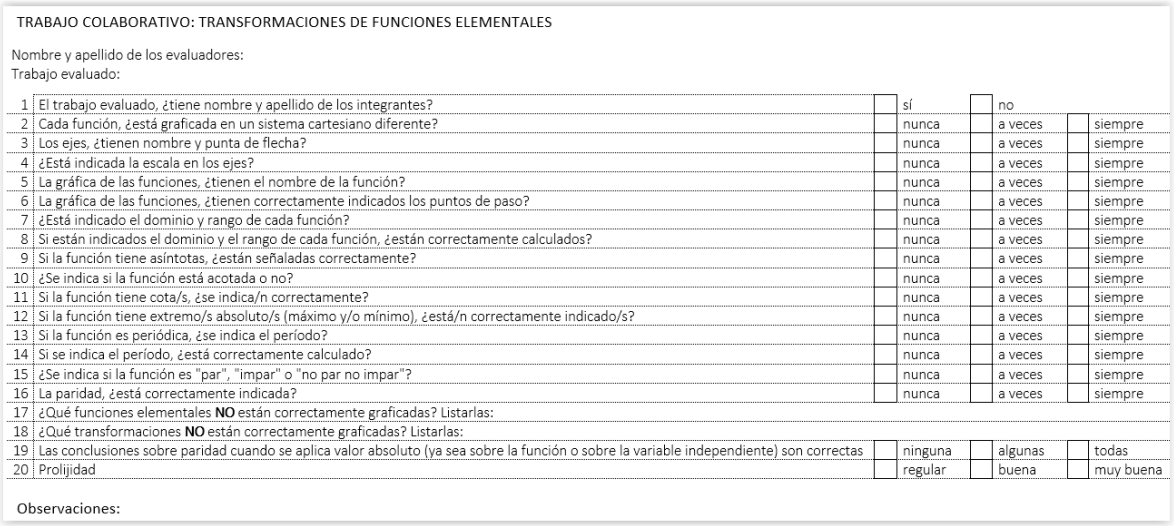
3. Colocar nombre a los ejes.
4. Indicar escala en los ejes.
5. Identificar cada función con su nombre.
6. Marcar una cantidad suficiente y adecuada de puntos de paso.
7. Dibujar asíntotas, si las hay.
8. Indicar dominio y rango de cada función.
9. Indicar si la función está acotada. En caso afirmativo dar la/s cota/s.
10. Indicar extremos absolutos, si los hay.
11. Si la función es periódica, dar el período.
12. En base a la simetría de cada función, indicar paridad.
13. Extraer conclusiones sobre paridad:

$f(x)$ es impar $\Rightarrow |f(x)|$ es .....
$f(x)$ es par $\Rightarrow |f(x)|$ es .....
$f(x)$ es impar $\Rightarrow f(|x|)$ es .....
$f(x)$ es par $\Rightarrow f(|x|)$ es .....
$f(x)$ es no par no impar $\Rightarrow |f(x)|$ es .....
$f(x)$ es no par no impar $\Rightarrow f(|x|)$ es .....

Fig. 1. Consignas de la actividad.

3.4 Tercer momento: coevaluación

En una segunda clase, a la semana siguiente de concluido el segundo momento, las producciones fueron intercambiadas entre los diferentes grupos para llevar adelante una coevaluación no anónima. Se distribuyó a los alumnos, ahora en su función de evaluadores, la lista de cotejo mostrada en la Fig. 2. Se les pidió, además, que marcaran en los trabajos evaluados los errores encontrados y que al lado indicaran la respuesta correcta. En esta oportunidad el docente también supervisó el proceso pasando por los bancos y resolviendo eventuales inquietudes.



TRABAJO COLABORATIVO: TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES ELEMENTALES

Nombre y apellido de los evaluadores:
Trabajo evaluado:

1	El trabajo evaluado, ¿tiene nombre y apellido de los integrantes?		sí		no	
2	Cada función, ¿está graficada en un sistema cartesiano diferente?		nunca		a veces	siempre
3	Los ejes, ¿tienen nombre y punta de flecha?		nunca		a veces	siempre
4	¿Está indicada la escala en los ejes?		nunca		a veces	siempre
5	La gráfica de las funciones, ¿tienen el nombre de la función?		nunca		a veces	siempre
6	La gráfica de las funciones, ¿tienen correctamente indicados los puntos de paso?		nunca		a veces	siempre
7	¿Está indicado el dominio y rango de cada función?		nunca		a veces	siempre
8	Si están indicados el dominio y el rango de cada función, ¿están correctamente calculados?		nunca		a veces	siempre
9	Si la función tiene asíntotas, ¿están señaladas correctamente?		nunca		a veces	siempre
10	¿Se indica si la función está acotada o no?		nunca		a veces	siempre
11	Si la función tiene cota/s, ¿se indica/n correctamente?		nunca		a veces	siempre
12	Si la función tiene extremo/s absoluto/s (máximo y/o mínimo), ¿está/n correctamente indicado/s?		nunca		a veces	siempre
13	Si la función es periódica, ¿se indica el período?		nunca		a veces	siempre
14	Si se indica el período, ¿está correctamente calculado?		nunca		a veces	siempre
15	¿Se indica si la función es "par", "impar" o "no par no impar"?		nunca		a veces	siempre
16	La paridad, ¿está correctamente indicada?		nunca		a veces	siempre
17	¿Qué funciones elementales **NO** están correctamente graficadas? Listarlas:					
18	¿Qué transformaciones **NO** están correctamente graficadas? Listarlas:					
19	Las conclusiones sobre paridad cuando se aplica valor absoluto (ya sea sobre la función o sobre la variable independiente) son correctas		ninguna		algunas	todas
20	Prolijidad		regular		buena	muy buena

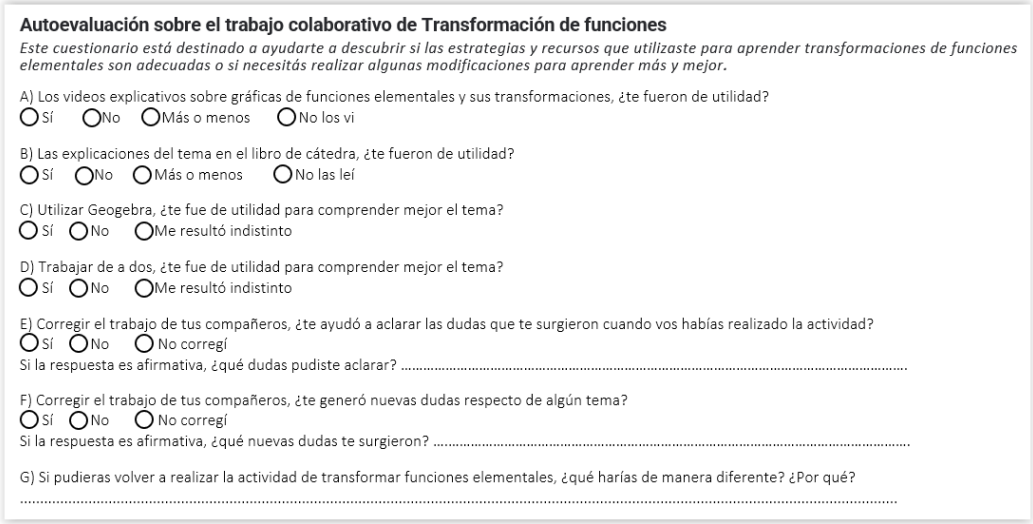
Observaciones:

Fig. 2. Lista de cotejo para la coevaluación.

3.5 Cuarto momento: autoevaluación metacognitiva

A través de un formulario de Google (Fig. 3), los alumnos completaron un cuestionario diseñado con la finalidad de ayudarlos a realizar un proceso de metacognición en el que reconozcan las estrategias y recursos movilizados para comprender el tema e identificar debilidades que son necesario revertir, iniciando así un camino hacia la autorregulación del aprendizaje. Sus respuestas les fueron remitidas automáticamente por mail para que tengan registro de sus reflexiones y que al final de la cursada las relean, tomen conciencia de cómo habían comenzado el año y qué avances (o no) han logrado al final, se planteen qué aprendieron y cuánto les falta aún por aprender,

qué mejorar, qué estrategias les conviene seguir aplicando, cuáles no aportan a su progreso y deberían dejar atrás y que tengan en cuenta las conclusiones a las que arriben para tener éxito en el futuro cursado de otras materias. En las preguntas E y F se agrega la opción "No corregí" por la eventualidad de no haber asistido a la segunda clase, donde se llevó a cabo la coevaluación, pero que aún así les sea de utilidad la autoevaluación.



Autoevaluación sobre el trabajo colaborativo de Transformación de funciones

Este cuestionario está destinado a ayudarte a descubrir si las estrategias y recursos que utilizaste para aprender transformaciones de funciones elementales son adecuadas o si necesitás realizar algunas modificaciones para aprender más y mejor.

A) Los videos explicativos sobre gráficas de funciones elementales y sus transformaciones, ¿te fueron de utilidad?
○ Sí ○ No ○ Más o menos ○ No los vi

B) Las explicaciones del tema en el libro de cátedra, ¿te fueron de utilidad?
○ Sí ○ No ○ Más o menos ○ No las leí

C) Utilizar Geogebra, ¿te fue de utilidad para comprender mejor el tema?
○ Sí ○ No ○ Me resultó indistinto

D) Trabajar de a dos, ¿te fue de utilidad para comprender mejor el tema?
○ Sí ○ No ○ Me resultó indistinto

E) Corregir el trabajo de tus compañeros, ¿te ayudó a aclarar las dudas que te surgieron cuando vos habías realizado la actividad?
○ Sí ○ No ○ No corregí
Si la respuesta es afirmativa, ¿qué dudas pudiste aclarar? .....

F) Corregir el trabajo de tus compañeros, ¿te generó nuevas dudas respecto de algún tema?
○ Sí ○ No ○ No corregí
Si la respuesta es afirmativa, ¿qué nuevas dudas te surgieron? .....

G) Si pudieras volver a realizar la actividad de transformar funciones elementales, ¿qué harías de manera diferente? ¿Por qué?
.....

Fig. 3. Autoevaluación metacognitiva.

3.6 Quinto momento: heteroevaluación y retroalimentación

Haciendo uso de la misma lista de cotejo de la coevaluación, cada producción fue evaluada por el docente, quien realizó una devolución individual a la semana siguiente del tercer momento de la experiencia, destacando las fortalezas, señalando errores que no fueran detectados en la coevaluación y ofreciendo sugerencias de mejora. También la coevaluación fue objeto de evaluación. A través del campus virtual se realizó una retroalimentación global sobre la impresión general acerca de la responsabilidad con la que encararon la propuesta y se propusieron algunas recomendaciones a tener en cuenta en futuros desempeños para superar falencias conceptuales comunes.

4 Resultados

En la Fig. 4 se muestra a modo de ejemplo la devolución que uno de los grupos hizo a sus compañeros. No se limitaron sólo a completar la lista de cotejo y marcar los errores en la producción evaluada, sino que además detallaron observaciones sobre el tipo de error encontrado y cómo sería correcto indicarlo. También agregaron una explicación adicional a sus evaluados respecto de las asíntotas de la función secante. En la imagen también puede apreciarse, escrito en birome negra, la devolución que hizo el docente a los pares evaluadores.

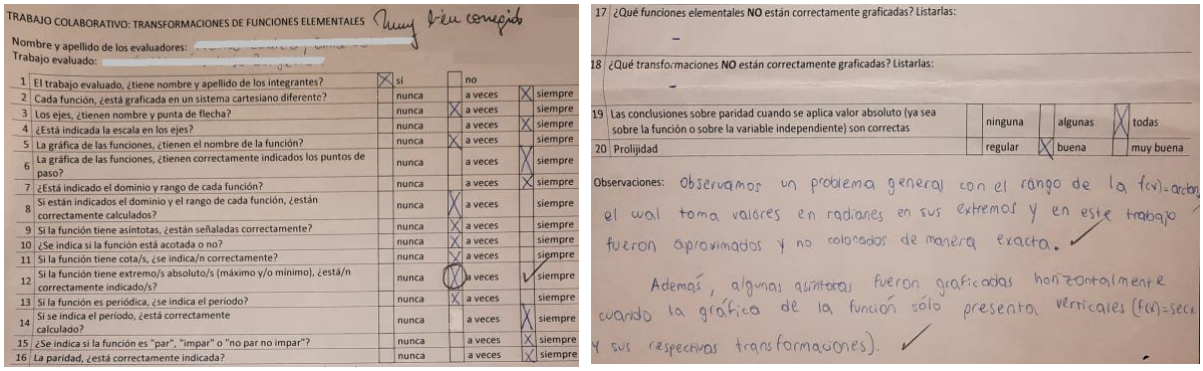


Fig. 4. Ejemplo de retroalimentación en la coevaluación.

La composición de respuestas A a F de la autoevaluación metacognitiva se exponen en la Fig. 5. Las respuestas afirmativas a las preguntas A (64%) y C (90%) sobre la utilidad de los videos explicativos reflejan una preferencia por el estilo de aprendizaje visual, a la vez que se confirma la noción ya presente en la literatura que el uso de software graficadores mejoran la comprensión. Mientras tanto, las opiniones afirmativas sobre la pregunta B (45%) respecto a la utilidad del libro de cátedra, dan la pauta de un estilo de aprendizaje verbal en casi la mitad de los estudiantes y también evidencia la primera manifestación de aprendizaje autónomo ya que su lectura no les fue expresamente indicada ni en el primer ni en el segundo momento de la actividad evaluativa [15].

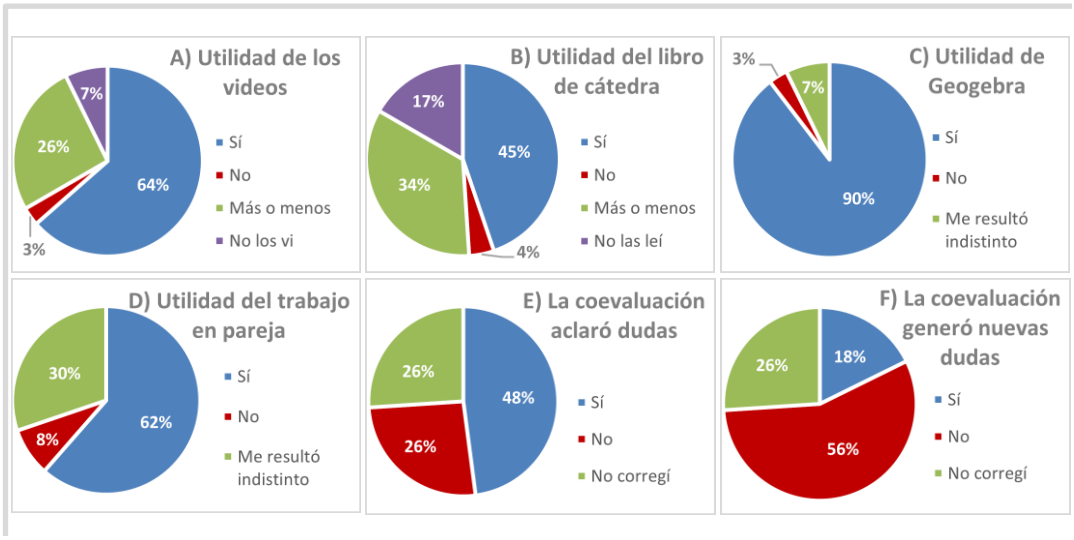


Fig. 5. Resultados de la autoevaluación metacognitiva.

En los guarismos de alumnos que no vieron los videos (7% en la respuesta A) y que no leyeron las explicaciones del libro (17% en la respuesta B) hay una superposición del 4% que no realizó ninguna de sendas tareas. En la Fig. 6 se hace una descomposición de estos porcentajes para visualizar mejor la información de los que sólo no vieron los videos (3%), sólo no leyeron el libro (13%), no hicieron ninguna de las dos cosas (4%) o hicieron ambas (80%). Este último resultado evidencia el alto compromiso que asumieron para realizar la actividad propuesta.

Fig. 6. Descomposición de la respuesta sobre el uso de los videos y el libro de cátedra.

En cuanto a los videos explicativos y el libro de cátedra interesa detectar la tasa de alumnos a los que les resultó de escasa o nula utilidad ambos recursos simultáneamente (respuestas *Más o menos* y/o *No* a las preguntas A y B) ya que ello da la pauta de la necesidad de intervención didáctica adicional. La Fig. 7 muestra que 11 alumnos (7+3+1) (12% del total) requieren explicaciones complementarias.

Fig. 7. Composición de la respuesta sobre la escasa o nula utilidad de los videos y el libro de cátedra.

En la observación realizada en el aula durante el primer momento de la evaluación se advirtió que al trabajar en parejas discutieron inquietudes y esclarecieron dudas mutuamente para finalmente llevar adelante la tarea. Esto hizo pensar que habría una muy alta aceptación por la modalidad grupal. Sin embargo, llama particularmente la atención que tan sólo al 62% le haya resultado favorable, dado que se esperaba una confirmación más contundente de la suposición y tanto más considerando el espíritu gregario de los adolescentes. Una exploración particularizada por especialidad (Fig. 8) evidencia una notoria diferencia: el 79% de los alumnos de Ingeniería Industrial han apreciado la utilidad del trabajo colaborativo frente al 17% que se manifestó indiferente; mientras que en ISI hay prácticamente una paridad entre beneficio e indiferencia por el trabajo en equipo de 45% a 43%, respectivamente. También es patente el contraste de la respuesta por el *No*; en ISI hay un triple de alumnos que para nada se vieron beneficiados (12% frente a 4%).

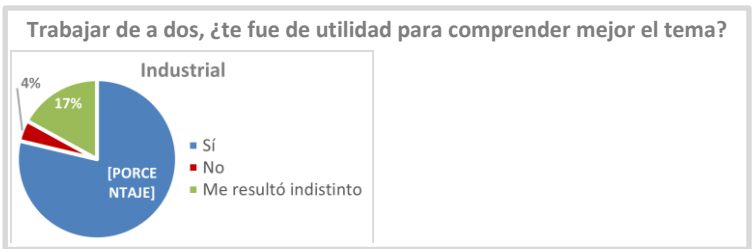


Fig. 8. Composición de la respuesta sobre la utilidad de trabajar en pareja, considerada por especialidad.

Las respuestas E y F dan indicios de la relevancia y utilidad formativa de la coevaluación. Ésta permitió aclarar dudas al 48% de los estudiantes (pregunta E) y no generó nuevas al 56% (pregunta F). El valor relativamente alto (26%) de alumnos que no evaluaron se debe a inasistencias por motivos personales y a que una de las comisiones se vio afectada por medidas de fuerza del transporte público. En la tabla 3 se recogen algunas respuestas sobre cuáles fueron las dudas aclaradas y surgidas al evaluar el trabajo de los compañeros.También se incluye la respuesta G

acerca de qué cosas modificarían si tuviesen la posibilidad de realizar nuevamente la actividad.

Tabla 3. Respuestas a las preguntas E, F y G de la autoevaluación metacognitiva.

Alumno	E) ¿Qué dudas pudiste aclarar?	F) ¿Qué nuevas dudas te surgieron?	G) Si pudieras volver a realizar la actividad de transformar funciones elementales, ¿qué harías de manera diferente? ¿Por qué?
1	Me quedaron algunas dudas sobre el rango, pero al corregir otro trabajo me fue mucho más fácil identificarlo	Algunos datos no nos coincidían, y eso nos hizo pensar que nos habíamos equivocado	Hacerlo en una hoja cuadriculada creo que sería más fácil, y usar otros números *a* en las funciones para que no se nos dificulte graficarlas después
2	Sobre los extremos absolutos de algunas funciones y el dominio de la función seno.	-	Volvería a realizar las gráficas
3	Pude aclarar ciertas dudas sobre las asíntotas, y/o funciones periódicas, que eran conceptos que no tenía muy frescos, pero que ya había dado en la secundaria.	Me surgieron dudas sobre las funciones dadas últimamente, ya que pensé que había conceptos que tenía más claros	Sí, sería más prolijo con las gráficas ya que no se entendieron muy bien
4	Dudas sobre las gráficas, y sobre de qué manera realizar la actividad (como organizar cada cosa para que se entienda lo que expresaba)	-	Haría diferente la organización con mi compañera, aunque haya resultado todo bien y nos pudimos entender, quizás hubiese sido bueno mayor comunicación entre ambas y dividirnos distinto las actividades
5	Había cosas las cuales pensé que las sabía perfectamente, y gracias a la corrección supe darme cuenta de que era un pensamiento errado el mío, por lo cual mejoró mi entendimiento	Algunas dudas de si lo que nosotros habíamos hecho estaba mal o si el que estábamos corrigiendo estaba mal	Me prepararía de una manera distinta para afrontar la situación. Asimismo, no creo que nos haya ido mal
6	Cuestiones de notación	-	Con mi compañera hicimos las gráficas en hojas distintas con las tablas, y la información de la función, cuando vuelva a hacerlo lo hago todo junto, es menos complicado, pobre el que tuvo que corregir
7	Tenía dudas sobre como distinguir, cotas, asíntotas y extremos absolutos	-	Nada, porque fue una actividad muy completa y considero que me ayudó a aprender mejor el tema
8	Me saqué mis últimas dudas sobre dominio y función par e impar	En las transformaciones	Estaría bueno hacer grupos al azar, y que las clases hayan sido presenciales
9	La construcción de gráficos	Dominio y asíntotas	Pondría más detalladamente los datos que pedían en el trabajo
10	Pude aclarar cómo funcionan las cotas, cómo se escriben y también pude ver cómo funcionaban los rangos en las funciones trigonométricas.	-	Volvería a hacer la parte del rango de las funciones trigonométricas y, máximo y mínimo absoluto. Lo haría de nuevo porque me gustaría poder corregir justamente esas partes que sé que me costaron un poco más.
11	Pude conocer la forma de las gráficas de las funciones elementales y comprender cómo es que se formaban a partir de sus respectivas fórmulas.	-	-
12	-	Algunas cosas las habíamos puesto de manera diferente y no entendía muy bien el pensamiento de mis compañeros	No pondría números negativos porque no iban e intentaría ser un poco más prolija.
13	-	-	A lo mejor tomar mi tiempo para que las gráficas queden bien claras para que al momento de analizarlas no esté dando vueltas en si es un número o no
14	Sobre algunas asíntotas y periodos	Cómo calcular asíntotas	Intentaría revisar si tiene asíntotas la función y cómo calcularlas ya que es algo que no tuve en cuenta en algunas funciones
15	-	-	Establecería los máximos y mínimos de manera correcta ya que al momento de realizarla no me percaté de hacerlo.
16	-	-	Los máximos absolutos y las asíntotas porque no las entendía muy bien hasta que leí el PDF de retroalimentación del trabajo.

Luego de la heteroevaluación, la retroalimentación global dada vía campus virtual destacó la responsabilidad con la que los alumnos se desempeñaron en el segundo y tercer momento de la experiencia y el buen criterio aplicado en la coevaluación. En lo que respecta a las falencias comunes detectadas, la devolución versó sobre:

- pautas generales a considerar para graficar (nombre de la función, de los ejes, escalas, puntos de paso, etc
- reforzar el concepto de cotas
- reforzar el concepto de extremos absolutos
- enfatizar la diferencia entre cotas y extremos absolutos
- aclarar la forma de calcular el período de funciones periódicas afectadas por la transformación $f(ax), a \in \mathbb{R}$
- subrayar el impacto en la paridad de la transformación $f(|x|)$

5 Discusión, conclusiones y trabajos futuros

La experiencia de evaluación formativa del tema transformaciones de funciones fue muy enriquecedora para todos los agentes del proceso de enseñanza y aprendizaje, docente y discentes, aunque resultó demasiado ambiciosa para

los tiempos académicos disponibles. En las líneas que siguen se fundamenta esta tesis.

Los alumnos se comprometieron con la tarea apelando a los recursos disponibles en el aula (Geogebra, libro de cátedra, apuntes y el mismo docente a quien recurrían para resolver inquietudes). Con la misma responsabilidad se desempeñaron al evaluar a sus compañeros, fueron criteriosos, respetuosos y empáticos en sus devoluciones.

Las manifestaciones recogidas en la autoevaluación evidencian un verdadero ejercicio de introspección metacognitiva en el que reconocieron las fortalezas y debilidades del propio aprendizaje con intención clara de superación en diversos aspectos: (i) en lo cognitivo, con respecto a la comprensión de los conceptos; (ii) en la organización del trabajo con el compañero (y no sólo distribución de tareas), (iii) en la prolijidad necesaria en la comunicación del trabajo propio para que otros sean capaces de interpretarlo y que también uno mismo se entienda cuando vuelve sobre su informe a revisar lo escrito; (iv) en la preparación previa imprescindible para encarar la actividad; (v) en la dedicación del tiempo suficiente para generar una producción de calidad y (vi) en la utilización del lenguaje simbólico matemático.

La heteroevaluación demandó más tiempo que el correspondiente a una dedicación simple por comisión; se hace inviable implementar a lo largo de la cursada evaluación continua y formativa con el nivel de exigencia y complejidad diseñado aquí. Una alternativa de solución sería trabajar con coevaluación fuera del horario áulico y, en lo que respecta al docente, podría en una oportunidad evaluar al azar diez trabajos y en sucesivas actividades ir rotando con otros diez, de modo que, a lo largo del año, cada alumno reciba, al menos una vez, retroalimentación individual. Otra opción serían grupos más numerosos, de cuatro integrantes por ejemplo, pero por experiencias previas, no todos se involucran en la tarea con el mismo grado de compromiso. También podrían diseñarse instancias que no implementen las tres formas de evaluar al mismo tiempo: hacer sólo autoevaluación o sólo coevaluación o sólo heteroevaluación (o una combinación de ellas tomadas de a dos). No obstante, es provechoso (y necesario) fomentar la autoevaluación metacognitiva en prácticas periódicas que contribuyan a crear el hábito reflexivo para abrirse camino en el autoconocimiento como aprendiz, la autorregulación del propio aprendizaje y el logro de la mentada autonomía.

Dado que un alto porcentaje de alumnos de ISI (52%) se ha manifestado entre indiferente y reticente por el trabajo grupal, queda por indagar si sólo circunstancialmente esta forma de trabajo no facilitó la comprensión del tema transformaciones en particular (pudiendo obtener los mismos resultados de aprendizaje individualmente) o si esta modalidad no se condice con sus estilos de aprendizaje. En caso de esta última respuesta, la razón tal vez se atribuya al perfil de estos alumnos, caracterizados por la singularidad de las actividades propias de la especialidad, como la programación y demás tareas solitarias frente a la computadora, de alto impacto individual y muy baja sociabilización. De ser esto así habrá que seguir reforzando en ellos aún más los desempeños colaborativos porque una de las competencias genéricas de egreso es el trabajo en equipo.

También es sustancial continuar trabajando con herramientas visuales como videos y graficadores digitales porque facilitan la comprensión y son coherentes con el estilo de aprendizaje visual de la mayoría de los estudiantes. No obstante, hay que promover actividades que refuercen el uso de la bibliografía (estilo verbal de aprendizaje) para fomentar la práctica de búsqueda y acceso a fuentes científicas confiables de los contendidos a aprender, habilidad que debe ser desarrollada para aprender a lo largo de la vida en general.

Como reflexión final, la enseñanza según el EBC no puede eludir la evaluación continua y formativa porque las competencias deben desarrollarse gradualmente, en forma progresiva y planificada a lo largo de la carrera, desde el primer día de clases. Pero si no se aumentan las dedicaciones docentes actuales, este tipo de evaluación debe programarse muy cuidadosamente de modo de aprovechar correctamente los tiempos académicos, no sobrecargar al profesor y dar retroalimentación oportuna a los alumnos. Por su parte, las autoevaluaciones metacognitivas, realizadas a conciencia, han de llevarse a cabo de manera habitual para la adquisición progresiva de una de las competencias que demanda el dinámico mercado laboral de la actualidad: aprender a aprender con autonomía y espíritu crítico. A su vez, la coevaluación se erige en herramienta conducente a la mejora de los niveles de comprensión al tiempo que coadyuva a la metacognición porque sitúa inexorablemente al alumno en posición de comparar sus comprensiones con las de sus pares.

Para darle un cierre a la experiencia mediante una medición que dé cuenta de su eficacia se prevé, en el primer parcial de la asignatura estipulado para el segundo cuatrimestre, cotejar los resultados de aprendizaje referidos a transformaciones de funciones de los participantes de la actividad aquí socializada con los del resto de los alumnos.

Como tarea futura resta dar respuesta a los siguientes interrogantes:

- los alumnos de ISI, en general, ¿prefieren trabajar individualmente o fue sólo en esta actividad?
- en caso afirmativo, ¿qué estrategias de enseñanza es conveniente implementar para promover en ellos el trabajo en equipo?

- los resultados de aprendizaje de los alumnos que realizaron la experiencia, ¿son significativamente mejores que los que no la realizaron?
- en caso afirmativo, ¿la causa es la estrategia didáctica diseñada o el mayor tiempo asignado a la actividad respecto al utilizado en las otras comisiones para desarrollar el tema?
- ¿qué estrategias de enseñanza pueden aplicarse en el desarrollo de los temas venideros para atender a los diferentes estilos de aprendizaje sin desfavorecer a ninguno?

Agradecimientos. Al Departamento de Materias Básicas de la Regional Santa Fe de la UTN.

Referencias

1. CONFEDI: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina - Libro Rojo de CONFEDI.* Universidad FASTA Ediciones (2018). https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf
2. Ríos, D. y Herrera, D.: Los desafíos de la evaluación por competencias en el ámbito educativo. *Educ. Pesqui., São Paulo*, Vol. 43, No. 4, pp. 1073-1086 (2017). doi: 10.1590/S1678-4634201706164230
3. CONFEDI: Marco conceptual y definición de estándares de acreditación de las carreras de ingeniería. Oro Verde. (2017). https://confedi.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MARCOC1.pdf
4. Tobón, S.: *Gestión curricular y ciclos propedéuticos.* ECOE (2008).
5. Victorino, L. y Medina, G.: Educación basada en competencias y el proyecto Tuning en Europa y Latinoamérica. Su impacto en México. *Ide@ s CONCYTEG,* Vol. 3, No. 39, pp. 1-53 (2008).
6. Cano, M. E.: La evaluación por competencias en la educación superior. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, Vol. 12, No. 3, pp. 1-16 (2008). https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/20503
7. Kowalski, V.; Morano, D.; Erck, I.; Cirimelo, S. y Enriquez, H.: ¿Qué se debe cambiar para orientarse a un Enfoque Basado en Competencias?. Kowalski, V. (Ed): *Curso de Posgrado - Formación por Competencias, Aprendizaje Centrado en el Estudiante y Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería*. Laboratorio Mecek (2020).
8. Beneitone, P.; Esquetini, C.; González, J.; Marty, M.; Siufi, G. y Wagenaar, R.: *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final – Proyecto Tuning – América Latina 2004-2007*. Universidad de Deusto/ Universidad de Groningen (2007). http://www.deusto-publicaciones.es/deusto/pdfs/tuning/tuning05.pdf
9. Kennedy, D.: *Redactar y Utilizar Resultados de Aprendizaje: Un Manual Práctico.* University College Cork, Irlanda (2007). https://intellectum.unisabana.edu.co/handle/10818/33010
10. Tardif, J.: *Evaluación de competencias. Documentar el camino de desarrollo.* Educación Chenelière (2006).
11. Anijovich, R. y González, C.: *Evaluar para aprender – Conceptos e instrumentos.* Aique (2010). http://www.aique.com.ar/sites/default/files/indices/evaluar_para_aprender.pdf
12. Anijovich, R.: La retroalimentación en la evaluación. Anijovich, R. (Comp.): *La evaluación significativa*. Paidós, pp. 129-149 (2010).
13. Fernández March, A.: La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, Vol. 8, No. 1, 11-34 (2010). doi: 10.4995/redu.2010.6216
14. Stewart, J.: *Cálculo de una variable – Trascendentes tempranas.* Cengage Learning. (2008).
15. Felder, R. y Brent, R.: *Teaching and learning stem.* Jossey-Bass. (2016).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Una metodología de aprendizaje invertido: en busca de un rol más activo del estudiante

María Andrea Aznar[1], Stella Maris Figueroa[1], María Laura Distéfano[1]
[1] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302 , Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.
maznar@fi.mdp.edu.ar, stellafigueroa@fi.mdp.edu.ar, mldistef@fi.mdp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se describe la implementación en curso de una forma de mediación pedagógica en lineamiento con el aprendizaje invertido. La experiencia se aplica en un curso de Matemática Discreta de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Se ejemplifican actividades de aula y se exponen percepciones docentes y discentes surgidas de la experiencia con esta forma de mediación. Asimismo se vinculan a los aspectos mediacional e interaccional de un proceso de instrucción, planteados desde el Enfoque Ontosemiótico. Se plantea como una metodología que mejora la idoneidad interaccional y demanda adaptaciones durante y entre procesos de instrucción.

Palabras Clave: Matemática Discreta, Enfoque Ontosemiótico, aprendizaje invertido

1 Introducción

Durante los años 2020 y 2021 las medidas de aislamiento preventivo y obligatorio, surgidas a partir del advenimiento de la pandemia del Covid-19, afectaron a todos los niveles educativos. En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, las clases se trasladaron al escenario virtual provisto por una Plataforma Moodle proporcionada por la institución. Cada asignatura implementó su aula virtual en dicha plataforma incorporando distintos recursos audiovisuales, documentales y formas de interacción con los estudiantes. Tal es el caso de la asignatura Matemática Discreta perteneciente a la carrera de Ingeniería Informática, cuyo desarrollo en ese entorno demandó de los estudiantes algunas acciones de estudio autónomo, como el estudio a partir del visionado de videos, que se consideran favorables a la construcción de competencias genéricas como la de aprender en forma continua y autónoma [1].

Para este año 2022 las autoridades consideraron propicias las condiciones para desarrollar las clases en forma presencial. Sin embargo, luego de dos años de trabajar virtualmente, se puso en evidencia la necesidad de construir nuevas dinámicas de actividades presenciales, propias del nivel universitario. Esto, sumado a las necesarias prevenciones sanitarias, tales como el uso de tapaboca en las aulas, dieron a las formas de interacción características diferentes a las que se daban antes de la pandemia, por lo que se llamó a este regreso a las aulas la "nueva presencialidad". La valiosa posibilidad del encuentro presencial demanda la necesidad de nutrirlo, y darle oportunidad a otras formas de mediación pedagógica que favorezcan un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante, y contribuyan a la construcción de competencias, en acuerdo a lo propuesto por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de Argentina, CONFEDI, [1].

Por otra parte, la experiencia obtenida en el período de virtualidad, a partir del uso de herramientas tecnológicas y el material audiovisual generado por los docentes, abrió una ventana de oportunidad para ensayar otras formas de mediación pedagógica en las que el estudiante tenga un rol más activo. En este sentido, se encuentran antecedentes [2], [3] que señalan ventajas de la metodología de aprendizaje invertido. El mismo se entiende, en líneas

generales, como una modalidad centrada en el estudiante que deliberadamente traslada una parte o la mayoría de la instrucción directa al exterior del aula, para aprovechar el tiempo en clase maximizando las interacciones entre profesor y estudiantes.

En el presente trabajo se describe una experiencia actualmente en desarrollo, de aplicación de una forma de metodología de aprendizaje invertido en la asignatura Matemática Discreta, en este primer cuatrimestre del 2022 y se exponen algunos análisis surgidos de dicha experiencia.

2 Marco Teórico

A continuación se puntualizan algunas nociones relativas a la formación orientada al aprendizaje centrado en el estudiante en ingeniería, al marco teórico de didáctica de la Matemática utilizado para analizar esta experiencia, y a la metodología de aula invertida.

2.1 Sobre el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de ingeniería

Con el propósito de impulsar y contribuir con los procesos de transformación para la mejora de los aportes de las facultades de ingeniería del país, el CONFEDI presentó la "Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina". Una de las aspiraciones que fundamenta dicha propuesta es "Consolidar un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante" [1]. Para caracterizar este tipo de modelo, Kowalski, Morano, Erck, Enríquez y Cirimelo [4] proponen abordar el Aprendizaje Centrado en el Estudiante (ACE), planteando los siguientes objetivos:

- Implementar Metodologías Activas
- Cambiar del Modelo Centrado en el Profesor a un Modelo Centrado en el Estudiante.
- Conocer a nuestros estudiantes.
- Promover al aprendizaje autorregulado
- Modificar el Sistema de Evaluación

Los objetivos mencionados conforman un sistema interrelacionado, no obstante esta presentación alude sólo a los dos primeros puntos.

2.2 Sobre la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción

Para analizar esta experiencia, desde la didáctica de la Matemática, se usarán conceptos que pertenecen al Enfoque Ontológico y Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font [5]. Este enfoque considera al aprendizaje como un proceso de acercamiento entre significados personales e institucionales: "El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados". ([5], p.22)

Para el estudio de un proceso de instrucción, esta teoría pone el énfasis en la detección de conflictos semióticos, planteados como discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones. Según el momento de dicho proceso en el que se revelan los conflictos semióticos son clasificados como potenciales (a priori del proceso), efectivos (durante el proceso de instrucción) y residuales (a posteriori). ([5])

Para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción Godino, Contreras y Font [6] proponen seis dimensiones: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

- La *idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.
- La *idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/

implementados.

- La *idoneidad mediacional*, que observa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
- La *idoneidad emocional*, está asociada al grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. Esta dimensión está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- La *idoneidad interaccional*, que examina si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- La *idoneidad ecológica*, que estudia en qué medida el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

En relación a un proceso de instrucción, la dimensión epistémica focaliza en el objeto de enseñanza, el "qué"; también la dimensión ecológica si se considera en el "qué" a los significados asociados a esos objetos de enseñanza que resultan relevantes dentro de la comunidad de ingeniería. Por otra parte, la dimensión cognitiva se direcciona sobre los contenidos previos y los alcanzados por los estudiantes: La dimensión emocional está fuertemente condicionada por múltiples factores, varios ajenos al proceso de instrucción. A los fines de relatar una experiencia de aplicación de una modalidad de trabajo, vinculada al "cómo" del proceso de instrucción, y considerando los datos disponibles para tal descripción, en esta comunicación se abordarán dos de las dimensiones de un proceso: la idoneidad interaccional y la mediacional.

Respecto de la idoneidad interaccional el EOS plantea una serie de indicadores [7]. Entre ellos:

- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes buscando que traten de argumentar para sí mismos y para los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en razonamientos matemáticos
- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
- Se implementan instancias de Evaluación formativa.

Los indicadores de idoneidad interaccional y la necesidad de implementar metodologías donde el estudiante tome un papel activo parecen tener puntos en común, en los cuales la metodología de aprendizaje invertido pudiera hacer un aporte que los propicie.

2.3 Sobre la metodología de aprendizaje invertido

El modelo de *aprendizaje invertido* ha sido señalado como susceptible de interés por su potencial; consiste en un modelo centrado en el estudiante que radica en desplazar deliberadamente una parte o la mayoría de la instrucción directa al exterior del aula, para aprovechar el tiempo en clase maximizando las interacciones en el aula [2]
El aprendizaje invertido se propone como un enfoque pedagógico que transforma la dinámica de la instrucción. Se desarrolla un ambiente interactivo donde el profesor guía a los estudiantes mientras aplican los conceptos y se involucran en su aprendizaje de manera activa dentro del salón de clases. Implica un cambio hacia una cultura de aprendizaje centrada en el estudiante [2].

Prieto, Barbarroja, Álvarez y Corell [3] describen el modelo de *aula invertida* señalando que se basa en una pedagogía de aprendizaje semipresencial activo, que se sostiene en la preparación previa no presencial de los alumnos para las clases interactivas. El docente envía primero la información a los alumnos para que procuren estudiarla y comprenderla por sí mismos. Los alumnos estudian individualmente para estar preparados para participar en las actividades de clase. Finalmente, el tiempo de clase se dedica a profundizar en su compresión y a construir sobre lo hay aprendido incorporando ejercicios de aprendizaje activo y en equipo. Estos autores señalan que, en algunas propuestas de aplicación de este modelo, se implementan tareas adicionales tanto dentro como fuera de clase; en ámbito extra-áulico se ha propuesto evaluación formativa, cuestionarios reflexivos, etc; dentro de clase se han incorporado resolución de problemas, proyectos en equipos para favorecer habilidades y competencias.

Algunos autores [2] diferencian aprendizaje invertido de aula invertida; consideran que aula invertida consiste en asignar a los estudiantes textos, videos o contenidos adicionales para revisar fuera de clase. En este caso el

tiempo en el aula no implica necesariamente un cambio en la dinámica de la clase, por tanto puede o no llevar a un aprendizaje invertido. Sin embargo, se han encontrado trabajos que han realizado un estudio histórico del modelo de aula invertida [3], señalando su característica de incorporar más aprendizaje activo en la educación superior y crear un entorno educativo centrado en las acciones que realizan los estudiantes. Por lo que, a los fines de esta comunicación, se los considera como análogos.

3 Descripción de la metodología de trabajo propuesta a los estudiantes

La asignatura Matemática Discreta está ubicada en el primer cuatrimestre de segundo año del Plan de estudios de la carrera de Ingeniería Informática. Tiene asignadas 4 horas semanales de encuentros áulicos distribuidas en 2 horas de clases teórico-prácticas y 2 horas de clases prácticas.

Los materiales están disponibles en el aula virtual de la asignatura en el entorno de la Plataforma Moodle proporcionada por la Facultad (https://campus.fi.mdp.edu.ar/course/view.php?id=17). El formato de organización de los materiales está dado por secciones, implementando una por cada unidad temática. Cada sección de unidad comprende: materiales de estudio (video tutoriales, documentos asociados desarrollados por la cátedra, una Guía de Trabajos Prácticos) y dos foros para consultas de dudas residuales que hubieran quedado luego de la clase presencial teórico-práctica o luego de la clase presencial práctica. Los materiales de estudio están organizados por semanas, de acuerdo a un cronograma publicado al principio del cuatrimestre.

La metodología de estudio propuesta requiere que el estudiante, antes de la clase teórico práctica presencial, aborde el visionado de los videos y la lectura de los materiales asignados en la semana por cronograma. Luego, en la clase teórico-práctica presencial, puede consultar sus dudas. En dicha clase se presenta una serie de actividades de interpretación del material de la semana, que los alumnos deben resolver de manera individual o grupal y, posteriormente, se realiza una puesta en común en pizarrón.

Por otra parte, en la clase práctica el estudiante puede consultar sus dudas sobre las resoluciones de ejercicios de la Guía de Trabajos Prácticos correspondiente a esa unidad. En la Tabla 1 puede observarse el flujo de actividades propuestas a los estudiantes, en relación al encuentro presencial.

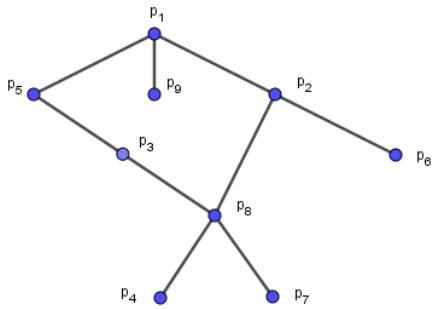
Tabla 1. Flujo de actividades propuestas a los estudiantes.

	Antes del encuentro presencial	**Durante el encuentro presencial**	**Posterior al encuentro presencial**
Clase teórico-práctica	Estudio de materiales (video-tutoriales y documentos)	Resolución de actividades de Interpretación y consultas	Planteo de dudas residuales en Foro virtual de Teoría
Clase práctica	Resolución de Guía de Trabajos Prácticos	Planteo de consultas	Planteo de dudas residuales en Foro virtual de Práctica

3.1 Actividades de interpretación del material visionado y/o leído

El visionado de los videos y la lectura de documentos previos a la clase presencial teórico-práctica son realizados por los estudiantes con variados niveles de comprensión, en los que pueden darse conflictos semióticos potenciales. Para detectarlos y procurar resolverlos, se proponen a los estudiantes actividades de interpretación que son las que estructuran cada clase teórico-práctica y le dan dinámica a la actividad de los estudiantes al resolverlas. Estas actividades de interpretación involucran distintos niveles de dificultad. Se requieren del estudiante tareas tales como: completar definiciones, reconocer características de algún objeto definido, ejemplificar, focalizar la atención sobre ciertos aspectos de un enunciado, vincular representaciones –de un objeto dado– en distintos registros semióticos, etc. Algunos ejemplos de tipos de actividades se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipos de actividades de interpretación.

Tipo de actividad	Ejemplo
Reconocer	Considerar el conjunto H={ a, b, c, f, g} ¿Cómo está definido H, por comprensión o por extensión?
Completar definiciones	$x \in \mathbb{R}$ Completar con la condición requerida $p \in \mathbb{Z}$ $p = \lfloor x \rfloor$ si y sólo sí ……
Ejemplificar	Escribir un ejemplo de un elemento de AxB perteneciente a R_2 y otro no perteneciente a R_2.
Focalizar la atención sobre ciertos aspectos de un enunciado	a) ¿Cuál es **la** forma factorizada de -3267? ¿Cuál es **la** forma factorizada **estándar** de -3267? b) ¿Por qué se pone énfasis en "**la**"?
Explorar casos para elaborar conjeturas	Si D⊆H ¿Cuál será el resultado de D∩H? ¿y de D∪H?
Vincular distintos registros de representación semiótica	Una empresa Pyme está conformada por 9 personas P={ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 , p_7, p_8, p_9}. En el conjunto de miembros de esa pyme se define la relación de orden parcial ***R*** $\boldsymbol{R} \subseteq$ PxP definida por p_h ***R*** p_k sií (p_h= p_k) ∨ (p_h está subordinado a las decisiones de p_k)  La relación R está representada mediante el diagrama de Hasse a) Representar la matriz de R en el ordenamiento de P dado. b.1) ¿Cómo se detectan en la matriz cuáles elementos y∈P son precedidos por p_3, es decir $p_3 \preccurlyeq y$? b.2) ¿Cómo se detectan en la matriz cuáles elementos x∈P preceden a p_2, es decir $x \preccurlyeq p_2$? c) ¿Es este orden total? ¿Cómo se detecta en la matriz? d) Determinar, si existieran, los elementos minimales, maximales, mínimo y máximo. ¿Cómo se interpretan en esta relación? ¿Cómo se detectan en la matriz?

3.2 Las evaluaciones formativas y el sistema de evaluación

Una metodología centrada en el estudiante requiere de las instancias de evaluación formativa.

Una sección del aula virtual está dedicada a evaluaciones formativas. Las mismas están implementadas como cuestionarios de autoevaluación con preguntas de corrección automática. Al concluir la unidad o el bloque de temas planificado por cronograma, se habilita el cuestionario para ser respondido por un período de 48 hs con la idea de que el estudiante pudiera plantear en el foro las dudas que surgieran de su resolución.

El sistema de evaluación comprende dos instancias de evaluación sumativa denominadas primer parcial y segundo parcial. Para aprobarlas debe obtener como mínimo 5 de 10 puntos. Si en ambas obtiene como mínimo 7 puntos el estudiante promociona la materia, si las aprueba con notas menores debe rendir un examen totalizador.

4 Algunas percepciones de lo experimentado

Para comenzar a analizar la experiencia se exponen a continuación las percepciones desde la perspectiva docente y desde los estudiantes.

4.1 Perspectivas docentes

Desde la percepción de la docente a cargo de la clase teórico-práctica, una observación que realiza es la de ciertas imprecisiones o ausencia de respuestas a preguntas que formula en la clase teórico-práctica; se conjetura que el visionado del material previo a la clase presencial requiere actividades concretas de interpretación que propicien una mirada más profunda sobre lo visionado y ofrezcan un escenario para detectar y resolver obstáculos. En este sentido la metodología dio la posibilidad de realizar ciertas actividades de interpretación que no tenían un lugar temporal en las clases expositivo-dialógicas. También se tiene la percepción de una mayor participación de los estudiantes en las interacciones a través de preguntas al docente o entre compañeros en la clase presencial de la clase teórico-práctica.

En cuanto a los foros para consultas residuales post-clases presenciales, se comprueba que son escasamente aprovechados por pocos estudiantes.

Respecto de la participación en las autoevaluaciones formativas, sólo un 40% de los estudiantes las realizaron en los momentos indicados por el cronograma, pensados como cierre de unidad o bloque temático; sin embargo al acercarse la fecha del primer parcial solicitaron que estuvieran nuevamente disponibles para ser resueltos y otro 30% los resolvió. Esto indicaría que algunos estudiantes gestionan los tiempos a su propio ritmo, lo cual requeriría dar más flexibilidad a ciertos tiempos de cronograma.

Se compararon los resultados obtenidos en el primer parcial entre el grupo de estudiantes del primer cuatrimestre del 2019 y el del 2022. El grupo que cursó antes de la pandemia, tuvo sus clases presenciales con metodología expositivo-dialógica, mientras que los que cursan esta nueva presencialidad lo hacen con la metodología invertida descripta. En la Tabla 3 se muestran las razones obtenidas de los cocientes entre número de exámenes en cada categoría sobre número de exámenes rendidos. Puede observarse que, en el cuatrimestre actual, las razones de las categorías de exámenes aprobados (promocionables y no promocionables son ligeramente superiores. Si bien el rendimiento académico es un suceso condicionado por múltiples factores, los números pueden dar un punto de partida para evaluar el proceso de instrucción.

Tabla 3. Comparación de resultados en primer parcial.

Condición	**Primer parcial 1º Cuatrimestre 2019**	**Primer parcial 1º Cuatrimestre 2022**
Aprobados No promocionables	10/58>0,17	14/63>0,22
Aprobados Promocionables	19/58>0,33	23/63>0,37
Desaprobados	29/58>0,5	26/63>0,41

En cuanto a los materiales, se plantea como próximo paso un estudio y re-ajuste de las actividades propuestas en la Guía de Trabajos Prácticos de manera que los ejercicios iniciales de las mismas, cuyo nivel de operación mental fue posiblemente abordado en las actividades de interpretación

4.2 Perspectivas de los estudiantes

Para obtener una visión de la perspectiva de los estudiantes se implementó en la Plataforma una Encuesta de naturaleza anónima en la que se efectuaron preguntas de opción múltiple respecto de la interacción estudiante-materiales y las interacciones de diálogo en el aula. La misma se habilitó para ser respondida luego del primer parcial. La respondieron 49 estudiantes. En la Tabla 4 se muestran algunas preguntas y las razones de cantidades de alumnos que seleccionaron las opciones expuestas sobre el total de alumnos que participaron:

Tabla 4. Razones de respuestas elegidas en encuesta a estudiantes.

Pregunta	Opciones de respuestas	Razones
Al material de estudio disponible en el aula virtual para la clase de teoría (videos, documentos y presentaciones), generalmente lo miro:	Antes de la clase	40/49
	Durante la clase	3/49
	Después de la clase	5/49
	Nunca	1/49
Las actividades propuestas en la Guía de interpretación que se resuelven en las clases teóricas, generalmente:	No las realizo, sólo sigo lo que hacen mis compañeros o lo que se expone en pizarrón.	5/49
	Las realizo pero no me ayudan a aclarar lo que había estudiado previamente en los videos y documentos.	1/49
	Las realizo y me ayudan a aclarar lo que había estudiado previamente en los videos y documentos.	26/49
	Las realizo, me ayudan a aclarar lo que había estudiado previamente en los videos y documentos, y me aportan otros beneficios para mi forma de aprender.	17/49
Durante el intercambio presencial que se produce en las clases respecto del contenido que se está estudiando, mi forma de participar generalmente es (podés elegir más de una)	Escuchando las participaciones de otros alumnos	43/49
	Preguntando mis dudas al docente	27/49
	Preguntando mis dudas a algún compañero	26/49
	Respondiendo preguntas del docente	11/49
	Respondiendo preguntas de algún compañero	11/49
Respecto de las actividades propuestas en los cuestionarios de las Autoevaluaciones formativas:	No las he realizado	10/49
	Las he realizado pero rápidamente sólo para tener una idea de qué se trataban.	15/49
	Las he realizado con atención pero no me han aportado nada útil.	4/49
	Las he realizado con atención y me han resultado muy útiles.	20/49

Considerando el momento de visionado y lectura de materiales respecto del momento de la clase presencial, puede observarse que 40 de 49 estudiantes afirma que realiza una mirada de los materiales disponibles antes de la clase. Esto indica la construcción del hábito del estudio de materiales previo a la clase presencial.

Respecto de las actividades propuestas en la Guía de interpretación 43 de 49 estudiantes señalaron como útiles para ayudar a aclarar lo que habían estudiado previamente en los videos y documentos. Esto parece favorable a la detección y resolución de conflictos semióticos.

Con relación a las interacciones personales durante la clase presencial se observa que poco más de la mitad de los que respondieron considera que participan preguntando al docente o a otros compañeros y sólo 11 seleccionaron opciones de responder preguntas. Esto coincide con las percepciones docentes de una mayor interacción en el aula, sin embargo se vislumbra la necesidad de potenciar las intervenciones de los estudiantes exponiendo sus resoluciones.

Finalmente, vinculado a las autoevaluaciones formativas se constata que 20 de 49 considera que les ha resultado útil realizarlas; 25 de 49 respondientes indica que no las realizaron o las realizaron sin atención. Las solicitudes de los estudiantes de re-apertura de los cuestionarios en fechas posteriores a las programadas pueden indicar la necesidad de re-ajustar estos recursos tanto en tiempo como en contenido.

5 Conclusiones

Dado que se trata de una experiencia en curso sólo podemos hacer afirmaciones de naturaleza provisorias orientadas a la mejora del proceso instruccional implementado.

El reemplazo de la clase expositiva-dialógica por la nueva metodología demanda que el estudiante deba interactuar con materiales de estudio (videos, documentos) previamente al encuentro presencial. La guía de actividades de interpretación fue valorada positivamente por los discentes en el sentido que les resulta útil para aclarar sus dudas; la misma estructura la actividad en la clase y se convierte en una herramienta para detectar y resolver conflictos semióticos potenciales; esto puede indicar una mejora en la idoneidad interaccional. Un aspecto que se vislumbra como necesario, tanto para fomentar la detección y resolución de conflictos semióticos, como para favo-

recer la construcción de competencias de comunicación, es buscar estrategias para propiciar la participación de los estudiantes en las interacciones personales durante las clases presenciales. Respecto de la idoneidad mediacional, el uso del recurso tiempo requiere ajustes, como resulta en el caso de la implementación de las autoevaluaciones formativas; en este sentido también se plantea un estudio del sistema conjunto de actividades de interpretación de las clases teóricas con las de la Guía de Trabajos Prácticos, en orden de optimizar su complementariedad.

La metodología resulta prometedora y demandará adaptaciones, tanto durante como entre procesos de instrucción, para mejorar la idoneidad didáctica en pos de favorecer la construcción de competencias en los estudiantes.

Referencias

1. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería – CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de Confedi". Disponible en https://confedi.org.ar/librorojo/ (2018). Accedido el 13 de Febrero de 2020.
2. Escamilla, J.; Calleja, B.; Villalba, E.; Venegas, E.; Fuerte, E. Román, R.; Madrigal, Z. Huesca, G.; Bauer, K.: Reporte Edu Trends Aprendizaje invertido. *Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey*. https://observatorio.tec.mx/edutrendsaprendizajeinvertido (2014) Accedido el 26 de febrero de 2022.
3. Prieto, A.; Barbarroja, J.; Álvarez, S.;Corell, A. :Eficacia del modelo de aula invertida (flipped classroom) en la enseñanza universitaria: una síntesis de las mejores evidencias. *Portal de Innovación educativa Universidad Politécnica de Madrid*. https://innovacioneducativa.upm.es/recursos/eficacia-modelo-aula-invertida-flipped-classroom-ensenanza-universitaria-sintesis-mejores (2021) Accedido el 26 de febrero de 2022.
4. Kowalski, V., Morano, D., Erck, I., Enríquez, D. y Cirimelo, S. *Programa de Formación Docente para orientar su práctica hacia la Formación por Competencias. Módulo 2: Mediación Pedagógica para la Formación de Competencias. Segundo Documento ¿A Quién Enseño Yo, Entonces?* (2019).
5. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V..: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (2009) Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135 (2007) http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf Accedido el 20 de febrero de 2018.
6. Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. : Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1): 39-88. (2006). Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/godino_contreras_font.pdf. Accedido el 20 de febrero de 2018.
7. Godino, J. D.,Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 8. Número 11. pp 111-132. Costa Rica (2013).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Curso de apoyo para rendir examen final: Experiencia virtual de retención en una asignatura de Matemática

Mariana S. Vagge[1], Laura B. Langoni[1]
[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Calle 1 y 47, La Plata (B1900TAG), Buenos Aires, Argentina
{mariana.vagge, laura.langoni}@ing.unlp.edu.ar,

Resumen. La cátedra Matemática A es una asignatura del primer semestre del plan de estudios de todas las carreras que se cursan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Desde hace varios años se implementó un curso de apoyo para rendir el examen final con el objetivo de mejorar el bajo rendimiento en las mesas de examen. Con el inicio de la pandemia y, en consecuencia, del dictado de cursadas virtuales, creció el porcentaje de estudiantes que no promocionan la asignatura y deben rendir examen final. Esto acrecentó la necesidad de continuar con el dictado de estos cursos de apoyo durante los años 2020 y 2021 donde las actividades académicas en la mencionada institución fueron únicamente virtuales. Se relata aquí la experiencia del dictado de estos cursos en modalidad virtual así como también algunos resultados cuantitativos del mismo.

Palabras Clave: Examen final, Matemática, Estrategias de retención, Virtualidad.

1 Introducción

La asignatura Matemática A es la primera materia del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata que cursan todos los alumnos de la facultad. Es una materia con una cursada semestral muy intensa ya que tiene una carga horaria de 12 horas semanales repartidas en tres clases. Para varios estudiantes, resulta ser la primera materia que deben acreditar por medio de un examen final. Esta falta de experiencia se refleja en que parte de los alumnos que llegan a esta instancia no se preparan adecuadamente para rendir el examen repercutiendo en un mal desempeño en la mesa de final.

Ante la situación descripta, en el año 2007, la cátedra implementó un curso de apoyo para rendir el examen final que se inició en un principio como clases de consultas ordenadas a través de un cronograma hasta llegar a la versión actual donde los alumnos tienen la posibilidad de ir acreditando contenidos durante el curso. En los últimos años, el curso se dictó una vez en cada semestre con la intención de preparar a los alumnos para las mesas de final de junio y de noviembre.

En los años 2020 y 2021 la Facultad de Ingeniería sólo dictó clases virtuales debido a la situación epidemiológica conocida. Concibiendo al curso de final casi como una necesidad por parte de los estudiantes que deben rendir el examen, la cátedra decidió darle continuidad a este curso en la virtualidad. En este trabajo se describe la experiencia de la adaptación del curso a la modalidad virtual entendiendo que era importante sostener esta herramienta de retención que había dado resultados muy buenos en sus ediciones presenciales. Asimismo, mostraremos algunos resultados cuantitativos sobre la aprobación de la materia, la comparación de estos resultados con ediciones presenciales y la comparación con resultados virtuales de alumnos que no hicieron el curso propuesto.

2 Fundamentación

El curso para final de Matemática A se originó como una estrategia de retención implementada por la cátedra como respuesta al bajo porcentaje de aprobación que se observaba en los exámenes finales de la asignatura [1].

La perspectiva de Tinto [2 y 3] acerca de la retención en la educación superior tiene en cuenta el rol del entorno, en particular de la institución, en las decisiones de los estudiantes de permanecer o abandonar sus estudios, en contraste con otros puntos de vista que la entendían como el reflejo de atributos, habilidades y motivaciones individuales de los estudiantes. El autor indica una serie de características que comparten los programas efectivos de retención universitaria. Estas iniciativas comúnmente se orientan a acciones que "sirven para integrar a los individuos a la vida social e intelectual de la institución y en las comunidades de las personas que constituyen esa vida. Conscientemente buscan y hacen contacto con estudiantes procurando establecer lazos personales entre ellos y entre estudiantes y docentes y personal de la institución. De esta manera, los programas efectivos de retención no sólo proveen asistencia continua a los estudiantes, sino que actúan para asegurar la integración de todos los individuos, como miembros iguales y competentes de la institución." [2, p. 9] Otro rasgo en común que poseen estos programas es el compromiso institucional y educativo con los estudiantes, entendido más allá de la preocupación por la retención en sí misma, sino más bien y fundamentalmente en la educación. El compromiso con los estudiantes genera el compromiso por parte de ellos con la institución, el cual está en la base de la permanencia. Asimismo, el autor indica que los esfuerzos de retención deben focalizarse en el primer año de la vida estudiantil, para "ayudar a los individuos a hacer la, a menudo difícil, transición a la facultad y en el importante proceso por el cual los estudiantes se establecen como miembros competentes en las comunidades sociales e intelectuales de la facultad". [2, p. 17] El autor señala que es por ello que la institución debe preocuparse por qué clases de experiencias requieren los estudiantes principiantes para ser educados en la facultad y por ello entiende que los docentes juegan un rol central en los esfuerzos institucionales por la retención. Específicamente en el ámbito de nuestra Universidad, su presidente durante el último período, menciona "Si un estudiante no sabe lo suficiente para avanzar a un estadio superior en el proceso de su formación, pero tiene la firme voluntad de resolver sus déficits esforzándose en sus estudios, la universidad debe darle siempre esa oportunidad. No puede dejarlo flotando en un limbo que no le permita ni retroceder ni avanzar." [4, p. 5]. Para luego reflexionar que ofrecer esa oportunidad no es en desmedro de la calidad sino que significa sumar responsabilidades al sistema.

El curso para final se encuentra naturalmente en estrecha vinculación a la evaluación de la asignatura. En coincidencia con Palou de Maté [5], la evaluación se entiende en el curso con una doble finalidad: la de diagnóstico continuo, que busca información sobre los saberes de los alumnos para retroalimentar la enseñanza y permite construir criterios para ponderar los resultados de aprendizaje y la finalidad de la acreditación. La acreditación es la certificación "de que se han logrado determinados productos planteados en planes o programas de estudio. Este requerimiento social e institucional es el que permite la movilidad de los alumnos en las instituciones y a la vez los inserta en el campo laboral." [5, p. 23]. Según la autora, además de la finalidad, son centrales en la evaluación la comunicación y los criterios. La comunicación está vinculada a la instancia de construcción de criterios de evaluación, se trata de explicitar en la clase y en conjunto entre docentes y alumnos las razones que fundamentan las cualidades de un buen trabajo. "Estas actuaciones deseables se configuran en criterios, es decir, en razones valiosas, relevantes y pertinentes con relación a lo que se valoraría como deseable, con la mirada puesta en las posibilidades reales de los alumnos, pero sin perder de vista la acreditación." [5, p. 33]. La autora señala que esta comunicación resulta provechosa para los estudiantes cuando los acompaña también en la reflexión acerca de lo que deben revisar y estudiar para poder aprobar la asignatura, de modo que les permite relacionar su esfuerzo por aprender con lo que se espera de ellos.

Durante el aislamiento social debido a la pandemia covid-19 la cátedra decidió seguir ofreciendo el curso para final, adaptándolo en ese contexto a la modalidad virtual. Cabero y otros [6] estudian las herramientas de comunicación disponibles en la comunicación mediada por computadora (en su terminología, comunicación mediada por ordenador) y su uso educativo. Durante el período de aislamiento social debido a la pandemia y la consecuente imposibilidad de tener clases presenciales, la ventaja que nos ofreció la comunicación mediada por computadoras fue la de permitirnos establecer esa comunicación independiente del espacio donde nos encontrábamos alumnos y docentes. Los autores señalan que uno de los rasgos característicos de los entornos virtuales de formación es que resultan ser más complejos que los presenciales por estar formados por un entramado de personas (docentes, alumnos y técnicos) y tecnologías. En ese contexto destacan la significación de las perturbaciones que distorsionan el proceso comunicativo, a las cuales llaman "ruido". Estas alteraciones en la comunicación no sólo se refieren a componentes sensoriales o físicos (como el volumen inadecuado de la voz, la conexión de los aparatos o la desatención) sino también a aspectos culturales, ideológicos, sociológicos, etc. de los interlocutores, más aún en

el contexto de la virtualidad que acerca a personas que provienen de culturas diferentes. Otro de los "ruidos" que pueden intervenir en la comunicación virtual es la actitud que los participantes tengan frente a la tecnología porque ello determinará las dimensiones cuantitativas y cualitativas de las interacciones. En ese sentido los autores señalan que si bien la comunicación realizada a través de tecnología es más fría que la presencial, "conforme nos acostumbramos a interaccionar más, esa 'temperatura' se va haciendo más cálida" [6, p. 30]. En base a lo expuesto, los autores señalan acerca de las herramientas de comunicación mediada tecnológicamente que es necesario "formar, tanto a los profesores como a los alumnos, para su utilización racional y significativa, y ello supone el dominio de capacidades más amplias que las meramente técnicas" [6, p. 30]

Salmon [7] usa el término "e-moderación" para referirse "a la amplia variedad de roles y habilidades que necesita adquirir el docente online" [7, p. 56]. La enseñanza online "requiere que los e-moderadores tengan un rango más amplio de habilidades en comparación al trabajo con grupos de aprendizaje presencial" [7, p. 56]. La autora señala que más allá de la sofisticación de la tecnología utilizada, las personas valoran y disfrutan el apoyo y el compañerismo que surge de trabajar y aprender con otros. "El mayor impacto en la calidad del aprendizaje de los estudiantes reside en cómo se usa una tecnología y no en las características del medio en sí" [7, p. 56]. De este modo, aprender a ser un e-moderador no tiene que ver principalmente con adquirir habilidades en software o computadoras y, por otro lado, el éxito no se logra haciendo lo mismo que en aula de clase. La autora utiliza el término "online" para referirse "a la enseñanza y el aprendizaje que tienen lugar en una red de computadoras de alguna clase (por ejemplo una intranet o la Internet) y en las cuales la interacción entre personas es una forma importante de sostener el proceso de aprendizaje (…) Incluye formas de interacción tanto sincrónicas como asincrónicas y también a través de texto, video, audio" [7, p. 57].

La autora [7] enumera los siguientes roles del docente online: facilitador del proceso (organizando las actividades de aprendizaje), consejero (ayudando a los estudiantes a obtener lo máximo de su participación en un curso), evaluador (proporcionando evaluación y retroalimentación al trabajo de los estudiantes), investigador (preocupado por la participación en la producción de nuevo conocimiento en el área enseñada), facilitador de contenidos (interesado en facilitar la comprensión del contenido del curso), tecnólogo (ayudando a hacer elecciones tecnológicas que mejoren el entorno disponible para los estudiantes), diseñador (diseñando tareas relevantes antes y durante el curso) y director/administrador (encargándose de tareas como inscripciones y registros).

El modelo presentado por Salmon [7] de enseñanza y aprendizaje online implica una serie de actividades. En la primera etapa los participantes necesitan información y soporte técnico para tener acceso al sistema que se utilizará. Y también es necesario brindarles motivación y apoyo para alentarlos a dedicar tiempo y esfuerzo para hacerlo. En la segunda etapa los estudiantes se familiarizan con el entorno online, "muchos de los beneficios del aprendizaje online provienen de la construcción de comunidades de personas online que trabajan juntas en tareas en común" [7, p. 65] Y en este proceso la dimensión social es importante. "Un sentido de continuidad, de conectividad, con el tiempo y el lugar, y una conectividad con otros contribuye a la socialización online" [7, p. 66] En ese sentido, la autora señala que inicialmente algunos estudiantes pueden ser renuentes a participar y deben ser alentados en esa primera instancia a apreciar las contribuciones de los otros hasta decidir hacer las suyas propias. La tercera etapa es la de intercambio de información, en la cual el moderador facilita las tareas y el uso de los materiales de aprendizaje. La cuarta etapa es la de la construcción del conocimiento y la última es la de desarrollo de confianza, autonomía y responsabilidad acerca del propio aprendizaje por parte de los participantes.

Hasta aquí hemos señalado algunos beneficios que nos ofrecen las tecnologías digitales, sin embargo, su utilización trae aparejadas también consecuencias problemáticas. Moreira [8] señala entre ellas los problemas medioambientales del planeta, la dependencia creciente de nuestra sociedad de esas tecnologías, sin las cuales no podría funcionar, la pérdida de privacidad y el incremento del control sobre los individuos y grupos sociales, el desfasaje de los sistemas educativos frente a las demandas de la utilización de esas tecnologías y las desigualdades culturales y económicas. En ese sentido el autor indica que "El acceso a las nuevas tecnologías y al conocimiento e información está al alcance de aquellas personas que tengan las posibilidades materiales y las habilidades adecuadas para comprarlas y usarlas, provocando un aumento de las distancias culturales y sociales" [8, p. 8]

3 El curso para final de Matemática A

Ante la problemática del mal desempeño en los exámenes finales de la materia, la cátedra decidió intervenir en busca de una solución. A partir de lo que se observaba en las clases de consulta previas a las mesas de examen se elaboró un diagnóstico de cómo los estudiantes preparaban el examen final. [1] "Se detectaba que el alumno no

estaba preparando el examen con la debida anticipación y que en el momento de prepararlo recurría a incorporar tecnicismos sin percatarse de que debía comprender los contenidos de la materia y aprender a integrarlos" [1, p. 241], además los alumnos no tenían "con quien compartir un intercambio de ideas acerca de cómo resolver un problema, tienen en general una actitud pasiva ante la presentación de un problema, ya que no intentan investigar cómo resolverlo y buscan una solución a partir de 'recetas'" [1, p. 241]. A consecuencia de esta valoración, la cátedra decidió intervenir ofreciendo un curso para final de carácter optativo para orientar y acompañar a los alumnos en la preparación de su examen, apuntando a generar un proceso en el que el alumno aprenda a estudiar de manera anticipada y ordenada y "comprendiendo que no alcanza con tener una mirada superficial de los contenidos de la materia para poder acreditar que se alcanzaron los objetivos propuestos por la cátedra" [1, p. 241]. Con este propósito se implementó el curso, buscando "crear un espacio de intercambio entre alumnos que adeudaban el final tratando de promover en ellos una actitud de participación activa y colaborativa." [1, p. 241]

La preparación de un examen final es una tarea que puede resultar novedosa y difícil para un estudiante de primer año y la misma forma parte de la transición a la vida universitaria. El curso para final actúa en este sentido proveyendo un espacio en el cual los estudiantes pueden compartir la preparación de su examen con otros compañeros con la guía de un docente de la asignatura, es decir, se trata de un espacio centrado en la educación de los estudiantes que contribuye a su integración a la vida intelectual y social de la institución. Es decir, se buscó idear un curso que reúna las cualidades que caracterizan a los programas efectivos de retención.

El curso tiene una duración de ocho semanas con dos clases semanales de dos horas, clases de consulta previas a las evaluaciones y clases de muestra de exámenes. Es dictado por un docente con vasta experiencia en la Cátedra lo que permite que detecte dificultades en el aprendizaje de ciertos contenidos y busque estrategias para resolverlas. Habitualmente se trata de cursos de aproximadamente sesenta alumnos. Los contenidos de la asignatura se dividen, para el desarrollo del curso, en cinco áreas temáticas:

1. Continuidad y derivabilidad de funciones de una variable.
2. Estudio de función. Función inversa.
3. Rectas. Superficies. Funciones a valores vectoriales.
4. Diferenciación de funciones de varias variables.
5. Optimización de funciones de una y varias variables.

Teniendo en cuenta que los alumnos a quienes está dirigido el curso han aprobado la cursada y ello supone que han trabajado con gran parte de las actividades propuestas en el Libro de Cátedra, se elaboró una guía de actividades complementarias para el curso. Asimismo, los alumnos conocen el cronograma desde el inicio del curso. Además, antes de cada clase se indica a los alumnos cuáles serán los contenidos a tratar, la sección del Libro de Cátedra que se recomienda repasar y cuáles son las actividades que se sugiere traer resueltas a la clase correspondiente. El propósito de ello es que los estudiantes lleguen a la clase habiendo repasado los contenidos que se tratarán, de modo que puedan identificar dudas y dificultades que han tenido y revisar el trabajo que realizaron con esos temas durante la cursada. Cada clase incluye una síntesis de los contenidos correspondientes, a cargo del docente y la puesta en común del trabajo realizado con las actividades propuestas. En esta tarea, se busca abordar conceptos y propiedades de la asignatura relacionándolos unos con otros, con el campo de problemas que permiten resolver y con los procedimientos y argumentaciones válidas para hacerlo.

La modalidad de evaluación permite a los alumnos aprobar los contenidos rindiendo exámenes durante el dictado del curso, lo cual los exime de rendir los temas correspondientes en el examen final. Para acceder a rendir las evaluaciones se requiere que los alumnos asistan a al menos dos tercios de las clases correspondientes al área evaluada. Las evaluaciones son escritas y se componen de problemas similares a los que la Cátedra incluye en los exámenes finales.

En base a las consideraciones señaladas en la Fundamentación acerca de los criterios empleados en la evaluación y en concordancia con que "uno de los aspectos centrales en los que reside la complejidad de la adquisición del conocimiento matemático es la diversidad de conocimientos que confluyen en una actividad matemática" [9, p. 52] procuramos evaluar las producciones de los alumnos desde una perspectiva que tenga en cuenta la adquisición de conceptos, propiedades y definiciones de la materia (conocimientos de orden I en el trabajo citado), pero también que esté dirigida a ver si los alumnos saben cómo utilizarlos en la resolución de una tarea. Esto es, que sepan "las reglas del juego" del hacer matemático, compuestas por las reglas semióticas y las reglas que controlan la verdad y la validez en matemática (conocimientos de orden II, en el trabajo citado). "Por ejemplo, para hacer matemática uno debe ser capaz de expresar correctamente en varios registros semióticos, ser capaz de ver correspondencias entre las distintas expresiones, etc.; uno debe saber que hay que validar los resultados y que hay reglas para demostrar, etc." [9, p. 57]. Los autores señalan, en síntesis, que si bien uno puede focalizar la evaluación en

algún tipo de conocimientos, ello no puede hacerse sin tener en cuenta los otros tipos de conocimientos necesarios para la actividad.

La comunicación en torno a los criterios de evaluación se aborda en las clases del curso mediante un diálogo argumentado con los alumnos. En las puestas en común de las actividades se explicitan las características que se consideran necesarias para que la tarea esté bien resuelta. Así, se discuten, entre otras cosas, las maneras correctas o incorrectas de escribir, las razones por las cuales es necesario recurrir a definiciones y teoremas para fundamentar un planteo, la importancia de verificar las hipótesis de las propiedades utilizadas en la resolución, las situaciones en las cuáles se llega a resultados incorrectos al aplicar equivocadamente un enunciado, etc. La devolución de las evaluaciones resulta central dentro de esta comunicación. Los exámenes son corregidos y calificados por el docente a cargo del curso, quien comenta por escrito cada entrega. Las clases en las que se muestran los exámenes están destinadas a conversar con los alumnos acerca de sus producciones, los criterios utilizados para evaluarlas, las correcciones y las calificaciones obtenidas. Entendemos que estas instancias son valiosas para los alumnos porque les brindan una retroalimentación que apunta a que puedan identificar aquello que está bien en su trabajo y a recibir sugerencias acerca de lo que deben mejorar.

4 Modalidad virtual del curso para final

El curso para final se dicta en la presencialidad una vez en cada semestre. Al inicio del primer semestre de 2020 cuando comenzó el aislamiento social debido a la pandemia covid-19 y a causa de la incertidumbre sobre la situación, se decidió suspender el dictado del curso en el primer semestre. Se decidió esperar y estudiar cómo podía llevarse a cabo el mismo en la virtualidad. Finalmente, se dictó el curso para final en modalidad virtual en el segundo semestre de 2020, para 121 alumnos divididos en dos comisiones. Y al año siguiente, en 2021, aún en el contexto de virtualidad, se dictó para una comisión de 67 alumnos en el primer semestre y una de 84 en el segundo.

Cada año se inscriben a Matemática A una cantidad del orden de dos mil estudiantes, sin embargo el número de alumnos que cursan efectivamente la materia es menor (Tabla 1). En la tabla, dentro de los alumnos que cursaron efectivamente no se contaron a los que se inscribieron y nunca asistieron a clase y tampoco a los que abandonaron la cursada. Durante los semestres en los cuales se dictó la materia de manera virtual, el porcentaje de alumnos que no promocionó la materia y, en consecuencia, debían rendir el examen final fue mayor respecto a los semestres en los que la materia se dictó en forma presencial (Tabla 1). Estos alumnos que quedaron en la instancia de rendir el examen final, son los potenciales interesados en hacer el curso de final que ofrecemos cada semestre.

Tabla 1. Cantidad de alumnos que no promocionaron la materia y, en consecuencia, deben rendir examen final en los años 2019 (presencial) y 2020 y 2021 (virtual).

Año	Modalidad	Cantidad de inscriptos (contando ambos semestres)	Cantidad de alumnos que cursaron efectivamente la materia	Cantidad de alumnos que fueron a examen final	Porcentaje de alumnos que fueron a examen final (sobre los que cursaron efectivamente)
2019	Presencial	2092	1174	81	6,89%
2020	Virtual	2176	1123	161	14,34%
2021	Virtual	1952	1035	193	18,65%

En cada una de sus ediciones en la virtualidad, la información acerca del período de inscripción y fecha de inicio del curso se publicó en la página de la cátedra. Los alumnos se inscribieron mediante el envío de un formulario Google hasta completar el cupo.

Para cada comisión se dispuso un aula virtual en Google Classroom. Se utilizó el "Tablón" de novedades de Classroom para la publicación de información (cronograma, avisos, listas de asistencia y calificaciones) y la sección de "Trabajo de clase" para compartir los materiales utilizados.

Se mantuvo la estructura de dos clases semanales de dos horas y además clases de consulta previas a las evaluaciones y encuentros destinados a la devolución de los exámenes. Todas ellas fueron sincrónicas y tuvieron lugar

en la plataforma Zoom.

En la semana previa al inicio del curso se realizó vía Zoom una reunión informativa con el fin de explicar a los alumnos su modalidad e informar cuáles serían los recursos tecnológicos necesarios para cursar. En esa reunión informativa se compartió también el instructivo que elaboramos con la explicación de cómo registrarse en Classroom.

La comunicación con los alumnos fuera del horario de clase se realizó vía e-mail. Por este medio se enviaba información y se respondían consultas relativas a cuestiones administrativas.

Los alumnos conocían el cronograma desde el inicio del curso y además cada semana se publicaba en Classroom cuáles serían los contenidos a tratar y las actividades propuestas para cada clase de la semana siguiente.

Como señalamos, las clases fueron sincrónicas y tuvieron lugar en la plataforma Zoom. Durante las mismas utilizamos la herramienta "Compartir pantalla". Esta herramienta nos permitía trabajar sobre archivos pdf elaborados previamente por el docente para resumir los contenidos básicos del tema a tratar y también compartir imágenes de los cuadernos de los alumnos cuando quisieran mostrar alguna de sus producciones. También utilizamos una cámara adicional orientada a hojas de papel del docente, para poder escribir y hacer gráficos con lápiz y papel. A diferencia de la instancia donde se trabajaba con un pdf, esta forma facilita el aprendizaje de cómo construir el gráfico de un problema uniendo los elementos con los que se cuenta o como se relacionan los datos del problema en la resolución analítica del mismo, todo en función de las propuestas que los mismos alumnos hacían con la guía del docente. También se utilizó la herramienta del chat de Zoom, mayormente por los alumnos que preferían no usar el micrófono.

Los alumnos participaban de forma oral o bien por escrito mediante el chat y compartiendo imágenes de sus cuadernos en la pantalla. Durante las puestas en común, la participación de los alumnos era diversa. Había un grupo de alumnos que asistía a las clases habiendo repasado los temas correspondientes, con los problemas propuestos planteados o resueltos; estos estudiantes discutían sobre lo que habían realizado y consultaban sus dudas. Asimismo, había otros alumnos con una actitud más pasiva, que asistían a las clases más como "espectadores".

Las clases de consulta previas a las evaluaciones, que no eran de asistencia obligatoria, contaron siempre con un alto presentismo, incluso mayor al que se registraba en las clases de este tipo en la presencialidad. Estas consultas se desarrollaban discutiendo la resolución de actividades propuestas por los alumnos y durante las mismas no había, por lo general, momentos en los que no estuviéramos trabajando.

Teniendo en cuenta la posibilidad de que algún problema técnico impidiera la conexión de todos a las videoconferencias en Zoom, se subieron a Classroom grabaciones en video con explicaciones de los temas correspondientes a cada clase una vez que el tema ya había sido tratado en el curso y se publicaron los archivos pdf elaborados por el docente, que estuvieron disponibles durante toda la duración del curso.

En las clases, además de la cámara orientada a las hojas de papel, se conectaba la cámara de la computadora enfocada al docente porque entendíamos que era positivo que los alumnos vieran el rostro de una persona procurando con ello a que la interacción fuera tal vez menos fría o distante. No se les pedía a los alumnos que hicieran algo similar, salvo durante las evaluaciones. También, había algunos momentos de distensión durante las clases mediante breves charlas acerca de cuestiones no académicas surgidas a partir de diversos ruidos que se oían en el ambiente, distancia geográfica entre los asistentes y noticias nacionales vinculadas a la pandemia, entre otras. A los alumnos parecía agradarles participar en estas pequeñas charlas, lo cual, entendemos, también contribuía en alguna medida a estrechar la comunicación y fomentar la participación.

Las evaluaciones fueron escritas y de dos horas de duración cada una: evaluación de unidades temáticas 1 y 2, evaluación de unidades temáticas 3 y 4 y evaluación de unidad temática 5. Se mantuvo el requisito de porcentaje de asistencia obligatoria de la presencialidad para poder rendir las evaluaciones. Los alumnos debían resolverlas con papel y lápiz, elaborar un archivo pdf con las fotografías de sus hojas y entregarlo en una "Tarea" en Classroom. Para evitar dificultades al momento de la entrega de las evaluaciones, durante la segunda semana del curso se realizó una tarea a modo de ensayo para que los alumnos aprendieran a subir archivos a Classroom. Los exámenes se tomaron utilizando la plataforma Google Meet, la cual, a diferencia de la versión gratuita de Zoom, permite realizar videoconferencias con una duración de varias horas. Se pidió a los alumnos que se presentaran a las videoconferencias con cámara y micrófono encendidos y permanecer en las reuniones hasta la entrega de su examen. Las evaluaciones se corregían haciendo comentarios por escrito sobre los archivos entregados. Los alumnos recibían estas devoluciones escritas y luego se realizaba una clase de muestra de exámenes en la cual los interesados podían dialogar con el docente acerca de sus producciones y las correcciones y calificaciones obtenidas.

Una vez finalizado el curso, el alumno debía rendir en el examen final los temas de las unidades temáticas que no hubiese aprobado durante el curso. La modalidad del examen final era la misma que en las evaluaciones de las unidades temáticas. La nota final del alumno se conformaba a partir de sus producciones en las distintas instancias de evaluación.

5 Resultados

Dentro de cada área temática, se analizó el porcentaje de alumnos que aprobaron (Figura 1), que desaprobaron (Figura 2) y que estuvieron ausentes en la evaluación (Figura 3). El análisis de la aprobación por área temática en el curso de apoyo en la virtualidad muestra que hubo un descenso en cada una de ellas si se compara con los resultados obtenidos en la presencialidad (Figura 1).

En las áreas temáticas 1-4 el porcentaje de aprobación bajó entre 6 y 18 puntos, notándose un gran descenso en el área temática 5 donde el porcentaje bajó en 29 puntos. Esta diferencia en el área temática 5 puede deberse al aumento en el porcentaje de ausentes a esta evaluación y a que la reducción del tiempo para el dictado del 2° semestre 2020 repercutió en el dictado de esta última parte de la materia. Notamos asimismo que el porcentaje de alumnos ausentes en las evaluaciones fue mayor también en las otras áreas (Figura 3).

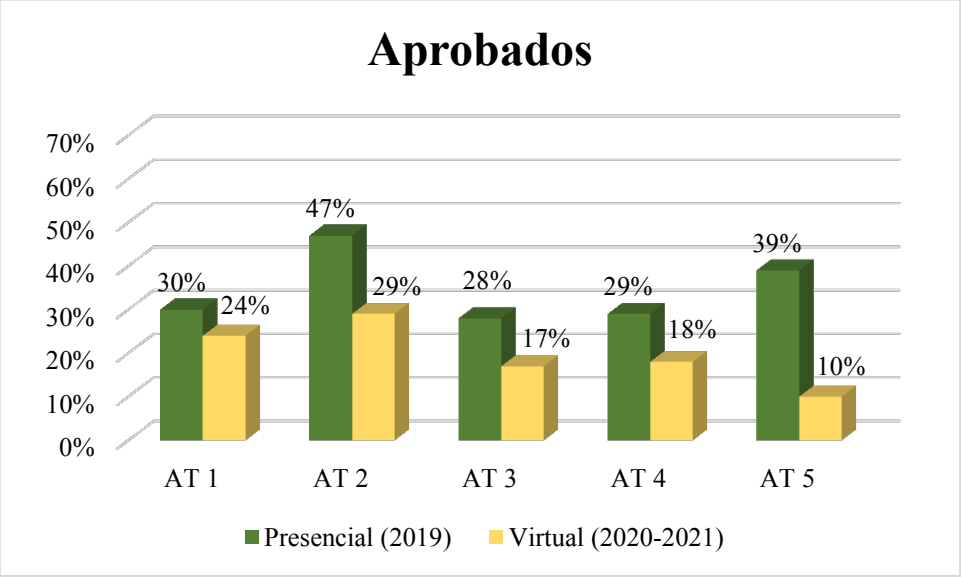


Fig. 1. Comparación de porcentajes de alumnos aprobados por área temática (AT) en las evaluaciones del curso para final, sobre el número total de inscriptos al curso en las últimas dos ediciones presenciales (año 2019) y las ediciones en la virtualidad (años 2020 y 2021).

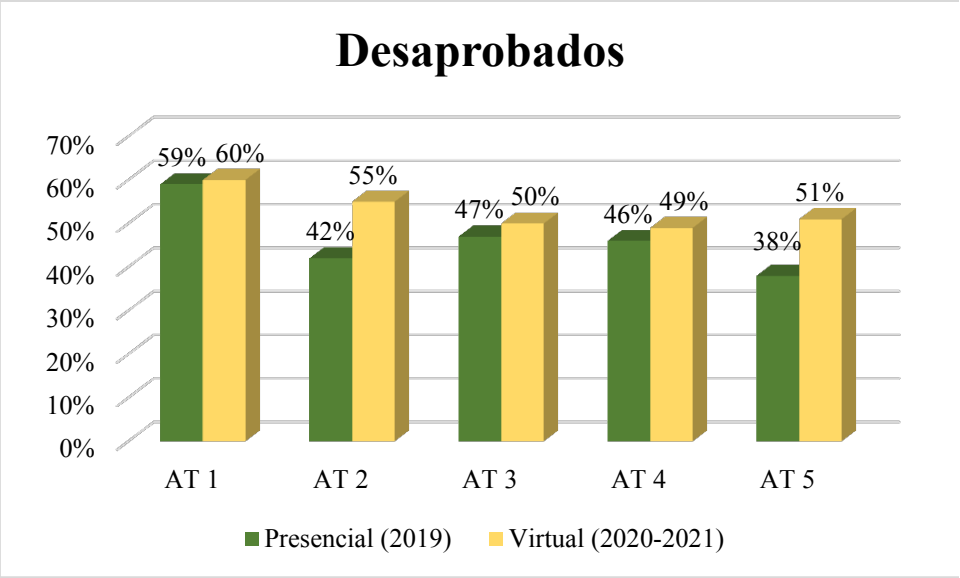


Fig. 2. Comparación de porcentajes de alumnos desaprobados por área temática (AT) en las evaluaciones del curso para final, sobre el número total de inscriptos al curso en las últimas dos ediciones presenciales (año 2019) y las ediciones en la virtualidad (años 2020 y 2021).

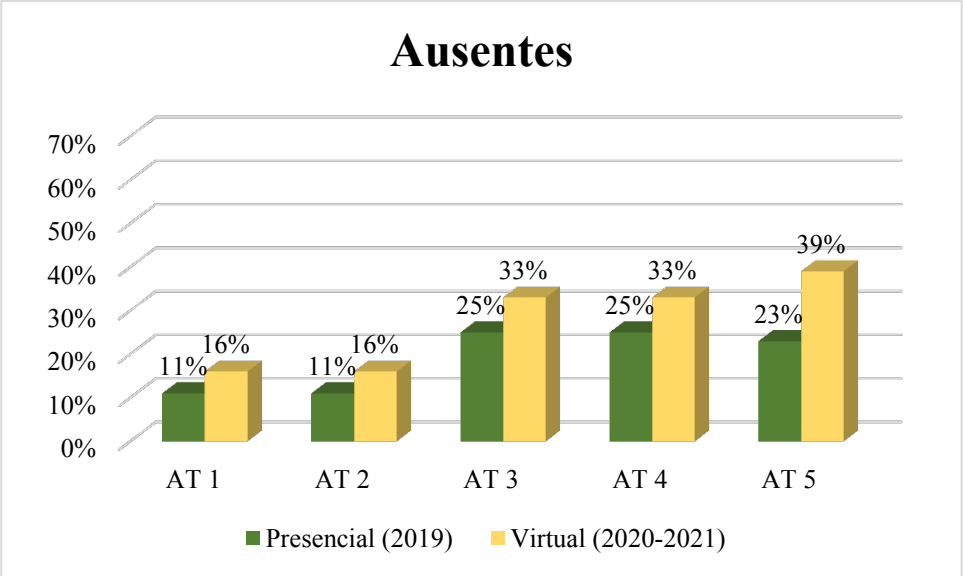


Fig. 3. Comparación de porcentajes de alumnos ausentes por área temática (AT) en las evaluaciones del curso para final, sobre el número total de inscriptos al curso en las últimas dos ediciones presenciales (año 2019) y las ediciones en la virtualidad (años 2020 y 2021).

En cuanto a la comparación de resultados en las mesas de final, vemos que en la presencialidad y la virtualidad el porcentaje de alumnos que no hizo el curso y aprueba el examen final se mantuvo (Figura 4). Mientras que en el caso de los alumnos que hicieron el curso el porcentaje de alumnos que luego aprobó el examen final fue algo menor en la virtualidad (Figura 5). Esta baja en el porcentaje puede relacionarse con el mayor ausentismo en clase y en los exámenes así como a la participación menos activa en el trabajo en clase. Asimismo, podemos considerar que casi todos los alumnos que realizaron el curso en la virtualidad fueron alumnos que aprobaron la cursada también en la modalidad virtual. Aún así, en las mesas de final virtuales, el porcentaje de alumnos que aprobaron el examen habiendo hecho el curso triplican al porcentaje de alumnos que aprobaron sin haberlo realizado.

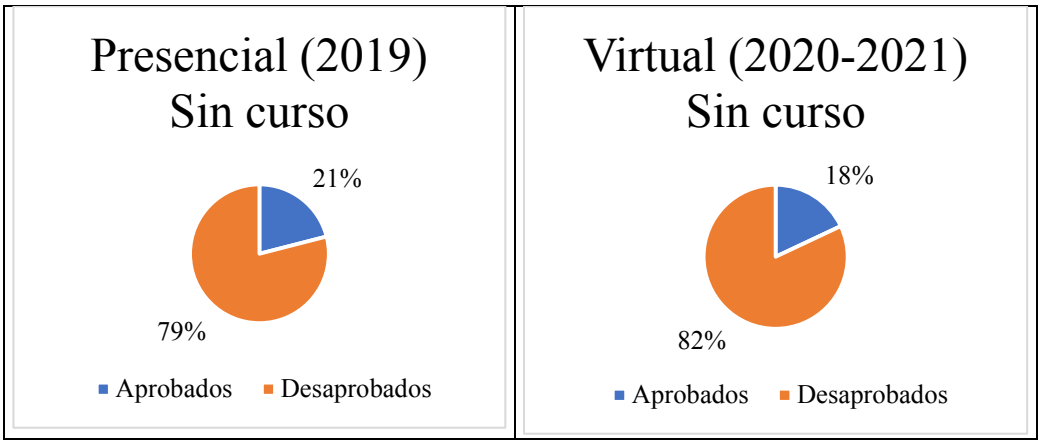


Fig. 4. Porcentaje de alumnos aprobados y desaprobados sobre el total de alumnos que rindieron el examen final sin haber realizado el curso, en la presencialidad (en el año 2019) y en la virtualidad (años 2020 y 2 021).

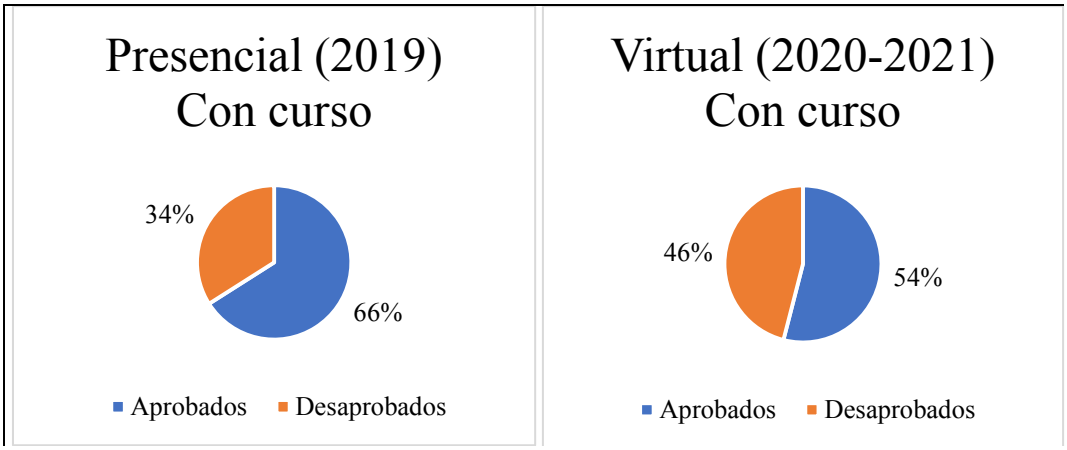


Fig. 5. Porcentaje de alumnos aprobados y desaprobados sobre el total de alumnos que rindieron el examen final luego de realizar el curso, en la presencialidad (en el año 2019) y en la virtualidad (años 2020 y 2021).

6 Conclusiones y trabajos futuros

La cátedra utiliza desde hace varios años la implementación de un curso de apoyo para rendir el examen final con el fin de impactar en el bajo rendimiento en las mesas de examen. Con el inicio de la pandemia y, en consecuencia, de los cursos virtuales, creció el porcentaje de estudiantes que no promocionan la asignatura y deben rendir examen final. Esto acrecentó la necesidad de continuar con el mismo, durante los años 2020 y 2021 donde la Facultad de Ingeniería dictó clases únicamente en forma virtual. En el primer semestre 2020 se suspendió el dictado del curso y esto nos permitió utilizar la experiencia virtual adquirida durante los cursos regulares de ese semestre para adaptar el curso para final a la virtualidad.

Por un lado, valoramos que el curso de final haya podido realizarse, teniendo en cuenta el contexto de pandemia en el que se llevó a cabo y la poca experiencia previa tanto de alumnos como de docentes en el uso de herramientas virtuales. Por otro lado, los resultados muestran que hubo un descenso en el porcentaje de alumnos que hicieron el curso virtual y aprobaron el examen respecto a los cursos presenciales de ediciones anteriores. Sin embargo, destacamos que el porcentaje de alumnos aprobados en mesas de final entre alumnos que hicieron el curso sigue siendo bastante mayor al de aprobados entre alumnos que no hacen el curso. Por este motivo, valoramos esta estrategia de retención y nos motiva a continuar con su implementación.

Durante 2022 el curso se sigue dictando pero nuevamente de manera presencial. En esta edición creció la de-

manda de inscripción, en parte motivada por el aumento de alumnos que en la virtualidad aprobaron la cursada de Matemática A y quedaron adeudando el examen final.

Agradecimientos. A los docentes que participaron del dictado del curso de final y de sus evaluaciones así como también de los alumnos que fueron parte de la experiencia en las distintas ediciones.

Referencias

1. Guardarucci, M. T..; Langoni, L.: Finales de primer año: estrategias de ayuda. Actis, M. D. et al. (Eds.): *Segundas Jornadas de Investigación y Transferencia 2013 - 1a ed*. La Plata: Universidad Nacional de La Plata, pp. 239-244 (2014).
2. Tinto, V.: The principles of effective retention. *ERIC,* pp. 1-18 (1987) .
3. Tinto, V.: Research and practice of student retention: What next? *Journal of college student retention: Research, Theory & Practice,* 8(1), pp. 1-19 (2006).
4. Tauber, F.: Universidad Nacional de La Plata 2020. Avances y desafíos de un modelo de universidad pública. Trabajo final integrador. *SEDICI, Repositorio institucional de la UNLP.* http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/115634 (2020) Accedido el 24 de Mayo de 2022.
5. Palou de Maté, C.: Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. Palou de Maté, C. (Comp.): *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua*, pp. 19-48 (2003).
6. Cabero Almenara, J.; Llorente Cejudo, M. D. C.; Román Graván, P.: Las herramientas de comunicación en el "aprendizaje mezclado". *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación,* 23, pp. 27-41 (2004).
7. Salmon, G.: E-moderating in higher education. Howard, C.; Schenk, K.; Discenza, R.: *Distance learning and university effectiveness: Changing educational paradigms for online learning*, IGI Global, pp. 55-78 (2004).
8. Moreira, M. A.: Problemas y retos educativos ante las tecnologías digitales en la sociedad de la información. *Quaderns digital* (2003).
9. Panizza, M.; Drouhard, J. P.: Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. Palou de Maté, C. (Comp.): *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua*, pp. 51-73 (2003).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Virtualidad y Evaluación: Un desafío para materias masivas de matemática

Di Domenicantonio Rossana[1], García Mabel[2], Langoni Laura[2],
[1] IMApEC, Facultad de Ingeniería, UNLP
Calle 1 y 47 (1900) La Plata
rossanadido@ing.unlp.edu.ar
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP
Calle 1 y 47 (1900) La Plata
{mabel.garcia, laura.langoni}@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se relata la experiencia de la evaluación virtual que se llevó a cabo en dos materias de Matemática de La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata durante los años 2020 y 2021 donde las actividades académicas de la institución fueron completamente remotas. Ambas asignaturas forman parte del primer año del plan de estudios de las trece carreras que se dictan en esa Facultad, motivo por el cual, entre ambas, se atienden del orden de 2000 estudiantes por semestre. Esta masividad de estudiantes aportó un desafío adicional a la tarea de la evaluación virtual. Se describe el tipo de evaluación diseñada, el cambio en el formato de las preguntas respecto a la evaluación presencial y los tiempos asignados para su realización. Asimismo, se muestran algunos resultados cuantitativos.

Palabras Clave: Evaluación virtual, Matemática, Materias masivas.

1 Introducción

En este trabajo se relatan los cambios que se realizaron en la evaluación de las asignaturas Matemática para Ingeniería y Matemática A de la Facultad de Ingeniería (FI) de la UNLP por la situación imprevista de la pandemia COVID-19. Al ser las primeras materias del plan de estudio de las trece carreras de la FI, son las asignaturas con mayor cantidad de alumnos inscriptos y de docentes asignados a su dictado cada año. Antes de la pandemia, las clases en forma presencial se desarrollaban con metodología de aula taller y los alumnos tenían la posibilidad de promocionar ambas asignaturas con las evaluaciones parciales. Debido a la situación epidemiológica, desde marzo de 2020 el proceso de enseñanza y aprendizaje se debió llevar a cabo con modalidad virtual en ambos semestres. Para esto se realizaron cambios metodológicos tanto en las clases como en las evaluaciones parciales. Las motivaciones que llevaron a estos cambios fueron la retención de alumnos, la calidad del aprendizaje, la mejora continua de la metodología de enseñanza a distancia y la acreditación de la materia manteniendo la posibilidad de promoción.

Durante el primer semestre de 2020 y 2021, entre ambas asignaturas, hubo en promedio 2352 alumnos inscriptos por año y 100 docentes asignados a las 26 comisiones. En el segundo semestre de esos años cursaron 1874 alumnos con 75 docentes y distribuidos en 19 comisiones (Tabla 1).

Cabe mencionar que Matemática para Ingeniería además dictó un curso intensivo en el verano 2020 y 2021 pero los mismos no fueron considerados en el presente trabajo.

Tabla 1. Cantidad de alumnos, docentes y comisiones en el año 2020 y 2021.

Números sobre las materias		Cantidad de alumnos inscriptos en promedio	Cantidad de docentes	Cantidad de comisiones
Matemática PI	1° semestre	1002	33	8
	2° semestre	1160	44	10
Matemática A	1° semestre	1350	67	18
	2° semestre	714	31	9

En el primer semestre, se iniciaron las clases de manera presencial con la metodología propia de las dos asignaturas. Ante la situación mundial de la pandemia COVID-19, el Consejo Directivo, en su sesión del día 16 de marzo dispuso que las clases en su formato presencial quedaran suspendidas y que se debía mantener el contacto con los alumnos de manera virtual. En un principio se pensó que esta situación sería por unos días, pero, como es conocido, el aislamiento social se extendió por meses y, en el caso de la FI hasta marzo de 2022, cuando se retornó a la presencialidad plena.

En este trabajo se relatan los cambios implementados desde la coordinación de ambas asignaturas para poder llevar a cabo la evaluación. Se muestran al final los resultados cuantitativos obtenidos en ambas asignaturas durante esta experiencia y se analizan posibles mejoras en futuros cursos.

2 Fundamentación

Martínez afirma que la evaluación es una práctica profesional, socio-personal y colectiva, que fue evolucionando a lo largo de la historia y se va transformando según distintos acontecimientos, perspectivas o paradigmas [1]. La pandemia obligó a una transformación urgente y a llevar a cabo acciones para enfrentar una evaluación masiva y remota para la que las universidades de corte presencial no estaban preparadas.

Las medidas adoptadas debieron ajustarse más por la urgencia que por una planificación hecha a priori [2]. Pero aun en este contexto, y en acuerdo con González, Marco y Medina [3], fue importante pensar en una evaluación adaptada al entorno virtual y no en una simple transposición de lo presencial a lo digital. Goin y Gibelli [4] advierten que en Argentina el acceso a equipamiento (computadora, dispositivo móvil e internet) y el acercamiento a las TIC son heterogéneos y en esto intervienen distintos factores: sociales, económicos, generacionales, culturales y de género, entre otros. Esta heterogeneidad fue un factor a tener en cuenta al momento de confeccionar las evaluaciones virtuales y decidir qué recursos debían tener los alumnos ingresantes para poder realizarlas. También es importante destacar que la mayoría de los alumnos y los docentes no habían tenido experiencias de educación a distancia previas. En relación con esto Litwin señala “Tampoco podemos dejar de considerar que, para amplios grupos de población con necesidades básicas insatisfechas o en comunidades rurales que aún tienen dificultades con la telefonía o la electricidad, el ingreso de las tecnologías sigue siendo una utopía.” [5, p. 4]. Como paliativo a estas cuestiones la UNLP inició un programa para que los alumnos que no contaran con dispositivos electrónicos adecuados pudieran acceder a ellos mediante la beca “Tu PC para Estudiar”. Además, se liberaron datos móviles en las distintas compañías de teléfono para las comunicaciones institucionales. Aún con todo esto, se decidió, en ambas materias, no poner como requisito el uso de cámara durante los exámenes, dado que podía ser excluyente para muchos estudiantes. A la par de esto, la nueva manera de evaluar generó preocupación en los docentes por la presunción de posibles conductas deshonestas por parte de los alumnos, tales como la comunicación entre ellos durante la evaluación o la suplantación de identidad. Sin embargo, debe señalarse que no existen muchos estudios que comparen en profundidad conductas deshonestas en pruebas presenciales y online [6]. Atendiendo a esto, se incluyó una instancia oral posterior a la evaluación escrita que en la presencialidad no se utilizaba. Para esta nueva instancia oral si se requería que los alumnos colocaran una cámara y micrófono para la interacción con los docentes durante la evaluación.

3 Desarrollo

En forma presencial las evaluaciones parciales se realizaban de manera simultánea en todas las comisiones de alumnos. Estas evaluaciones tradicionales estaban divididas en dos partes: una con ejercicios de cálculo directo y la otra, con problemas, pensadas para observar si los alumnos sabían tanto hacer cálculos como comprender y resolver problemas. Se decidió en esta nueva situación tomar exámenes parciales respetando la idea de las dos partes mencionadas. Como sugiere García Peñalvo, se debe tratar de evitar lo memorístico, incluso pensar en evaluaciones donde recurrir a distintos materiales sea algo permitido y cuando esto se dificulte, combinar banco de preguntas aleatorias con buen manejo del tiempo de resolución, minimizando así la posibilidad de copia [7].

Realizar este tipo de evaluaciones en un formato virtual, llevó un tiempo de reflexión, toma de decisiones y coordinación para poder implementarlo de manera masiva. La primera parte de ejercicios, de desarrollo más mecánico, se hizo a través de un cuestionario de autocorrección con preguntas de opción múltiple, respuesta corta, verdadero o falso, emparejamiento, ensayo u otras. La segunda parte se implementó con problemas a desarrollar, para luego subir la resolución al aula virtual, en un archivo PDF en el formato Tarea, durante el tiempo estipulado para ello. Además, se agregó la posibilidad de que el docente del curso completara la evaluación con una instancia oral con aquellos alumnos que considerara necesario, luego de la corrección de los parciales.

El cambio en el formato no sólo implicó el cambio de presencial a virtual, sino que también involucró el modo de realizar las preguntas de algunos temas, ya que los medios con los que contaban los alumnos al momento de rendir en forma virtual no eran los mismos que en los exámenes presenciales. Fue necesario pensar exámenes del estilo "a libro abierto". Por ejemplo, pedir realizar un estudio completo de una función y graficarla en base al mismo, ya no tenía mucho sentido pues al realizar el examen en sus casas podían resolver la totalidad de estas cuestiones utilizando softwares sencillos como GeoGebra. En estas situaciones se buscaron ejercicios alternativos a fin de evaluar los mismos temas pero que aún con las ayudas externas el alumno tuviera que relacionar y aplicar conceptos estudiados. En cuanto a los formularios, por ejemplo, en preguntas de opción múltiple, la experiencia docente fue puesta en juego para presentar como opciones aquellas respuestas que obtendrían los alumnos con los errores habituales observados en cada tema. Las similitudes y diferencias entre la nueva forma de evaluar y la tradicional se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Comparación de las evaluaciones parciales con las distintas modalidades.

PARCIAL	Presencial	Virtual
1º Parte: Ejercicios de cálculo directo	A desarrollar por escrito.	Formulario autocorregible.
2º Parte: Problemas	A desarrollar por escrito.	A desarrollar por escrito y enviando un PDF.
Instancia oral	No contemplada.	A criterio del Profesor del curso.
Tiempos	Tres horas continuas.	Dos horas y media con intervalo de descanso entre cada parte.

La organización de la evaluación para dos materias masivas también se dificultó en cierta medida por el aspecto tecnológico, ya que la plataforma educativa virtual debía sostener la actividad de gran cantidad de alumnos y docentes en forma simultánea. Por esto, también debían tenerse en cuenta contingencias específicas, tales como caída del servidor, desconexión del aula virtual o problemas de conectividad individuales, entre otras, y pautas de actuación para cada caso [8], lo que trajo complicaciones al momento de armar, tomar y corregir el examen. A modo de ejemplos sobre este tipo de inconvenientes, podemos mencionar la caída de la plataforma Moodle al inicio de una evaluación por lo que hubo que reprogramar la fecha y preparar otro parcial. Luego de esta experiencia se optó por iniciar los exámenes con dos o tres minutos de diferencia entre las distintas comisiones a fin de no saturar la plataforma. Asimismo, los docentes de cada comisión se encontraban conectados de manera sincrónica por zoom o meet y atentos a los mensajes por correo electrónico o mediante el aula virtual a fin de poder ayudar ante problemas particulares que tuvieran los alumnos. De la misma manera, en la instancia oral, se han reprogramado horarios de evaluación por cortes de conectividad.

El establecer la duración de las evaluaciones virtuales juega un rol muy importante al momento de diseñarlas. En relación a ello, se presenta otra diferencia respecto de la evaluación presencial: mientras antes se les daba el enunciado en su totalidad y tenían tres horas continuas para resolverlo, en la virtualidad se les habilitó el enunciado

por partes, con el tiempo correspondiente a cada una de ellas y con un descanso entre cada parte. Debían resolver y entregar cada parte en el tiempo estipulado antes de tener acceso al enunciado de la siguiente.

La acreditación de la identidad del alumno fue también un aspecto relevante ya que en ambas materias no se requería cámara para las evaluaciones salvo en el momento de la instancia oral. Para el segundo semestre 2020 y ante ciertas situaciones de copia de exámenes entre los estudiantes, se les recomendó a los docentes hacer uso de la instancia oral antes de dar por aprobado el curso a los alumnos, de manera de corroborar el aprendizaje de los conceptos.

En el caso de ambas materias las evaluaciones parciales virtuales contemplan la promoción de la asignatura, como también ocurre con las evaluaciones parciales en la modalidad presencial.

4 Sobre los exámenes parciales

Las evaluaciones parciales virtuales, como se mencionó previamente, constaban de dos partes: un formulario autocorregible o cuestionario y un archivo PDF con ejercicios a desarrollar por escrito. En ambos casos se tuvo que repensar la manera de hacer las preguntas. Esto se debió a que las condiciones en las cuales estaban rindiendo (examen a libro abierto) difería notablemente de las condiciones en los exámenes presenciales.

4.1 Formularios:

En los formularios se realizaron preguntas de distinto tipo: elección múltiple, emparejamiento, respuesta numérica y respuesta corta, entre otros. Además, se utilizó aleatoriedad en el orden de las preguntas y de las opciones, formato secuencial y un banco de preguntas para que los exámenes no fueran todos iguales. En cuanto a la forma de confeccionar los enunciados, hubo que considerar que los alumnos podían estar usando algún programa como GeoGebra, Desmos o Photomath, para hacer las cuentas, el desarrollo de pasos algebraicos y/o graficar, lo que les facilitaría sus respuestas.

Puede notarse la diferencia entre cómo se evaluó el tema Cálculo de Derivadas en formato presencial (Fig. 1) y en formato virtual (Fig. 2). Mientras que en el primer caso, los estudiantes podían obtener la respuesta utilizando un programa, en el segundo caso necesitaban conocer las reglas de derivación para poder realizar el cálculo.

Calcule y'

a) $y = \sqrt[5]{x} - \ln(3x)$ b) $y = 4x\cosh(x^2+1)$ c) $y = \dfrac{\tan x}{x^3+2x}$

Fig. 1. Pregunta sobre cálculo de derivadas en un examen presencial.

La pregunta en la Fig. 2 fue confeccionada en Moodle eligiendo la opción “respuestas anidadas” y tres preguntas numéricas dentro de ella. Se confeccionaron, además, para que las respuestas sean números enteros, de manera que no fuera complicado para el alumno escribir la misma.

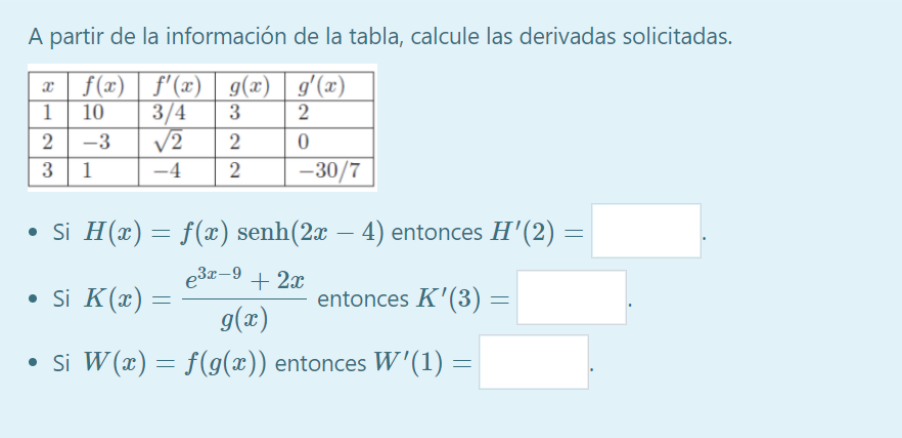


Fig. 2. Pregunta sobre cálculo de derivadas en un examen virtual.

Otro ejemplo fue la diferencia entre evaluar Cálculo de Límites en la presencialidad (Fig. 3) y en la virtualidad (Fig. 4). No se podía tomar en la virtualidad como se hacía anteriormente, ya que sólo con dibujar la función con un graficador podían conocer la respuesta al ejercicio. Por eso se diseñó la nueva consigna en la que no se conocía la expresión de parte de la función pero sí la información suficiente para poder dar respuesta al ejercicio.

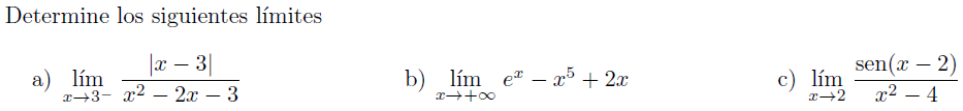


Fig. 3. Pregunta sobre cálculo de límites en un examen presencial.

La pregunta en la Fig. 4 fue confeccionada en Moodle eligiendo la opción “emparejamiento”.

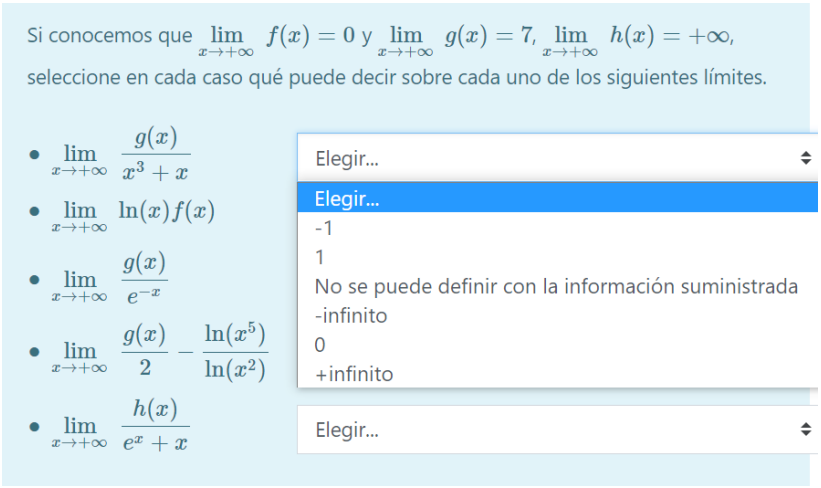


Fig. 4. Pregunta sobre cálculo de límites en un examen virtual.

En el tema Inecuaciones, de Matemática para Ingeniería, puede verse otro ejemplo de cómo se diseñaron los ejercicios. El objetivo, también fue que los alumnos tuvieran que realizar procedimientos y deducciones para mostrar su conocimiento sobre los conceptos evaluados sin que ninguna aplicación o software pudiera facilitarles las respuestas. En las Figuras 5 y 6 se muestra esta diferencia en la forma de preguntar. En el cuestionario debían relacionar lo algebraico con los datos obtenidos en la gráfica, mientras que en el examen presencial resolvían la

inecuación y graficaban lo obtenido.

Resolver la siguiente inecuación y represente el conjunto solución en la recta real:

$$1 - 3x > -5x - 7$$

Fig. 5. Pregunta sobre inecuaciones en un examen presencial.

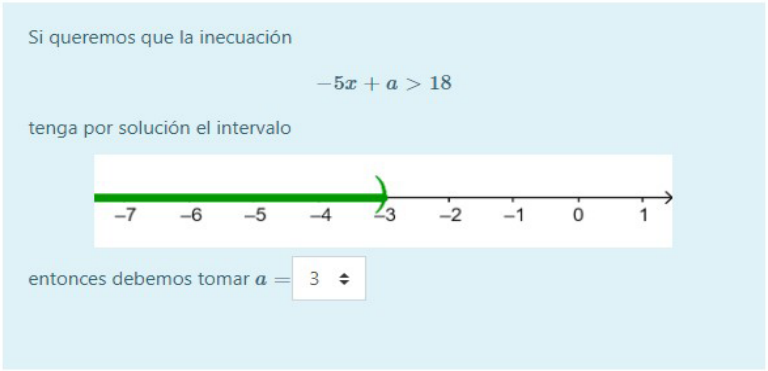


Fig. 6. Pregunta sobre inecuaciones en un examen virtual.

4.2 Preguntas para desarrollar:

La segunda parte del examen constaba de problemas que relacionaban distintos conceptos de la asignatura. Entre ellos, era habitual evaluar en la presencialidad un estudio de función (Fig. 5) de manera que obtengan su gráfica luego de analizar el signo de sus derivadas entre otros elementos. Todos los cálculos necesarios para hacerlo, incluida la confección de su gráfica eran fácilmente realizables con softwares sencillos. Por esto, se optó por otra manera de evaluar los mismos conceptos (Fig. 6).

Estudie la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ y grafíquela en base al estudio realizado.

Fig. 5. Pregunta sobre un estudio de función, esto es, la relación de la gráfica de una función con el signo de sus derivadas, en un examen presencial.

La de al lado es la gráfica de la **derivada** de una función continua f en el intervalo $[-3, 4]$. Se sabe además que $f(0) = -3$.

(a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de puntos críticos y extremos locales de f.

(b) Determine intervalos de concavidad de f y la existencia de puntos de inflexión.

(c) Proponga una gráfica aproximada para f.

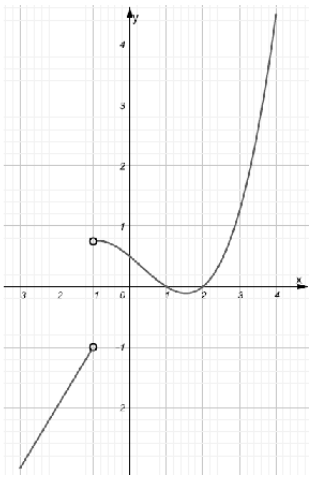


Fig. 6. Pregunta sobre un estudio de función, esto es, la relación de la gráfica de una función con el signo de sus derivadas, en un examen virtual.

4.3 Instancia oral

En la instancia oral, el profesor de cada curso fue quien confeccionó las preguntas que se le harían a cada uno de sus alumnos. A pesar de ello, en líneas generales, las mismas estaban relacionadas con la producción (aciertos o errores) de cada alumno particular en las dos primeras partes de la evaluación y con el ida y vuelta generado durante la evaluación oral, pudiéndose incluir preguntas de otros conceptos de la materia. Para el desarrollo de esta instancia se requirió que los alumnos utilizaran cámara y micrófono para acreditar su identidad y siempre estuvieron presentes al menos dos docentes del grupo. Con la finalidad de minimizar los inconvenientes tecnológicos que pudieran surgir, se pautaban las reuniones para la evaluación oral con tiempo suficiente para que los alumnos pudieran equiparse convenientemente, en algunos casos solicitando equipos o trasladándose a un lugar con mejor conectividad.

En esta instancia las preguntas estaban más orientadas a lo conceptual y no al cálculo propiamente dicho. Por ejemplo, se hacían preguntas para testear si el alumno había respondido correctamente de forma azarosa o incorrectamente por hacer mal un cálculo.

En Matemática A, por ejemplo, se les pedía que explicaran cómo harían para buscar la razón de cambio de una función en un punto y en una dirección determinados en el caso que los datos fuesen conocidos. El docente guiaba al alumno con preguntas del tipo: ¿qué necesita conocer para hacerlo? o ¿qué cuentas debería hacer? Se esperaba que los estudiantes explicaran un procedimiento pero no hicieran cuentas. Otra opción era presentarles una función y consultarles, por ejemplo: si tuviese que buscar asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de la función, ¿qué cálculos haría? y ¿qué debería pasar para que esas asíntotas existan?

En Matemática PI, se les presentaba un polinomio factorizado con factores reducibles e irreducibles y se les preguntaba acerca de cuáles eran las raíces reales y su multiplicidad. Se podía completar el tema indagando sobre otras generalidades sobre polinomios que pudiesen deducirse a partir de esa expresión. Otro ejemplo en esta materia era presentarles una figura geométrica que representara una situación problemática y preguntarles sobre qué herramientas, vistas en trigonometría, utilizarían para hallar un determinado valor relacionado con la situación pero sin pedirles que hicieran el cálculo.

5 Resultados

Es importante, como primera instancia, hacer hincapié en la relación entre la cantidad de alumnos que se inscribieron a las asignaturas y la cantidad de alumnos activos que hubo durante el período de virtualidad; considerándose alumnos activos a aquellos estudiantes que rindieron al menos un parcial. En los primeros semestres de 2020 y 2021 el porcentaje de alumnos activos en Matemática A fue 70,07% mientras que en Matemática PI el 46,01%. Esta diferencia puede deberse a que en ese período todos los cursos de Matemática PI eran de alumnos recursantes mientras que en Matemática A la mayoría de sus comisiones (13 de 18) estaban constituidas por alumnos que cursaban la asignatura por primera vez. En los segundos semestres el porcentaje de alumnos activos de Matemática A bajó a 61,06% mientras que en Matemática PI aumentó a 60,17%. Debe notarse aquí que en los segundos semestres la situación entre alumnos ingresantes y recursantes se revierte. Es asimismo importante tener en cuenta que cuando los estudiantes se inscribieron en el primer semestre 2020, aun no se sabía que las materias se desarrollarían de manera virtual.

Al momento de analizar el porcentaje de alumnos que consiguieron acreditar la materia, es útil distinguir entre considerar ese porcentaje sobre la cantidad de alumnos inscriptos o sobre la cantidad de alumnos activos (Figura 7). El primer porcentaje permite tener una noción de la cantidad de alumnos en condiciones de recursar la materia en el siguiente semestre mientras que el segundo, da una medida cierta sobre la cantidad de alumnos que, luego de cursar la materia, lograron acreditarla. Nuevamente, la diferencia en los porcentajes entre ambas asignaturas encuentra explicación en el tipo de cursos (ingresantes o recursantes) que cada una de las materias llevaba adelante en cada semestre.

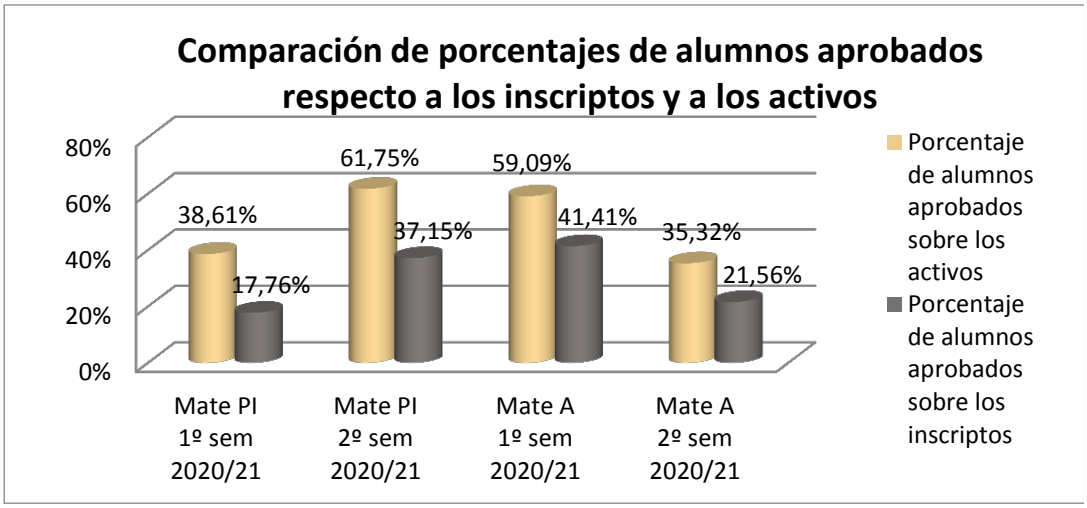


Figura 7. Comparación de porcentajes de alumnos que aprobaron ambas materias.

Por otro lado, se analizaron los porcentajes de acreditación de cada asignatura en 2020 y 2021 en comparación con el promedio de los resultados en los mismos semestres de los tres años anteriores. Estos porcentajes se obtuvieron sobre el total de alumnos inscriptos. En el caso de Matemática A, se pudo observar que este porcentaje bajó 2% en el primer semestre y tuvo una baja de un poco más de 6% en el segundo que, como ya fue mencionado, es el semestre en el que cursan alumnos que repiten la materia (Figura 8).

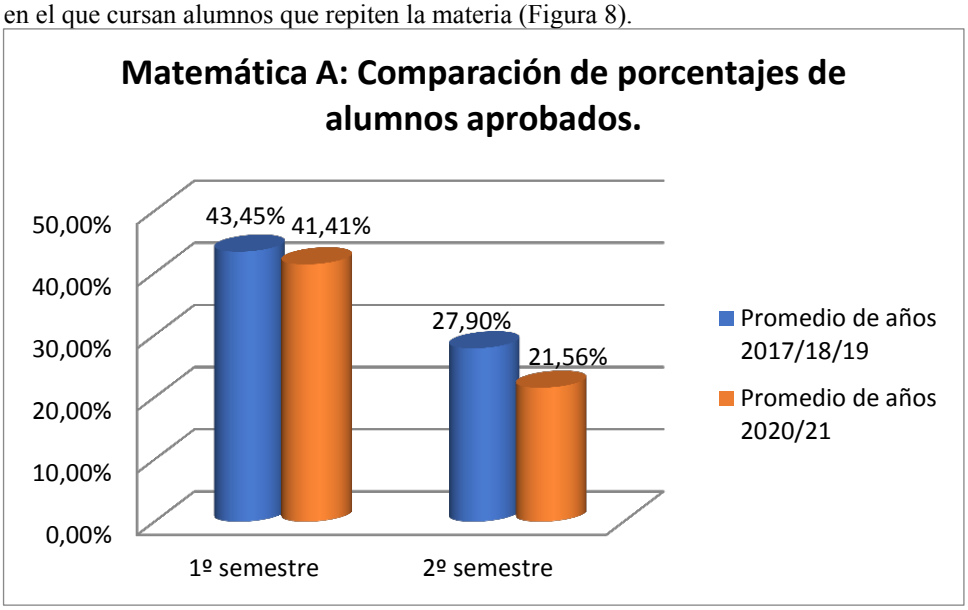


Figura 8. Comparación de porcentajes de alumnos aprobados en Matemática A en 2020/21 con los de años anteriores.

En este mismo análisis, en Matemática PI podemos notar una diferencia importante en el porcentaje de alumnos que acreditaron la materia en el primer semestre del 2020 y 2021 en comparación con los años anteriores mientras que se mantuvo sólo un 7% por abajo en el segundo semestre (Figura 9). En el primer semestre esta diferencia puede deberse a que se trata de alumnos recursantes y recién ingresados a la universidad. Mientras que en el segundo semestre ese decaimiento fue menor posiblemente porque entre los alumnos que realizaron la materia se encontraban estudiantes de escuelas secundarias que hacen la materia por primera vez y suelen ser alumnos muy activos.

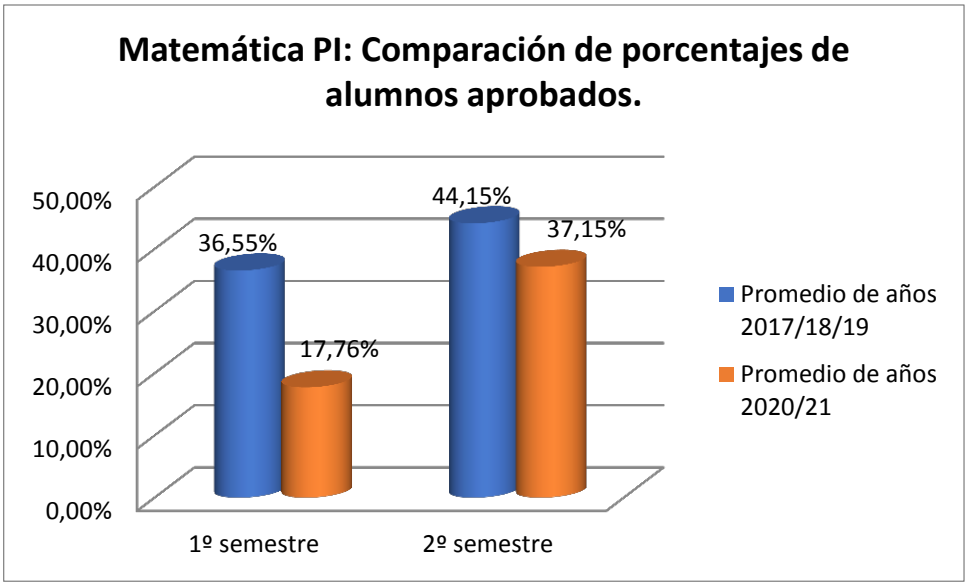


Figura 9. Comparación de porcentajes de alumnos aprobados en Matemática PI en 2020/21 con los de años anteriores.

6 Conclusiones

Puede destacarse que, respecto a los alumnos que acreditaron la materia en ambas asignaturas se obtuvo un porcentaje levemente menor respecto al porcentaje de los años anteriores cuando se refiere al semestre en el que cursaban principalmente alumnos ingresantes, mientras que ese porcentaje tuvo un descenso más grande en los semestres en los cuales cursaban mayoritariamente alumnos recursantes.

Sabemos que posiblemente se puedan mejorar este tipo de evaluaciones virtuales en varios aspectos. También pensamos que quizás, la nota final de la totalidad de los alumnos no es la misma que hubieran obtenido en la presencialidad. Sin embargo, valoramos notablemente el poder haber llevado a cabo la evaluación del orden de 2000 alumnos en cada semestre entre ambas materias, dando la posibilidad de obtener la promoción. Para poder lograrlo se diseñaron evaluaciones distintas a las habituales, en su formato, realización por etapas y tipo de preguntas. Asimismo, debe destacarse que se contó con el acompañamiento de los equipos docentes para la confección y/o implementación de las evaluaciones en cada comisión, como también con su buena predisposición para aprender rápidamente nuevas herramientas tecnológicas y buscar solución a los problemas de las plataformas y de la conectividad surgidos por esta nueva modalidad.

Para finalizar, consideramos que fue muy beneficioso el trabajo colaborativo entre la coordinación de ambas materias tanto para el diseño de las evaluaciones como por el hecho de compartir distintas experiencias surgidas en la toma y corrección de los parciales.

Agradecimientos. Reconocemos especialmente la labor del equipo docente de ambas materias que en el período de virtualidad realizaron un esfuerzo adicional para llevar adelante el dictado de sus cursos.

Referencias

1. Martínez, J. B.: *La evaluación*. Ministerio de Educación. El Salvador (2004).
2. García-Peñalvo, F.; Corell, A.; Abella-García, V.; Grande, M.: La evaluación online en la educación superior en tiempos de la COVID-19. *Education in the Knowledge Society*, Vol. 21, pp. 9-10 (2020).
3. González. M.; Marco, E.; Medina, T.: Informe de iniciativas y herramientas de evaluación online universitaria en el contexto del Covid-19. *Ministerio de Universidades de España*. https://www.usal.es/files/Informe_modelos_evaluacion_Gabinete_ministro_universidades.pdf (2020). Accedido el13 de Octubre de 2020.
4. Goin, M.; Gibelli, T.: La relación de los ingresantes de ciencias aplicadas con el saber tecnológico. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología,* No. 25, pp. 50-56 (2020).
5. Litwin, E.: *Tecnologías educativas en tiempos de internet.* Amorrortu (2005).
6. G. Sindre, G.; Vegendla, A.: E-Exams versus paper exams: A comparative analysis of cheatingrelated security threats and countermeasures. *Norwegian Information Security Conference (NISK),* Vol. 8, No.1, pp. 34-45 (2015).
7. García-Peñalvo, F.: Evaluación on line: la tormenta perfecta. *Ensinar A Distância.* https://bit.ly/2yO3K39 (2020). Accedido el 20 de Abril de 2022.
8. Cordón, O.; Alcalá, Á.; Arenas, M.; Camarillo, J.; García, D.; Gumbau, J.; Martín, J.; Martínez, R.; Puig, M.; Sampalo, F.; Vendrell, E.: Informe sobre Procedimientos de Evaluación no Presencial*. Estudio del Impacto de su implantación en las Universidades Españolas y Recomendaciones. Versión 1.0*. CRUE Universidades Españolas (2020).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Ajuste de curvas utilizando un recurso educativo digital de diseño propio

Marta Caligaris, Georgina Rodriguez, Lorena Laugero
Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón332, 2900 San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, grodriguez, llaugero}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. En Ingeniería, es común que ciertos experimentos produzcan un conjunto de puntos y que sea necesario estimar el valor de un punto entre estos valores discretos o realizar una predicción. Ante este tipo de situaciones, se recurre a lo que se denomina ajuste de curvas. Uno de los métodos utilizados es el de mínimos cuadrados. Con el objetivo de que el estudiante utilice este método, centrándose en la resolución de los problemas que se le proponen y no en la realización de tediosos cálculos, se diseñó un recurso educativo digital. El objetivo principal de este trabajo es mostrar el recurso diseñado y la secuencia didáctica que se elaboró y aplicó en el curso de Análisis Numérico de la carrera Ingeniería Electrónica de la Facultad Regional San Nicolás. También se presentan los resultados de una encuesta realizada a los alumnos sobre el uso de este tipo de recursos durante su aprendizaje.

Palabras Clave: Recurso educativo digital, Scilab, Mínimos cuadrados, Habilidades.

1 Introducción

Muchos experimentos provenientes de problemas ingenieriles, devuelven como resultado un conjunto discreto de puntos. Con la finalidad de poder estimar un valor intermedio o realizar una cierta predicción, se utiliza un ajuste de curvas. Por medio de un ajuste, es posible obtener la ley de una función que permita describir adecuadamente ese conjunto de puntos, sin coincidir necesariamente en todos los puntos. Uno de los métodos utilizados para obtener la ley de esa función es el método de mínimos cuadrados. Este método se basa en minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre las ordenadas de los puntos generadas por la función elegida y las dadas como dato [1].

Con el objetivo de que el estudiante aprenda a utilizar este método, pero centrándose solamente en la resolución de los problemas que se le proponen en lugar de realizar tediosos cálculos, se diseñó un recurso educativo digital. La incorporación de este tipo de recursos permite generar situaciones donde el alumno, además de ser el principal protagonista de su proceso de aprendizaje, pueda desarrollar ciertas habilidades tales como estimar, comparar, analizar, justificar, entre otras.

El objetivo central de este trabajo es mostrar el recurso educativo digital diseñado y la secuencia didáctica que se elaboró y aplicó en el curso de Análisis Numérico de la carrera Ingeniería Electrónica de la Facultad Regional San Nicolás, en el ciclo 2022. Además, se muestra el resultado de una encuesta realizada para obtener la opinión de los alumnos sobre el uso de este tipo de recursos en su proceso de aprendizaje.

2 Ajuste de curvas por mínimos cuadrados

Dado un conjunto de puntos, con diferentes abscisas, una función de ajuste es una función que pasa cerca de los mismos, de manera óptima, sin que necesariamente pase exactamente por todos ellos. Si bien hay varias definiciones sobre lo que significa "de manera óptima", en este trabajo se utilizará el concepto de error cuadrático [1 – 3].

Dado un conjunto de puntos $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...,(x_p,y_p)\}$ y una función de ajuste $f(x)$ definida en un intervalo que contiene a las abscisas de dichos puntos, el error cuadrático está dado por la expresión:

$$E=\sum_{i=1}^{p}\left[f(x_i)-y_i\right]^2 \tag{1}$$

El método de mínimos cuadrados se basa en minimizar el error definido por (1). En general, como función de ajuste se utiliza una función polinomial, aunque según el comportamiento de los datos, pueden también usarse otro tipo de funciones, por ejemplo, exponenciales. Así, para obtener el polinomio de grado $n<p-1$, es necesario determinar los coeficientes $a_0,a_1,a_2,...,a_n$, de forma que sea mínima la expresión:

$$E=\sum_{i=1}^{p}\left[a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+...+a_n\cdot x_i^n-y_i\right]^2 \tag{2}$$

Para obtener estos coeficientes, se utiliza un método general de cálculo diferencial para la determinación del mínimo de una función de varias variables. Considerando a E función de las incógnitas $a_0,a_1,a_2,...,a_n$, se calculan las derivadas parciales de *E* con respecto a $a_0,a_1,a_2,...,a_n$. Derivando e igualando a cero las expresiones resultantes, se obtiene el sistema de ecuaciones (3) formado por $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial a_0}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+...+a_n\cdot x_i^n-y_i\right]\cdot 1=0\\ \dfrac{\partial E}{\partial a_1}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+...+a_n\cdot x_i^n-y_i\right]\cdot x_i=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial E}{\partial a_n}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+...+a_n\cdot x_i^n-y_i\right]\cdot x_i^n=0\end{cases} \tag{3}$$

Es conveniente escribir el sistema (3) de la forma:

$$\begin{cases}a_0\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^0+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^1+a_2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+...+a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^n=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i^0\\ a_0\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^1+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+a_2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^3+...+a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i^1\\ \vdots\\ a_0\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^n+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+1}+a_2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+2}+...+a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{2n}=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i^n\end{cases} \tag{4}$$

Si los x_i son distintos para todos los puntos y $n\le p-1$, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema (4) es distinto de cero. Bajo estas condiciones, la solución del sistema es única y puede demostrarse que la misma es un mínimo de la función *E*.

3 Las habilidades bajo el enfoque de la taxonomía de Bloom

El término habilidad se define como la capacidad que tiene una persona para hacer una cosa correctamente y con facilidad. Así, distintos autores consideran a las habilidades como un sistema de acciones que posibilita la realización de una actividad determinada sobre la base de hábitos y conocimientos adquiridos [4].

Una de las clasificaciones más conocidas de las habilidades cognitivas es la dada por la taxonomía de Bloom revisada [5]. Esta taxonomía permite comprender cómo aprenden los alumnos y sienta las bases en cada nivel de aprendizaje con el propósito de asegurar un aprendizaje significativo y la adquisición de habilidades que permitan el uso del conocimiento construido.

3.1 La taxonomía de Bloom revisada

La taxonomía de Bloom revisada distingue seis niveles que el alumno debe ir superando para que se produzca un verdadero proceso de aprendizaje. El siguiente cuadro muestra dichos niveles, una breve descripción y algunos verbos indicadores del trabajo cognitivo que el alumno realiza en cada uno de estos niveles.

Tabla 1. Niveles cognitivos identificados por la taxonomía de Bloom revisada.

Nivel	Descripción	Verbos indicadores
Recordar	El alumno trata de recordar el conocimiento que ya posee sobre hechos, terminología, esquemas, procesos o teorías.	Citar, definir, buscar, enumerar, escribir, memorizar, decir, enumerar, indicar, mencionar.
Comprender	El alumno aprehende el contenido y trata de generalizarlo y relacionarlo entre sí.	Determinar, concluir, estimar, asociar, comparar, generalizar, distinguir, relacionar, explicar, interpretar.
Aplicar	El alumno utiliza el conocimiento alcanzado en una actividad o práctica.	Calcular, completar, ejecutar, usar, mostrar, modificar, elegir, emplear, operar, resolver, tabular, realizar.
Analizar	El alumno descompone el problema dado en diferentes partes y analiza las relaciones que existen entre ellas.	Estudiar, debatir, criticar, deducir, diferenciar, integrar, clasificar, asociar.
Evaluar	El alumno realiza juicios de valor basados en criterios a través de la comprobación y crítica.	Estimar, comprobar, formular, elegir, justificar, argumentar, valorar, discutir.
Crear	El alumno reorganiza elementos en una nueva estructura mediante la planificación o la producción.	Generar, diseñar, elaborar, idear, formular, construir, inventar, modificar, desarrollar, producir.

Los tres primeros niveles corresponden a habilidades de orden inferior y los restantes a las de orden superior.

3.2 La formación de habilidades

Para que los estudiantes alcancen el dominio de una habilidad determinada, es necesario que el docente planifique y organice el proceso de enseñanza teniendo en cuenta que la ejecución de una cierta actividad tiene como objetivo el desarrollo de dicha habilidad en los alumnos. Este proceso de formación de habilidades puede ser dividido en etapas que involucran diferentes tipos de actividad cognitiva por parte del alumno [6]. Estas etapas son:

- *Motivación y orientación de la ejecución:* es importante hacerle notar al alumno que los conocimientos que posee son insuficientes. Para ello, es necesario enfrentarlo a situaciones que él no puede resolver o que ejecuta con dificultad. En esta etapa, la tarea fundamental del docente es brindarle la orientación adecuada para que sepa qué hacer y cómo hacerlo, por qué debe aprender determinado contenido, qué es lo que debe estudiar para la realización de las acciones y cómo puede controlar por sí mismo la eficiencia de las ejecuciones.
- *Asimilación de la habilidad:* el docente debe proponerle al alumno situaciones en las que sea necesario aplicar una determinada habilidad.

- *Dominio de la habilidad:* el objetivo principal de esta etapa es que el alumno pueda realizar las tareas que se le proponen por sí solo, partiendo del conocimiento que tiene del por qué y para qué ejecutarlas. Para ello, el docente tiene que plantear situaciones que impliquen diferentes sistemas de conocimientos y distintas gradaciones de complejidad.
- *Sistematización de la habilidad:* esta etapa tiene como objetivo la generalización de la ejecución a nuevas situaciones, es decir, el alumno debe ser capaz de relacionar el nuevo contenido con otros que él ya posee.
- *Evaluación de la habilidad:* se comprueba el logro de los objetivos por parte de los estudiantes a través de una situación. Para ello, el alumno deberá resolver una actividad propuesta por el docente, que involucre la aplicación de la habilidad en cuestión.

La realización de las tareas por parte de los alumnos en cada una de las anteriores etapas es esencial en la propuesta. Esto hace que se reduzca sólo a lo necesario la exposición del docente y sean los propios estudiantes bajo su dirección, los que desempeñen el papel protagónico en ese proceso.

4 Los recursos educativos digitales

Se puede definir a los Recursos Educativos Digitales (RED) como todo tipo de material compuesto por medios digitales y producido con la finalidad de facilitar el desarrollo de las actividades de aprendizaje [7].

Los RED permiten el logro de un objetivo de aprendizaje y su diseño tiene una intencionalidad formativa que responde a características didácticas apropiadas para el aprendizaje. Están construidos para informar sobre un tema, ayudar a la adquisición de un conocimiento, reforzar un aprendizaje, facilitar el desarrollo de habilidades y evaluar conocimientos [9].

4.1 Recurso educativo digital de diseño propio

La Fig. 1 muestra el RED que se diseñó para obtener la ley de la función que mejor se ajusta a un conjunto de puntos utilizando el método de mínimos cuadrados.

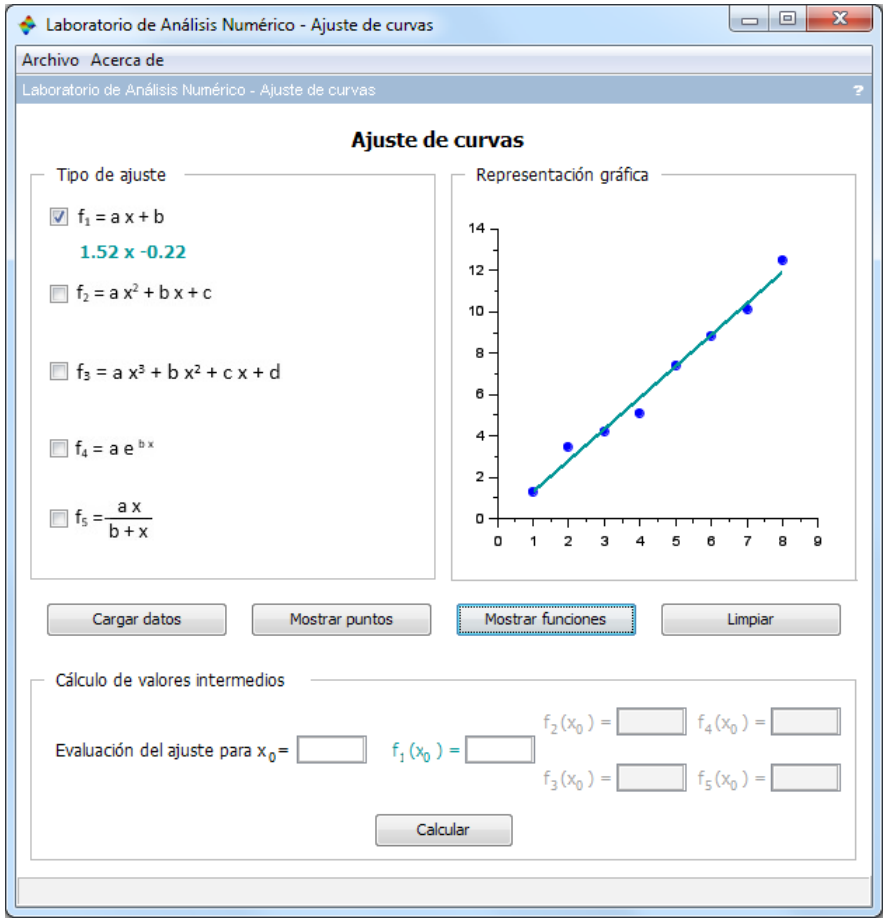


Fig. 1. Recurso educativo digital de diseño propio.

Para poder utilizar el RED, en primer lugar, se debe ingresar el conjunto de puntos que se desea ajustar. Para ello, es necesario pulsar el botón *Cargar datos*, el cual permite escribir la información necesaria a través de distintos cuadros de diálogo. Como se puede observar en la Fig. 2, el primero solicita ingresar el número de puntos que se van a cargar, mientras que el segundo, las coordenadas de los puntos que se utilizarán para hacer el ajuste.

Es posible obtener la representación gráfica de los puntos ingresados, en un sistema de coordenadas cartesianas, al presionar el botón *Mostrar puntos*.

Para obtener la ley de la función que ajusta los datos ingresados, se deberá seleccionar el tipo de ajuste que se desea utilizar. Cabe destacar que es posible elegir más de un ajuste para así poder realizar distintas comparaciones entre los mismos. Además, como se observa en la Fig. 1, el ajuste seleccionado se graficará con el mismo color con el que se indica la ley de la función obtenida.

Para poder ver la ley de la función según el tipo de ajuste seleccionado y su correspondiente representación gráfica, es necesario pulsar el botón *Mostrar funciones*.

Es posible evaluar el o los ajustes obtenidos en un valor intermedio. Para ello, se necesita ingresar el valor deseado y presionar el botón *Calcular*.

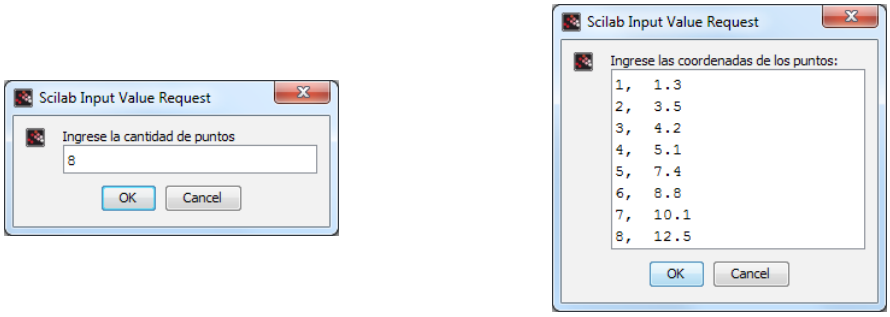


Fig. 2. Cuadros de diálogos para cargas los datos.

5 Uso del recurso educativo digital en el aula

Una de las características fundamentales de un RED es la de facilitar la adquisición de contenidos conceptuales como así también contribuir al desarrollo de ciertas habilidades. En particular, por medio del uso del RED diseñado será posible:

- obtener distintos tipos de ajustes en función de los puntos ingresados y evaluar los mismos para algún valor intermedio.
- propiciar que el aprendizaje del método de mínimos cuadrados no se limite a la mera aplicación de una fórmula y pasos mecánicos, sino al análisis e interpretación de resultados.
- comparar los ajustes obtenidos y analizar cuál es el más conveniente teniendo en cuenta la tendencia de los puntos ingresados o el contexto del problema propuesto.
- afianzar y desarrollar ciertas habilidades al resolver distintos problemas.

A continuación se presentan algunos de los ejemplos que se discutieron en clase y que permitieron el afianzamiento o desarrollo de ciertas habilidades en los estudiantes.

5.1 Actividades propuestas

A continuación, se muestran algunos de los ejemplos que se trabajaron en clase con los alumnos empleando el RED. Cabe destacar que, si bien las actividades planteadas pueden ser resueltas utilizando algún software libre, el uso del RED de diseño propio permite que el estudiante obtenga los resultados de una manera más ágil y sin necesidad de conocer algún tipo de comando.

Actividad 1

Sea el siguiente conjunto de puntos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-16	-9	0	6	17	26

a) Obtener los polinomios de primer y segundo grado que ajustan los puntos dados.

b) Calcular una aproximación de la imagen de $x_0 = 2{,}1$.

c) ¿Cuál de los dos ajustes obtenidos es el más adecuado para describir el comportamiento de los puntos proporcionados? Fundamentar la respuesta.

Con el objetivo de que los alumnos compararan y analizaran distintos tipos de ajustes, en esta actividad, se les propuso obtener ajustes utilizando polinomios de diferentes grados. En la Fig. 3, se muestran los resultados obtenidos al utilizar el RED.

De la observación de las representaciones gráficas de cada uno de los ajustes obtenidos, los estudiantes pudieron determinar que las curvas tienen un comportamiento similar en el intervalo determinado por los puntos dados. Esta conclusión pudo ser también verificada al calcular la aproximación de la imagen del valor indicado. Por esta razón, teniendo en cuenta el comportamiento de los puntos, no fue apropiado plantear un ajuste cuadrático ya que el mismo requiere para su obtención un mayor esfuerzo de cálculo y no mejora notablemente la precisión que brinda el ajuste lineal.

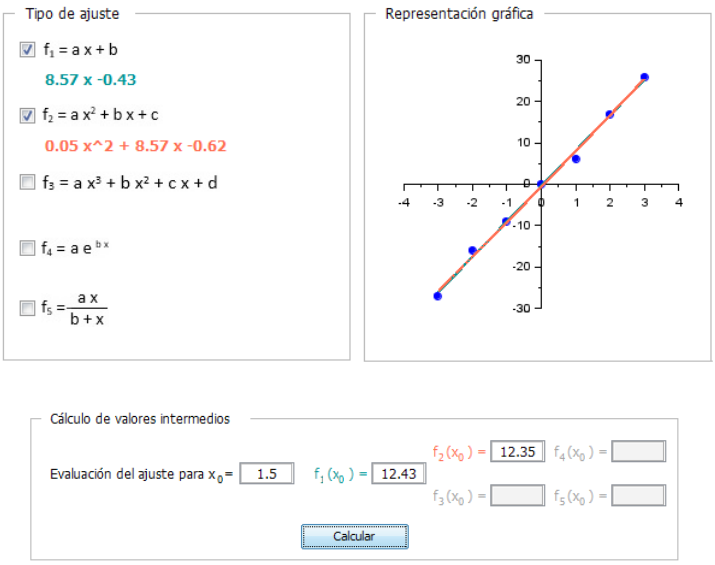


Fig. 3. Resultados de la Actividad 1 obtenidos con el RED.

Actividad 2

Dado el conjunto de puntos:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	10,3	8,4	6,1	5,8	3,9	3,2	0,5	-1,2

a) Ajustar los datos dados utilizando polinomios de diferentes grados.
b) Completar la siguiente tabla.

Polinomio	Evaluación del ajuste para …							
	$x_0 = -1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$	$x_0 = 6$
Lineal								
Cuadrático								
Cúbico								

c) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto anterior, ¿qué conclusión podrías extraer?

En la Fig. 4, se observa la salida gráfica obtenida con el RED al ajustar el conjunto de puntos utilizando polinomios de diferentes grados.

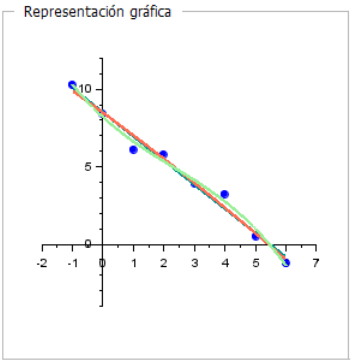


Fig. 4. Salida gráfica de los ajustes de la Actividad 2.

Luego de completar la tabla propuesta, con el objetivo de poder dar respuesta a la última pregunta formulada, se les planteó a los alumnos construir una tabla con los errores absolutos cometidos al evaluar las abscisas de los puntos dados en los ajustes calculados. La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 2. Cálculo de los errores absolutos cometidos.

Polinomio	Error absoluto							
	$x_0 = -1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$	$x_0 = 6$
Lineal	0,23	0,11	0,86	0,40	0,05	0,91	0,24	0,38
Cuadrático	0,39	0,09	0,92	0,28	0,06	0,84	0,22	0,23
Cúbico	0,01	0,19	0,53	0,45	0,23	0,44	0,50	0,17

A partir de la discusión de este ejemplo, los alumnos pudieron concluir que no necesariamente al aumentar el orden del polinomio mejora significativamente el ajuste. Por esta razón, es importante analizar la tendencia que presentan los puntos para poder determinar el tipo de ajuste más adecuado.

Actividad 3

Sea el siguiente conjunto de puntos:

x	-1	0	2
y	-7	1	5

a) Obtener el polinomio de segundo grado que ajusta los puntos que se muestran en la tabla.
b) ¿Es verdad que este polinomio coincide con la parábola que se obtiene al emplear el método de interpolación de Lagrange? Justificar la respuesta

Con la finalidad de poder analizar en qué caso el método de mínimos cuadrados se comporta como un método de interpolación, se propuso la Actividad 3. En la Fig. 5, se muestra el ajuste obtenido y su correspondiente representación gráfica.

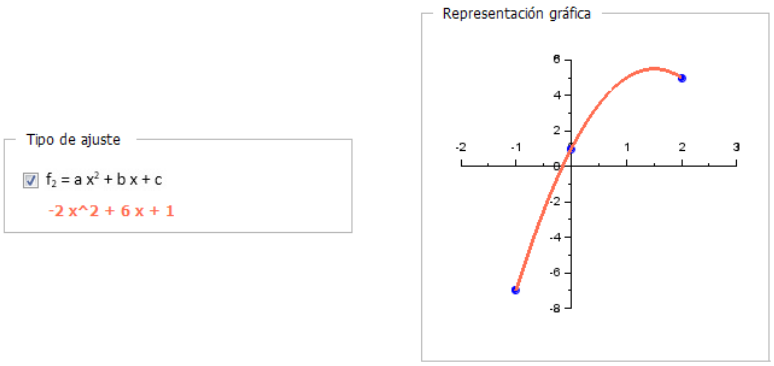


Fig. 5. Resultados de la Actividad 3 obtenidos con el RED.

De la visualización de la salida gráfica generada por el RED, los alumnos pudieron determinar que la parábola obtenida pasaba por los puntos proporcionados. Esta conclusión también pudo ser corroborada al evaluar el ajuste obtenido por las abscisas de los puntos dados, tal como se muestra en la Fig. 6.

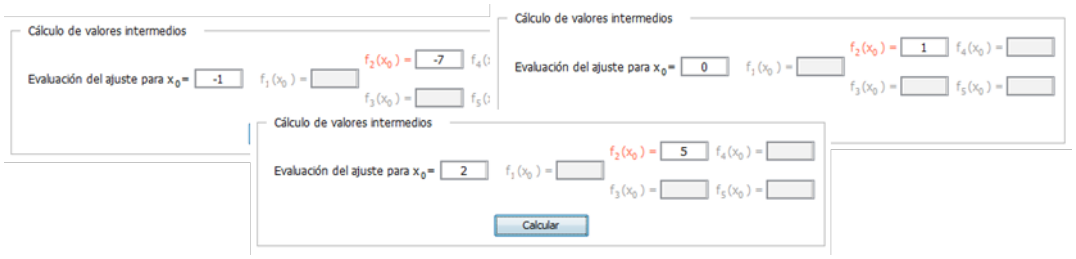


Fig. 6. Resultados de las evaluaciones realizadas en la Actividad 3.

A partir de los resultados obtenidos, los alumnos pudieron darse cuenta que si, en este ejemplo, se plantea un ajuste de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ y, luego, se minimiza el error cuadrático, el mínimo es cero. Esto se debe a que dados tres puntos, existe un único polinomio de grado dos que pasa por ellos.

Generalizando esta situación, si se tienen p puntos y se realiza un ajuste con un polinomio de grado $p-1$, este polinomio coincidirá con el polinomio de Lagrange de grado $p-1$ que interpola esos puntos porque dados p puntos, existe un único polinomio de grado $p-1$ que pasa por ellos.

Actividad 4

Dado el conjunto de puntos:

x	0	1	2	3	4
y	1,5	2,0	3,0	5,0	7,5

a) Proponer un ajuste que describa adecuadamente el comportamiento de los puntos dados.

b) Calcular una aproximación de la imagen de $x_0 = 1,8$ usando el ajuste calculado en el punto anterior.

Con el objetivo de poder determinar el ajuste que mejor describía el comportamiento de los puntos proporcionados en la tabla, los alumnos, en primer lugar, debieron obtener la representación gráfica de los mismos. Analizando la tendencia que presentaban estos puntos, debieron haber concluido que el ajuste más adecuado es el exponencial. La Fig. 7 muestra los resultados arrojados por el RED.

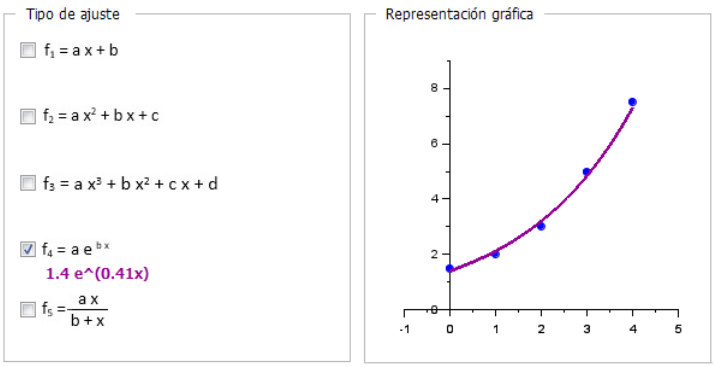


Fig. 7. Ajuste obtenido por el RED en la Actividad 4.

Como se observa en la Fig. 8, para poder dar respuesta al punto b) de la actividad, los estudiantes evaluaron el ajuste exponencial en el valor pedido.

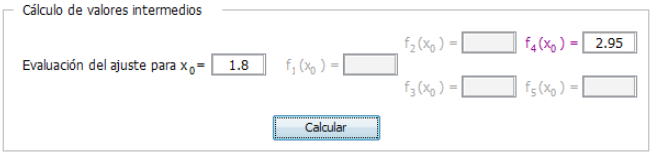


Fig. 8. Resultado de la evaluación realizada en la Actividad 4.

Por medio de este ejemplo, nuevamente, se resalta la importancia de graficar los puntos proporcionados y analizar su comportamiento para poder determinar el tipo de ajuste más adecuado.

Actividad 5

Sea el siguiente conjunto de puntos:

x	0,25	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0
y	23.5	1,65	1,0	0,85	0,80	1,25

a) Ajustar los datos dados utilizando polinomios de segundo y tercer grado y graficar dichos ajustes.
b) De la observación de las gráficas obtenidas en el punto anterior, indicar si son adecuados los ajustes calculados. Fundamentar la respuesta.

A partir de la visualización de las gráficas, los alumnos pudieron determinar que los ajustes obtenidos por el RED no describen adecuadamente la tendencia que presentan los puntos. En el caso de querer elegir un polinomio que ajuste a los datos, indicaron el polinomio cuadrático sería la mejor opción debido a que el cúbico presenta grandes oscilaciones en el intervalo [2;5].

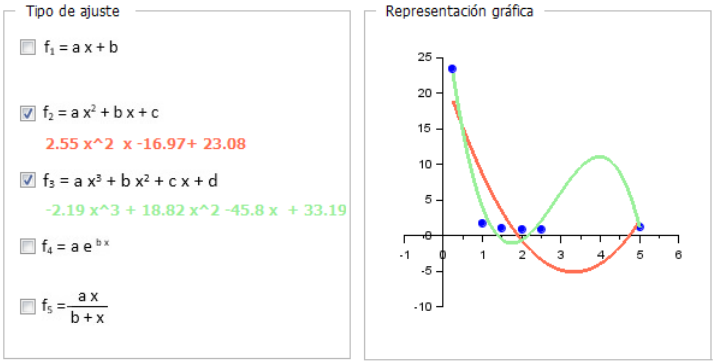


Fig. 8. Ajustes obtenidos por el RED en la Actividad 5.

El objetivo de esta actividad era lograr que los estudiantes comprendieran que, si los datos no muestran una naturaleza polinomial, puede ocurrir que la curva obtenida al aplicar el método de mínimos cuadrados presente grandes oscilaciones. Este fenómeno, llamando *oscilación polinomial*, se hace más pronunciado a medida que aumenta el grado del polinomio [3].

Actividad 6

Dado el conjunto de puntos:

x	-1	0	2
y	1.5	4.0	2.8

Calcular una aproximación de la imagen de $x_0 = 1{,}6$, utilizando un ajuste cúbico.

Al querer calcular el ajuste pedido con los puntos dados, el RED mostró el mensaje de error que se observa en la Fig. 9.

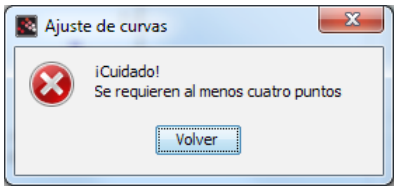


Fig. 9. Mensaje de error dado por el RED en la Actividad 6.

Para poder justificar lo ocurrido, los alumnos debieron apelar al marco teórico que se había desarrollado sobre el tema. En este caso, el determinante asociado a la matriz de coeficientes del sistema que surge al utilizar el método de mínimos cuadrados es igual a cero. Por esa razón, al no ser única la solución del sistema, no se pudo determinar el ajuste cúbico.

Este ejemplo resultó propicio para que los alumnos entiendan las condiciones que se le imponen a un método. En el caso del método de mínimos cuadrados, si las abscisas de los puntos son distintas y si $n \leq p-1$ (donde n es el grado del polinomio y p la cantidad de puntos), la solución del sistema es única.

Cabe mencionar que, el RED diseñado, muestra mensajes de error si no se cumplen todas las condiciones indicadas anteriormente.

5.2 Encuesta sobre el uso de RED en el proceso de aprendizaje de los alumnos

Con el objetivo de conocer la opinión de los alumnos sobre el uso de RED en su proceso de aprendizaje, se realizó una encuesta a la totalidad de los alumnos.

La encuesta estaba constituida por seis preguntas cerradas, las cuales tenían como objetivo determinar en qué grado el RED ayudó a la comprensión de los distintos conceptos involucrados en el tema y saber qué tipo de habilidades les permitió desplegar a los estudiantes durante su uso al resolver las actividades propuestas. Cada una de estas preguntas fue analizada utilizando una escala tipo Likert [9]. La Tabla 2 muestra la escala utilizada y el valor numérico que se le asignó a cada una de las opciones.

Tabla 2. Escala tipo Likert y su valor numérico.

Escala	Nada	Poco	Bastante	Mucho
Valor numérico	1	2	3	4

Teniendo en cuenta los valores numéricos de cada nivel de la escala, se calculó la mediana y la moda para cada uno de los enunciados. La Tabla 3 muestra los enunciados de las preguntas con los valores obtenidos.

Tabla 3. Enunciados de las preguntas cerradas de la encuesta con las medidas de tendencia central.

El uso del RED me ayudó a …	Moda	Mediana
… comprender el concepto de ajuste de curvas.	3	3
… entender para qué sirve realizar un ajuste.	3	3
… interpretar la esencia del método de mínimos cuadrados	3	3
… determinar el tipo de ajuste más adecuado en función de los puntos ingresados.	4	4
… poder comparar y analizar distintos tipos de ajustes.	4	4
… estimar el valor de un punto.	4	4

Como se puede observar, los resultados demuestran que el uso del RED en el proceso de aprendizaje de los estudiantes realmente contribuyó en el entendimiento del tema. Esto se fundamenta en el hecho de que el valor obtenido en los ítems que hacen referencia a cuestiones vinculadas a la comprensión del método de mínimos cuadrados fue 3. Mientras que en lo referente al desarrollo de habilidades, tanto la moda como la mediana, es 4.

6 Conclusiones

El docente hoy debe estar atento a todas las posibilidades que los recursos tecnológicos proporcionan para generar ambientes de aprendizaje donde el alumno pueda comprender los distintos conceptos matemáticos y desarrollar diversas habilidades. Las autoras de este trabajo consideran que el RED "Ajuste de curvas" resulta un ejemplo representativo de los recursos que se pueden diseñar para lograr los objetivos antes mencionados.

Los resultados obtenidos en la encuesta demuestran que el uso del RED en el proceso de aprendizaje de los estudiantes facilitó la comprensión del concepto de ajuste y contribuyó a entender, por medio de la resolución de distintas actividades, la esencia y utilidad del método de mínimos cuadrados. Con respecto a las habilidades puestas en juego, el RED fue una herramienta de mucha utilidad ya que permitió que los alumnos obtuviesen ajustes con facilidad y rapidez. Esta situación permitió que los estudiantes pudieran destinar más tiempo para realizar actividades en las que se debían explicar, comparar, analizar, estimar, es decir, desplegar habilidades que usualmente no son desarrolladas en la formación matemática tradicional.

No obstante, la sola presencia de este tipo de recursos no hace que sea más sencillo el proceso de comprensión del tema o la formación de habilidades. Es el docente quien por medio de su adecuada intervención posibilitará el logro de ese objetivo. Teniendo en cuenta los resultados positivos que se obtuvieron en la experiencia mostrada, se

tomó la decisión de incorporar a la asignatura la secuencia de actividades propuesta, en los próximos años.

Referencias

1. Chapra, S. y Canale, R. *Métodos numéricos para ingenieros*. México: Mac Graw – Hill. (2004).
2. Burden, R. y Faires, D. *Análisis Numérico*. México: Internacional Thomson Editores. (2002).
3. Mathews, J. y Fink, K. *Métodos Numéricos con Matlab.* España: Pretence Hall. (2000).
4. Rodríguez Rebustillo, M. & Bermúdez Sarguera, R. Algunas consideraciones acerca del estudio de las habilidades. *Revista cubana de Psicología*, 10 (1), 27 – 32. (1993).
5. Churches, A. *Taxonomía de Bloom para la era digita*l. Página *Web Eduteka.* (2008). http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital.
6. Machado Ramírez, E. & Montes de Oca Recio, N. El desarrollo de habilidades investigativas en la educación superior: un acercamiento para su desarrollo. *Revista Humanidades Médicas*, *9* (1). (2009).
7. Pineda Sánchez, M. *Uso de recursos educativos digitales y aprendizaje autónomo de estudiantes universitarios en un contexto de educación virtual*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. (2018).
8. García, E. *Materiales educativos digitales*. Blog Universia. Recuperado de http://formacion.universiablogs.net/2010/02/03/materiales-educativos-digitales/. (2010).
9. Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, M. Metodología de la investigación. México: Mac Graw Hill. (2010).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Tipo de pregunta STACK para la plataforma Moodle: Una introducción mediante ejemplo

Jorge Omar Morel[1], Joel Alberto Martínez[2], Leonardo Eichelberger Pereira Da Silva[3]
[1,2,3] Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Rosas 325, Oberá , Misiones
omar.morel@gmail.com, ing.joel.martinez@gmail.com, leoeichelfio@gmail.com

Resumen. Presentamos ejemplo de uso del tipo de preguntas STACK para la plataforma Moodle; tanto para cuestionarios formativos cuanto para cuestionarios de exámenes parciales, que acreditan regularidad de los estudiantes en la comisión 1 de Álgebra y geometría analítica de la Facultad de Ingeniería. La particularidad de este tipo de preguntas es que el autor puede a) utilizar variables aleatorias para definir un conjunto de versiones del mismo problema o ejercicio, b) puede formular dentro de una pregunta, varias, que reciban distintas respuestas, c) puede verificar y manipular la respuesta del estudiante para validar y otorgar puntuación, de ser necesario. STACK utiliza parte del lenguaje Maxima (y funciones propias), por lo que es flexible como para que el autor ensaye primero en WxMaxima. También presentamos algunas recomendaciones para su uso. Esta estrategia la seguiremos usando inclusive para partes de parciales mediados por TIC, aun cuando la situación de pandemia sea revertida.

Palabras Clave: Álgebra, Estrategias de evaluación, Evaluación en línea.

1 Introducción

La repentina situación de aislamiento preventivo y obligatorio que ocasionara una adaptación de los docentes y estudiantes, a proseguir la carrera (o como en la mayoría de los casos que fueron los estudiantes de esta asignatura, a iniciarla) de una forma inesperada, trajo también una adecuación de los medios de comunicación docente-estudiante. Entre ellos, el cambio del paradigma de evaluación, que aparentemente, en general en el país era totalmente presencial, a uno totalmente virtual. Las posturas docentes para asignaturas de carácter matemático, en esa época iban desde que era imposible hacerlas (y que se pospondrían hasta el retorno de las actividades presenciales), pasando por aquellos docentes que preparaban el examen en formato portable de texto y solicitaban que el estudiante lo resolviera en su casa a cámara abierta, y que enviaran una copia escaneada de lo que habían hecho en papel, y una posición que era respetar la privacidad de los estudiantes y aceptar con confianza los exámenes confeccionados con herramientas puramente virtuales.

Surge entonces la inconformidad de usar solamente los tipos de pregunta más conspicuos de la plataforma Moodle, a la que queríamos seguir ajustados, por cuanto el gasto de los estudiantes por la conexión a los servidores de la universidad se daba a costo reducido, gracias a la gestión del gobierno con una empresa de telecomunicaciones. Hemos de apuntar que la zona de influencia de una Universidad, y teniendo en cuenta una provincia como Misiones, muestra muchos tipos de estudiantes, la mayoría de ellos con conectividad muy precaria. Y por ende la búsqueda de otra solución: el tipo de preguntas STACK, cuya primera guía de uso (2019) nos ofrecimos para pasarla al castellano (como lo hemos hecho en poco tiempo, ha quedado para retocar, en particular las partes que no venían traducidas cuando el usuario abría una pregunta para programarla y dejarla en el banco de preguntas del

curso. Dicha guía se puede encontrar en el sitio oficial de la aplicación [1]

Para una revisión de la documentación (en inglés) diríjase a la documentación de STACK [2]
Entre las principales características de este tipo de preguntas están

- Es de licencia GPL (Licencia Pública General de GNU), con lo cual no se infringen patentes ni genera gastos.

- El estudiante puede ingresar en su respuesta, expresiones matemáticas, que son evaluadas por su consistencia algebraica, por ejemplo, con la respuesta proporcionada por el profesor. Claro que también puede (si así se lo programara) ingresar una respuesta numérica aproximada, que también es contrastada con la respuesta aproximada proporcionada por el profesor. (Llamamos profesor al programador de la pregunta)

- Ha sido diseñada teniendo en cuenta una evaluación formativa, y separa lo que es evaluación y calificación. Un ejemplo clarifica mejor esto: Supongamos que se le pide al estudiante que modelice un problema mediante un Sistema de Ecuaciones Lineales (de ahora en más SEL) y lo exprese mediante ecuaciones, se puede:

-Buscar que la primera ecuación del estudiante es la primera o no, que ha propuesto el profesor
-Que la ecuación encontrada se tome como válida aun cuando haya que multiplicar alguna por un número para obtener la otra.
-Que, si el propósito también es verificar la aplicación de un método de resolución, esto se pueda hacer a pesar de que el modelo del estudiante no esté correcto.
-Al igual que otros tipos de pregunta, permite escribir en la realimentación el tipo de error, el puntaje asignado al ítem, etc.

- Presenta un escenario completo de subtipos de preguntas, combinables en una sola pregunta.

-Matrices, en tres tipos de formas de entrada para los estudiantes:
a) notación Maxima, b) matriz de espacios para rellenar, y c) matriz de dimensiones variables.
-Opciones múltiples mediante: a) cajas de verificación, b) menú desplegable, o c) cajas verdadero-falso.
-Razonamiento algebraico, muy adecuado para evaluar y auto-evaluar manipulaciones algebraicas.
-Cadenas (cadenas de texto)
-Conversión (o no) de las respuestas del estudiante entre unidades. Discriminación de cifras significativas, lugares decimales… de la respuesta del estudiante.

- No menos importante es la capacidad de efectuar la cálculos con las respuestas de los estudiantes, de modo que, por ejemplo: se pida un modelo y una manipulación del modelo para exhibir una solución como respuesta, y el estudiante ha realizado incorrectamente el modelo, pero si al profesor le interesa conocer la forma de manipulación, puede verificar automáticamente los cálculos con el modelo incorrecto, y evaluar si la solución proporcionada, aunque incorrecta, sea al menos coherente con el proceso.

- Mediante programación, es posible detectar las variables que el estudiante ha ingresado, de manera que no necesariamente se debe obligar a usar una combinación en específico.

- Necesariamente, el programador deberá aprender al menos los rudimentos de los lenguajes específicos: los comandos de Maxima (o WxMaxima, que provee una interfaz más adecuada), algo de LaTex, y los procedimientos específicos de STACK

- Si el estudiante deja una parte de una pregunta sin contestar, la pregunta entera no se evalúa. Y eso obligaría a una revisión manual. Lo mismo ocurre si el estudiante ingresa una lista (representación de puntos o vectores) cuando se espera un conjunto, o si ingresara en una matriz de dimensión variable en forma incompleta. En general, este tipo de pregunta de Moodle es muy riguroso con la nomenclatura. Para que el estudiante deba ingresar, por ejemplo: la ecuación , debe ingresar 2*x-3*y+z=1, aunque puede programarse para que a medida que vaya escribiendo de la segunda forma, se le vaya mostrando en un cuadro aparte, la primera.

2 Descripción del sistema

Antes de poder utilizar este tipo de preguntas de Moodle, debe solicitarse al administrador del sistema Moodle, que provea el tipo de pregunta STACK, que se obtiene desde https://moodle.org/plugins/qtype_stack. Cuando el administrador lo ponga como disponible, se verá entre los tipos de pregunta en el banco de preguntas de Moodle, como en la figura Fig.1.

Cuando se abre una pregunta nueva, aparecen todas las secciones a ser rellenadas. En este apartado, discutiremos solamente las más necesarias, y en función de un primer ejemplo muy sencillo, ya que la guía que mencionáramos más arriba (de cientos de páginas) lo hace más exhaustivamente, aunque tampoco en forma completa.

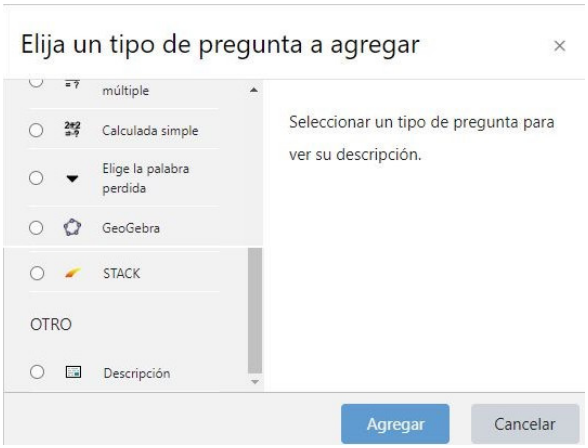


Fig 1. Tipo de pregunta y descripción de la pregunta. De entre todos los tipos de pregunta habilitados por el administrador del sistema Moodle, elegiremos STACK. Si no lo vemos, es que hay que solicitar su inclusión.

Ejemplo para describir una forma de uso de este tipo de pregunta: Supongamos que quiera obtener como respuesta del estudiante, el vector `ve` en el plano, perpendicular a uno dado por nosotros (el profesor) `vv`, y que además sea el vector posición de un punto en el cuarto cuadrante. Claramente: para generar un vector aleatorio `vv`, previamente el programador debe verificar que el producto de las componentes sea positivo. Y para verificar la respuesta del estudiante, habrá dos pasos: (a) verificar que `ve`, (el vector ingresado por el estudiante) efectivamente sea perpendicular a `vv`, y que corresponda otorgar cierto puntaje por este acierto (0.6/1 en este ejemplo), y b) que el punto asociado al vector posición esté en el cuarto cuadrante (y otorgar el puntaje 0.4/1 restante).

En el ejemplo describimos una sola pregunta, pero en la realidad, la potencia de STACK radica más bien en usar la flexibilidad para ejecutar más de un ítem en esa pregunta. En otras palabras: cambiemos "pregunta" por ejercicio o problema, y en ese problema tenemos varios datos; entonces podemos preguntar al estudiante varias cosas (varias preguntas) que se resuelvan con los mismos datos. Los datos pueden ser numéricos y/o literales.

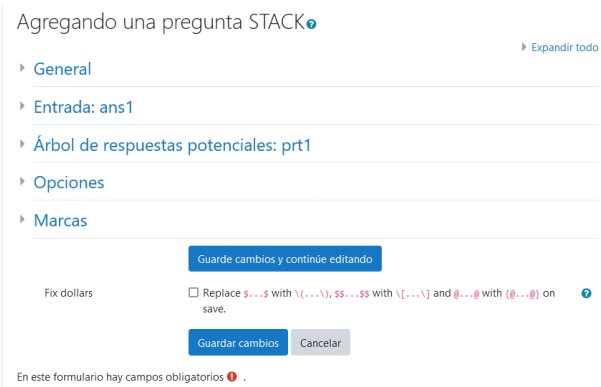


Fig 2. Vista general del lado del programador. Se muestran todas las secciones del formulario de la pregunta STACK colapsadas. Por defecto hay una Entrada (ans1: respuesta del alumno 1) predefinida, la cual podemos usar o eliminar por otra variable, con un nombre más específico para el programador. El nombre de esta variable no se muestra al estudiante. A medida que agreguemos variables a responder por el estudiante, se generarán más Entradas.

Las secciones que aparecen en el formulario (y se muestran en la figura Fig.2 arriba) son:

- **General**: (Ver figura Fig.3)
    - **Nombre de la Pregunta**: Debería darse un nombre único, representativo y corto (a veces no se puede cumplir con todos los objetivos). En nuestro caso le hemos dado el nombre Simple1
    - **Aún no han sido implementadas variantes para esta pregunta:** Este enlace debe usarse para gestionar un número de variaciones aleatorias de las variables. Obviamente, el número máximo a solicitar está de acuerdo con la cantidad de variables y los valores que éstas pueden asumir. Y que a STACK le sea posible "escribir" esas variables, es decir, que esté bien configurada las notas de la pregunta. Si uno quisiera que en otra pregunta que se le asigna a un estudiante en particular, debe colocarse en ambas preguntas el mismo **Grupo aleatorio.** Sin embargo, es bueno hacerlo cuando ya hemos probado como funciona toda la pregunta y hemos corregido cada problema de programación que no habíamos tenido en cuenta al programar.
    - **Variables de la Pregunta**: Es el lugar en donde el programador define las variables de la pregunta, por ejemplo si va a usar variables aleatorias o no, y para hacer los cálculos iniciales para dar una respuesta sugerida (que se ve o no, de acuerdo con la configuración del cuestionario) a cada pregunta. En la Tabla 1 se discute algunas variables.

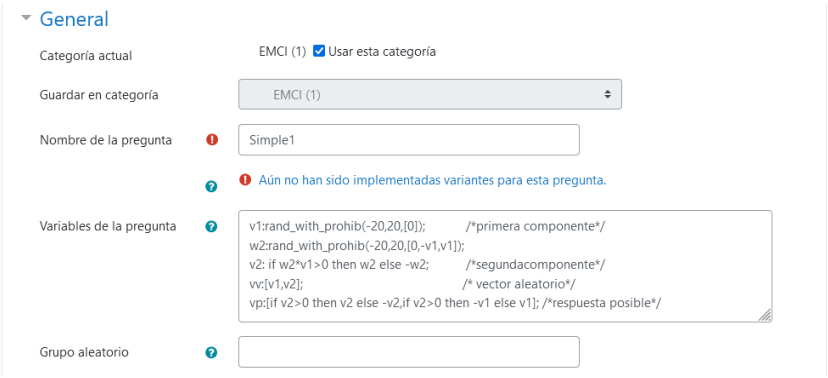


Fig 3. Sección *General*, nombre y variables de la pregunta. Se muestra el código ingresado por el programador en la caja de variables de la pregunta. /*esto es un comentario para el que lee el programa, o para que el que lo hizo se acuerde*/

    - **Enunciado de la Pregunta**: En esta caja se coloca el enunciado de la pregunta, donde se muestran las variables de enunciado (en la forma `{@variable@}` o `{#variable#}`) y los lugares donde el estudiante debe ingresar su respuesta (en la forma `[[input:variableE]] [[validation:-variableE]]`, el estudiante lo ingresa en la caja creada por la primera, y lo controla – si así fue configurado – en la caja que se abre en la segunda). En estos lugares se puede sugerir la sintaxis de ingreso en un texto, o directamente en la caja de respuesta (ver configuraciones de **Entradas**) Véanse Fig.3 (hoja anterior) y Tabla.1 .

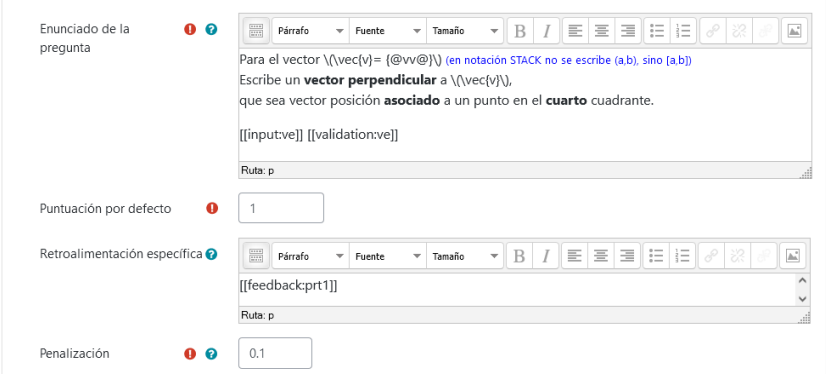


Fig 4. Sección *General*, enunciado de la pregunta. Lo que está entre \(es código LaTeX\). Para que se muestre al estudiante una información guardada en una variable definida en Variables de la pregunta, se la pone entre {@ variable@} o {#variable#}. En la primera forma se muestra en formato matemático (LaTeX).

Tabla 1. Descripción de elementos del enunciado de la pregunta.

enunciado de la pregunta	explicación

v1:rand_with_prohib(-20,20,[0]);	Definimos la primera componente del vector $\overrightarrow{vp} = (v_1, v_2)$ dado al estudiante. $v_1 \in [u, v]_{\{0,1\}}$ rand_with_prohib(limInf,limSup,lista) hace lo mismo que si definieses cada vez la función
	`w:[0,1];u:-20;v:20;`
	`k:listify(setdifference(setify(makelist(n,n,u,v)), setify(w)));`
	`v1:k[1+random(length(k))];`

w2:rand_with_prohib(-20,20,[0,-v1,v1]);	Definimos una aproximación de la segunda componente, en este caso que no sea ni 0, ni que se repita, ni que esté 45 grados (o 135 grados)
v2: if w2*v1>0 then w2 else -w2; vp:[v1,v2];	Definimos la segunda componente del vector del enunciado, como un vector posición de un punto en el primer o en el tercer cuadrante.

- **Notas de la Pregunta**: En esta caja se debe poner todas las variables aleatorias usadas (y las variables o texto que se quiera), de manera que el programa genere las tiradas aleatorias y las guarde en la base de datos de la pregunta. De esa manera, cuando los estudiantes ingresan al cuestionario, se les asigna una tirada de datos. En el caso del ejemplo el máximo número de posibles valores para el vector del enunciado puede calcularse como que hay 40 formas de obtener la primera componente y 19 de obtener la segunda componente.

- **Retroalimentación específica:** En esta caja se ponen los distintos árboles de respuestas posibles. En nuestro caso, después de casi dos años de experiencia, sugerimos mantener uno solo (En la fig. 4, el prt1 hace alusión al árbol de respuestas potenciales 1). Un árbol de respuesta potencial es un espacio donde está una caja donde se puede recoger lo que el estudiante ingresó y hacer cuentas con las respuestas del mismo estudiante (que no necesariamente será igual a la que hemos diseñado como respuesta correcta), para validarla de otra manera. Además de esa caja están los nodos. Los nodos son espacios de comparación (De acuerdo con el tipo de dato que el estudiante debe ingresar) para sumar o restar puntos, y para dar una realimentación específica por cada criterio de evaluación que usemos. En otras palabras, el sector donde se definen las acreditaciones está en ese lugar.

- **Entradas:** Para cada variable de enunciado (a ingresar por el estudiante) se generará una entrada. Se ha definido en la caja Enunciado de la pregunta, con la sintaxis `[[input:variableE]]` y debe estar acompañada por otra: `[[validation:variableE]]`, independientemente si se configura para mos-

trar o no la validación. La validación es una caja donde los comandos que ingresa el estudiante (durante el examen, no en la configuración) se van mostrando en formato LaTeX, que se presta a mejor interpretación, por ejemplo: mientras se escribe en la caja remarcada en azul, se ve (a la derecha) el resultado que, en este caso, se ha definido en forma compacta (ver **Mostrar validación**, más adelante). La figura Fig.5 muestra esa sección.

- **Tipo de entrada**: Los tipos más comunes son la entrada **Algebraica** (para la mayoría de los casos: puede ingresarse un vector, un conjunto, un punto, una matriz*), **matriz** (le aparece al estudiante una matriz con las cajas de las entradas que debe ingresar), **matriz de dimensión variable** (le aparece al estudiante una caja donde debe ingresar cada fila separando las entradas con uno o varios espacios y así se definen la cantidad de columnas de la misma y luego, cada nueva fila con un *enter*. Sería la manera más sencilla de escribir una matriz en la cual no se le da al estudiante la pista de la dimensión); **Menú desplegable**, (funciona igual que la **Checkbox**, pero ocupando menos espacio), y **Equivalence reasoning**, que provee una caja donde cada renglón es verificado si algebraicamente es igual al siguiente (útil cuando se quiere verificar un proceso de deducción, por ejemplo).
  *en la forma `matrix([a,b,c],[d,e,f],…)` donde cada fila está entre corchetes. Nosotros hemos optado por la variante Algebraica.

- **Respuesta Modelo**: En este caso se debe poner la respuesta del profesor, para que (si el cuestionario lo defina así) sea entregada como realimentación específica al estudiante. Nosotros hemos puesto un resultado posible, que está almacenada en la variable `vp`, que hemos definido en la caja Variables de la pregunta.

- **Prohibir flotantes**: En este caso la elección ***Sí***, no acepta la inclusión de números decimales en la respuesta del estudiante. Esto es conveniente cuando se quiere prevenir que, por ejemplo, dados los valores de dos rectas, el estudiante las ingrese en otro software, y con un comando solicite lo que se está pidiendo en el enunciado, copie la salida numérica y dé la respuesta. En ese caso solo se aceptarán cuentas y comandos a partir de los datos (para eso los datos deben darse en forma exacta, por ejemplo `u:[sqrt(20),-1];`). La elección ***No***, admite los números decimales.

- **Comprobar Tipo**: Se configura generalmente que ***Sí***, en particular cuando se está enseñando al estudiante a usar WxMaxima y STACK: de esa manera el sistema le dice, antes de continuar con otra respuesta, que ha ingresado mal tal o cual cosa, y qué es lo que se espera que ingrese.

- **Verificar respuesta**: Al configurar por el ***Sí***, en el momento de la respuesta del estudiante, se verifica si lo que está ingresando es un número, o una lista que representa un punto o un vector, o un conjunto, etc. El Sí, obliga a elegir alguna forma de Sí en…

- **Mostrar validación**: Se configura si se muestra o no lo que está escribiendo el estudiante, y la manera que se muestra puede ser especificando qué variables está usando o no. Se habilita un cuadro donde se muestra (en LaTeX) lo que está ingresando. (definido por `[[validation:…]]` en el **enunciado de la pregunta**). Es "necesario" en caso de ingresar ecuaciones, por ejemplo: porque el estudiante debe ingresarlas en el lenguaje de WxMaxima, y entonces vé una representación LaTeX(más de acuerdo con lo que visualmente quiere escribir) de lo que está escribiendo.

- **Árbol de respuestas potenciales**: En esta sección aparecen dos tipos más importantes, la caja **Variables de retroalimentación**, y los **nodos**. La figura Fig.6 muestra esa sección.

  - **Variables de retroalimentación**: Es el lugar donde se puede verificar y hacer cuentas con las respuestas del estudiante. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo de uso.

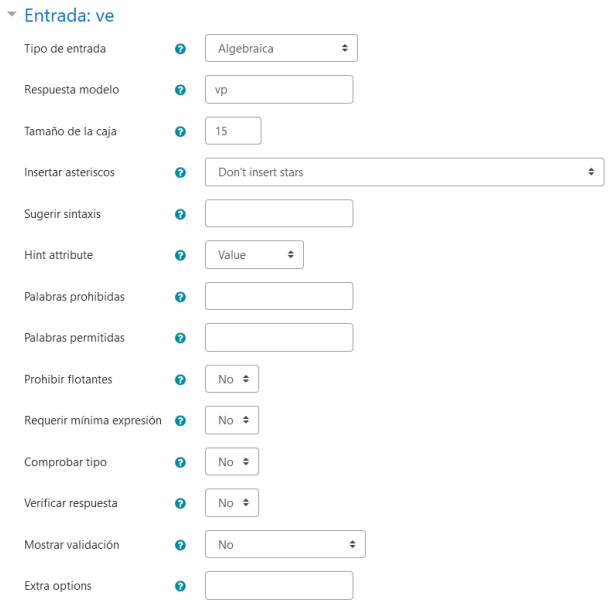


Fig 5. Sección Entrada. Configuraciones de la entrada del alumno. Esta sección se repite para cada variable creada para que el estudiante rellene o elija.

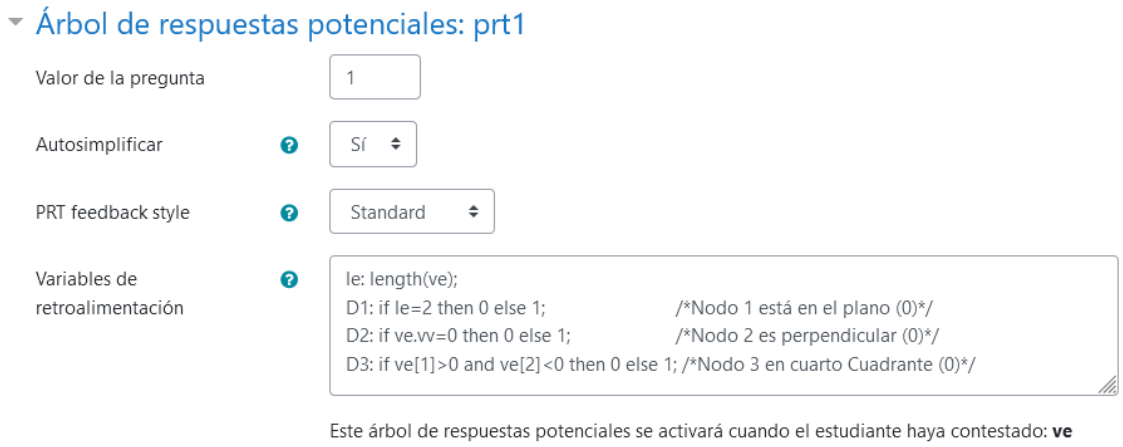


Fig 6. Sección *Árbol de respuestas potenciales*. Valor de pregunta y variables de retroalimentación. Habrá una por cada entrada [[feedback:arbol]] que escribamos en la caja Retroalimentación específica, (Fig.4). Nosotros concluimos que es mejor usar una sola, a pesar de que esto complejiza la organización de los nodos. El pictograma indica que si el estudiante falla en ingresar un vector de otra dimensión, ya no se considera nada más. Mientras que si la respuesta es un vector no perpendicular, se otorga puntaje aún por haber dado un vector que es posición de un punto del cuarto cuadrante.

Tabla 2. Descripción de las variables de retroalimentación de la pregunta.

Variables de retroalimentación	explicación
D1: if length(ve)=2 then 0 else 1;	Primera acción. Si el estudiante escribe un vector que no es del plano, rechazaremos con un 0 de calificación.
D2: if ve.vv=0 then 0 else 1;	Segunda acción. Si el estudiante escribe un vector que no es perpendicular, no sumamos puntaje.
D3: if ve[1]>0 and ve[2]<0 then 0 else 1;	Tercera acción. Si el estudiante escribe un vector que no está en el cuarto cuadrante, no sumamos puntaje.

- **Nodos**: Lugar donde se define una puntuación. En general, puede necesitarse más de un nodo para verificar un ítem.

- Entonces en el primer nodo (Nodo 1) pondremos en **Sans** (Student answer) D1, y en **Tans** (Teacher answer) 0, en **Calificación** ponemos un 0 (no otorgamos puntaje), en **siguiente** (al ser nuestro único nodo definido, no podremos tocarlo, pero una vez agregado el próximo, será Nodo 2) para la **Retroalimentación rama verdadera**, colocamos las palabras de aliento, *OK, su vector {#vp#} es del plano*, para la **Retroalimentación rama falsa**, colocamos palabras de retención, *como no puedes comparar vectores de dimensiones diferentes, te dimos {#vp#} en el plano, y tu respuesta: {#va#} no lo es*. En **siguiente** vamos a dejar como está, y no lo modificamos más.

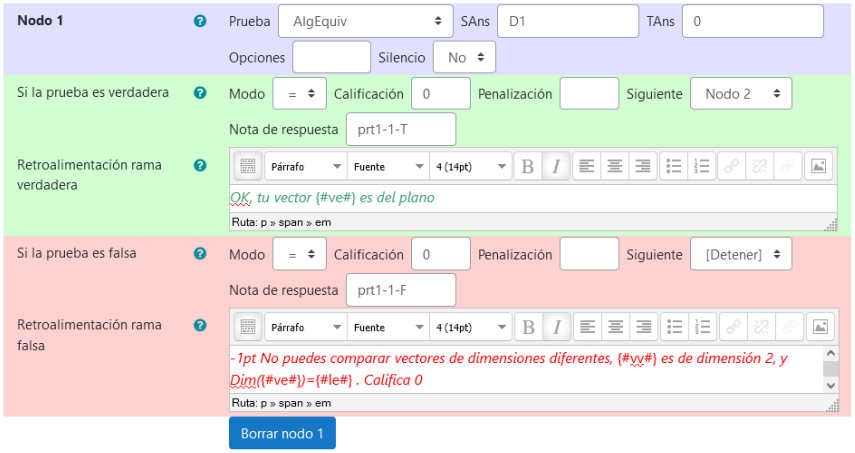


Fig 7. Sección **Árbol de respuestas potenciales**. Comportamiento de Nodo 1.

- Luego pedimos otro nodo, haciendo clic en el botón **agregar otro nodo**. (Nodo 2) pondremos en **Sans** D2, en **Tans** 0, y en **Calificación**, supongamos que hemos decidido 0.6, en **siguiente** (al ser nuestro último nodo definido, no podremos tocarlo, pero una vez agregado el próximo, será Nodo 3) para la **Retroalimentación rama verdadera**, colocamos las palabras de aliento, *Perfecto diste un vector perpendicular!*, para la **Retroalimentación rama falsa**, colocamos palabras de retención, *{#vp#} no es perpendicular {#va#} porque el producto escalar no es nulo*. En **siguiente** (al ser nuestro último nodo definido, no podremos tocarlo, pero una vez agregado el próximo, será Nodo 3).

- Solicitamos el nodo 3. pondremos en **Sans** D3, y en **Tans** 0 en **Calificación**, debemos poner 0.4, para la **Retroalimentación rama verdadera**, colocamos las palabras de aliento, *Sí, {@vp@} es vector posición de un punto del cuarto cuadrante!*, para la **Retroalimentación rama falsa**, colocamos palabras de retención, *La componente en X debe ser positiva, mientras que la componente en Y debe ser negativa para un punto del cuarto cuadrante*. En **siguiente** (Detener).

- Ya casi hemos terminado. Nos salteamos las últimas secciones y vamos al botón de **Guarde cambios y continúe editando**. STACK hace una verificación de la consistencia de la programación, y si todo está bien, cierra todas las secciones y muestra grisada la *combobox* **Guardar en categoría**, y será posible acceder ahora al enlace de **Vista previa**, (Fig.1). Si no es así, STACK mostrará en rojo el primer error, puede estar en cualquier lado, y esa sección no estará cerrada. Los errores pueden ser de sintaxis en la caja de variables de la pregunta (indica qué tipo de error y en que fila y columna del texto encontrar el primer error), puede que se haya olvidado poner algo en las notas de la pregunta y que la pregunta incluya variables aleatorias, puede estar mal definida alguna entrada, que no encuentre la respuesta modelo, etc.

- Opciones (Una vista de esta sección aparece en la figura Fig. 8)

  - En las opciones, las primeras tres en general se muestran así, y las explicaciones están bien, para cuando

se conoce el comportamiento de Maxima. Las realimentaciones son para decir lo que la puntuación ya aclara, de modo que nosotros las borramos.

    - El signo de multiplicación, lo dejamos en Ninguno (cuando STACK muestra la validación, reemplaza * por un punto, por un microespacio(ninguno), o por una cruz). La visualización del imaginario puro en Maxima es %i (o %j, para físicos y ciertas ingenierías) sin embargo, uno puede querer usarlos como los versores fundamentales, en ese caso, la ayuda de STACK no es demasiada (clic en más ayuda). Las funciones trigonométricas inversas también pueden mostrarse de diferentes maneras para el estudiante, nosotros preferimos las de seis letras (y también hubiésemos podido elegir acos(x), por ser el comando de Maxima).

- Marcas: Las marcas son leyendas por las cuales agrupar un tipo de pregunta, o las preguntas de un cuestionario. Puede haber varias marcas. Pero si tenemos una marca en una categoría, podemos elegir que el cuestionario agregue las preguntas que tengan esa marca, o que se elija una pregunta al azar entre las que contengan esa máscara.

- Creado/Último guardado: ahí se informa datos de quién creó la pregunta y quién realizó la última modificación. Nosotros optamos en general porque el creador de la pregunta sea quien la modifique siempre, aunque las ideas para las modificaciones sean de otro. La razón: cada uno programa diferente, y entiende su forma de programar mejor que ningún otro.

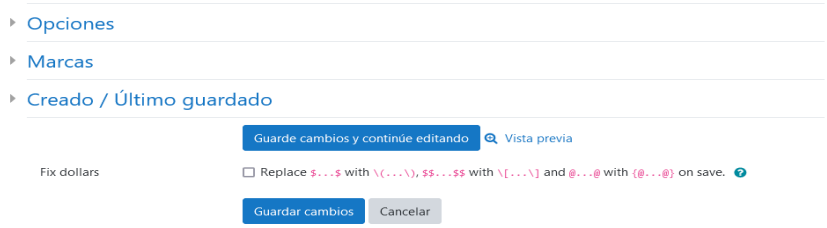


Fig 8. Sección final. Opciones, marcas y guardado de cambios.

3 Conclusiones y trabajos futuros

No es que este tipo de preguntas de Moodle sea muy sencillo de usar, tanto por el profesor, cuanto por los estudiantes: para ambos es necesario un aprendizaje del entorno, principalmente de parte del profesor que debe aprender el lenguaje de programación de STACK y de Maxima, por el lado de los alumnos es relativamente más simple ya que se pueden ir generando ejercicios que vayan enseñando el comportamiento de las preguntas y se puede ir aumentando gradualmente la complejidad de las mismas con dicha finalidad. Por otro lado, una conocida desventaja es el hecho de que no otorgue puntaje nulo cuando el estudiante no da una respuesta, o cuando ha fallado solamente en la sintaxis (recordemos que usa un subconjunto de Maxima, y, para el proceso de programación por parte del profesor, un conjunto de comandos "*ad hoc*") por lo cual, es saludable siempre verificar a ojo humano aquellas preguntas no evaluadas con el tope de calificación.

Aun así, creemos que vale el esfuerzo de aprender a usarlo, junto con el tipo de pregunta Geogebra. Para nosotros y para los estudiantes. Con ella integramos definitivamente el uso de software a la asignatura, como respuesta a las normativas actuales de acreditación de las carreras de ingeniería. Sin perjuicio de que ya lo hubiésemos integrado antes en el desarrollo de la asignatura Álgebra y geometría analítica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad nacional de Misiones.

Referencias

1 Lowe, T.; Snagwin, C.; Jones, I. *Introducción a STACK* (2020) Traducción: Morel,J.; Martínez,J; Olsson,J. https://github.com/maths/moodle-qtype_stack/blob/master/doc/content/es/2019-STACK-Guide.pdf. accedido el 28 de Mayo de 2022

2 STACK Docs. https://docs.stack-assessment.org/en/ accedido el 28 de Mayo de 2022

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Uso del Padlet como recurso innovador en Análisis Matemático 1

Paola Andrea Vilchez[1], María Agostina Cagnina[1], Graciela del Valle Echevarría[1]
1 Departamento de Ciencias Básicas- Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias Universidad Nacional de San Luis
Campus Universitario -Ruta 148 Extremo Norte – Villa Mercedes, (San Luis)
{gecheva61, agostinacagnina, vilchezpaolaandrea}@gmail.com

Resumen. El presente trabajo pretende describir la experiencia realizada con estudiantes de ingeniería de la materia Análisis Matemático 1 de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias (FICA) de la Universidad Nacional de San Luis (UNSL). El mismo consiste en el uso de un recurso educativo, para realizar una actividad, fomentando el trabajo colaborativo. Se pretende a través de esta actividad, que los estudiantes logren autonomía y creatividad. Se apunta a un aprendizaje significativo, no memorístico, para que los nuevos conocimientos puedan relacionarse con los saberes previos o disciplinares. En esta actividad se aplica el modelo TPACK (Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido), que se basa en la combinación de tres variables: conocimiento tecnológico, conocimiento pedagógico y conocimiento del contenido.

Palabras Clave: Recurso educativo, Aprendizaje significativo, Derivada, Trabajo colaborativo.

1 Introducción

En la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la UNSL, se pretende la formación de futuros ingenieros, que serán parte de una sociedad en constante cambio y que requieren de ciertas competencias, que le permitirán al futuro profesional desempeñarse frente a diferentes situaciones y contextos. Las instituciones de Educación Superior se enfrentan constantemente al bajo rendimiento alcanzado por sus estudiantes en el área de matemáticas, situación que se deriva de factores como la cantidad de horas dedicadas según el currículo, número de docentes y de personas por curso, al igual que ausentismo o apatía por el área de formación [1].

Se requieren de propuestas educativas que fomenten el desarrollo de ciertas competencias en los estudiantes y que permitan alcanzar los objetivos pedagógicos.

Un medio para lograr estas propuestas educativas es desarrollarlas teniendo en cuenta el modelo constructivista, en el que se coloca al estudiante como centro del proceso educativo y al docente como facilitador, otorgando sentido y significado a los contenidos y a las experiencias vivenciales. La formación sigue siendo necesaria pero no solo orientada a lo disciplinar sino, especialmente, a capacitar a las personas para pasar por los distintos espacios sin tener una experiencia fragmentada, dispersa y un exceso de carga emocional y cognitiva. En el modelo constructivista las experiencias están basadas en la interacción social, la participación activa y los entornos complejos. Para la experiencia se tienen en cuenta las pedagogías emergentes que surgen en los contextos de la sociedad del conocimiento en red. Estas pedagogías se basan en la integración de las tecnologías digitales, la exploración y la modificación de las pedagogías existentes y desarrollan nuevas propuestas teóricas y prácticas, que se intenta realizar a partir de la propuesta aplicada [2].

El presente trabajo consiste en mostrar las acciones que se llevaron a cabo en una actividad puntual de la materia Análisis Matemático 1, dictada a los alumnos que estudian ingeniería; a través de una actividad basada en el modelo TPACK (Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido), en el que se define enseñar el concepto de la derivada, en particular las aplicaciones de la derivada para el análisis de una función, mediante un actividad grupal, apuntando a un trabajo colaborativo a través de una herramienta tecnológica como el padlet. Si bien la propuesta

se enmarca en el modelo TPACK, se hace énfasis en este texto a la aplicación de la herramienta tecnológica padlet, ya que permite realizar un trabajo asincrónico y dinámico, motiva la realización de actividades, despierta el interés por adquirir el conocimiento, facilita la información y convierte al educando en autor de su propio aprendizaje, es decir, el docente acciona como guía, promueve el trabajo colaborativo y transforma de manera creativa los procesos pedagógicos, con la finalidad de lograr la excelencia académica [3].

Padlet como parte de las tecnologías de la información y comunicación, manifiesta cambios positivos en el campo educativo, estableciendo ventajas que facilitan la comprensión de los contenidos, direccionada al trabajo colaborativo, haciendo dinámica y creativa la pedagogía, siendo una propuesta innovadora que permite al educando gestionar y crear espacios de aprendizaje [4].

Se selecciona esta herramienta para la realización de la actividad debido a que en la misma se pueden insertar documentos, videos, imágenes, entre otros, que proyecten un aprendizaje participativo y colaborativo, destacando que la tecnología y la educación son determinantes en la estimulación de las estructuras mentales para mejorar el aprendizaje dentro de la realidad docente actual.

Si bien hay un objetivo de la actividad que tiene que ver con el contenido, a partir de la propuesta se pretende que los estudiantes resuelvan problemas, sean reflexivos, autocríticos e impliquen su interacción social en valores, recursos tecnológicos y experiencias, para actuar de manera congruente ante los avances establecidos [5].

2 Metodología

Esta propuesta se realizó en la materia Análisis Matemático 1 (Redictado), en un grupo de 50 estudiantes. Esta población había cursado anteriormente Análisis Matemático 1 no pudiendo alcanzar los objetivos para regularizar la materia. Al manejar un grupo más reducido de estudiantes, fue que se pudo implementar esta actividad.

2.1 Organización de la propuesta

En padlet, el equipo docente desarrolla el análisis de una función, Este análisis se idea como un recorrido inserto en el mapamundi, teniendo en cuenta que en el análisis de curvas existen diferentes pasos o instancias que la componen. Cada punto tiene un video explicativo; en primer lugar, en el punto de partida se encuentran con la función. siguiendo el recorrido se visualiza cómo obtener los valores críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos de la función, puntos de inflexión, análisis de los intervalos de concavidad y finalmente la gráfica de la función, utilizando cada uno de los datos que se obtuvieron.

De la misma manera se colocan las funciones sobre las que deben trabajar los estudiantes, en distintos puntos del mapa.

Se realiza además un video explicativo de como interactuar en la herramienta, utilizando loom con una extensión de cinco minutos. El fin de este video consiste en una guía para el desarrollo de la actividad y para la metodología de trabajo, contemplando que los estudiantes no tienen el conocimiento del uso de la herramienta padlet, por lo que se les detalla paso a paso como agregar las ubicaciones en el mapa correspondiente, como insertar un documento, imagen, video, texto o enlace y como realizar la conexión entre ubicaciones para generar el recorrido. También se explica la forma de interactuar con los otros grupos, en forma de comentarios.

Por otra parte, el aula virtual se prepara para organizar los grupos y para colocar la consigna, el padlet y el video explicativo.

2.2 Consigna

En primer lugar, se dividieron en 10 grupos de 5 integrantes cada uno, presentándoles la siguiente actividad:
Realizar grupos máximo de 5 integrantes en la plataforma de Moodle. Una vez conformados los grupos, deberán trabajar la función asignada en el lugar correspondiente (Se les asignó trabajar a partir de una ciudad o país), sobre esta función deberán efectuar el análisis de curva e ir colocando los pasos en el padlet. (Ver video explicativo de como colocar información en padlet https://www.loom.com/share/24e618b243334d058ce630932faba876). En el padlet deberán colocar los pasos correspondientes a encontrar valores críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, punto de inflexión, intervalos de concavidad y gráfica. Tienen como guía el

recorrido de la función que va desde Villa Mercedes (San Luis) a las Cataratas del Iguazú (Misiones). Este trabajo tiene un plazo máximo de dos semanas. Posterior al plazo indicado, se les asignará un día y horario para explicar el trabajo realizado.

Fig. 1. Imagen de la actividad en padlet. Las ubicaciones en azul, indica el recorrido realizado por los docentes a modo de ejemplo. Las ubicaciones en rosa indican las funciones a trabajar de cada grupo. https://padlet.com/vilchezpaolaandrea/nvoavhfcahasalhp.

3 Producciones de los alumnos

En las siguientes imágenes se observan algunas de las producciones realizadas por los estudiantes, se eligieron las siguientes ya que fueron las que mayor participación tuvieron y fueron realizadas de manera más ingeniosa, es decir no solo utilizaron el recurso de insertar imagen, sino que también se valieron de videos, enlaces y textos.

Fig. 2. En la figura se observa todo el trabajo realizado por los estudiantes, cada ubicación y recorrido correspondiente.

Análisis Grupo 1: Analizaron la función ubicada en Brasil (Salvador de Bahía) los estudiantes solo usaron el recurso de insertar imágenes.

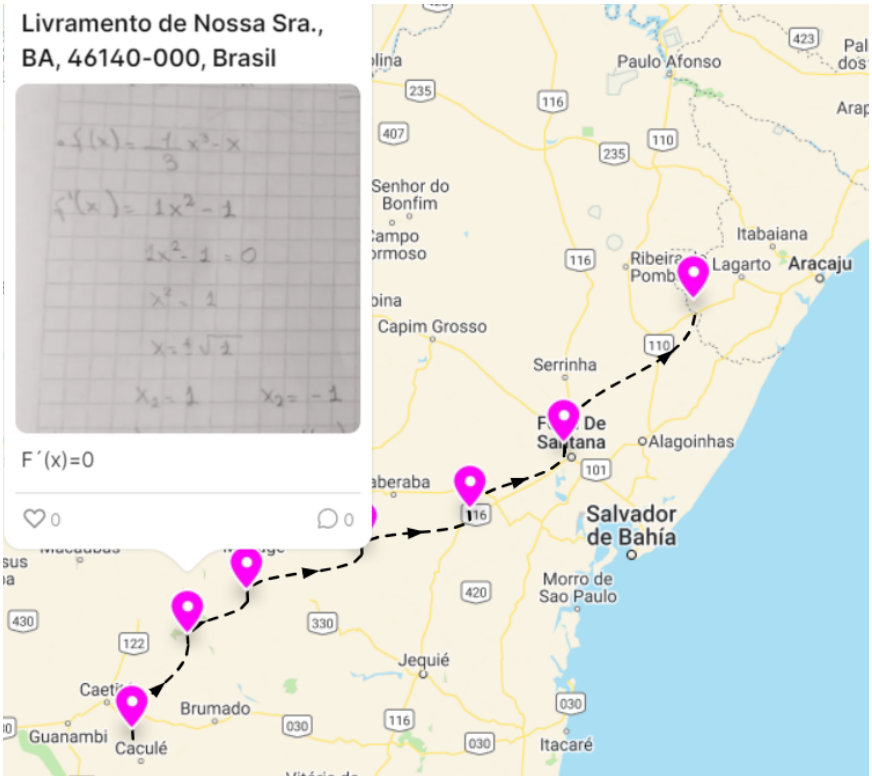


Fig. 3. Imagen del análisis de punto crítico de una función.

Cometieron un error en el análisis del punto de inflexión, que luego se trasladó al análisis de los intervalos de concavidad.

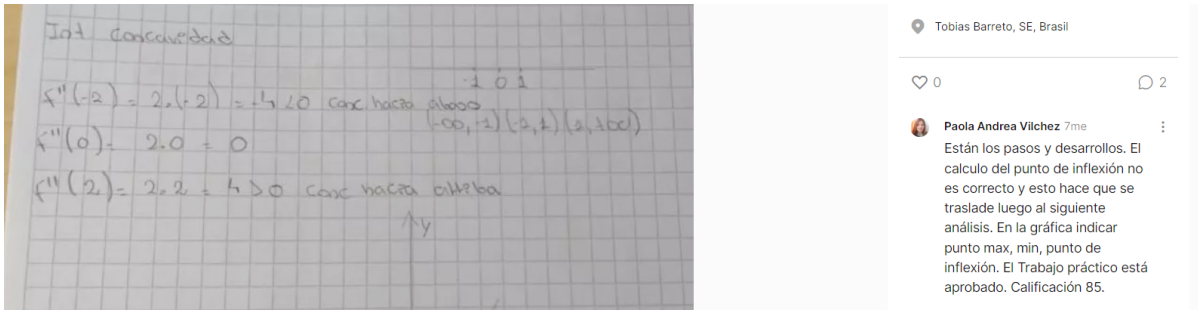


Fig. 4. Imagen del desarrollo de los intervalos de concavidad y la corrección de una de las docentes.

Análisis Grupo 2: Trabajaron en la función ubicada en Brasil (Sao Paulo) realizaron todo el recorrido mediante fotos, en la última ubicación realizaron el gráfico a través de un graficador online libre.

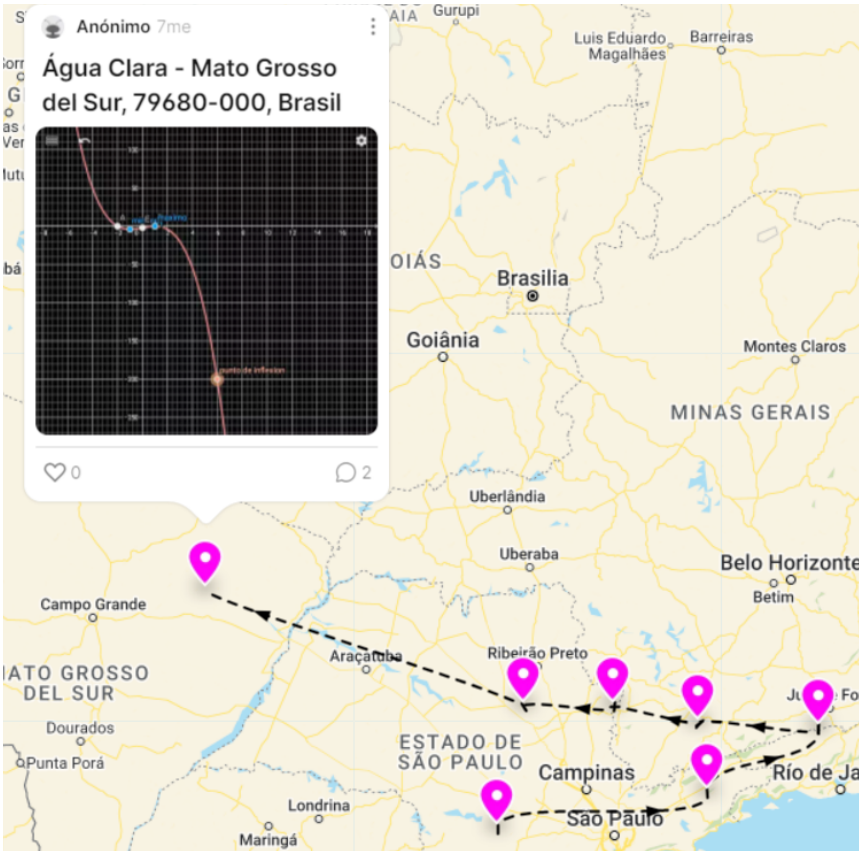


Fig. 5. Recorrido Sao Paulo.

Ampliando se puede ver un error que los estudiantes cometieron a la hora de encontrar los puntos críticos, fue allí que se trasladó el error y cada análisis que sigue es incorrecto.

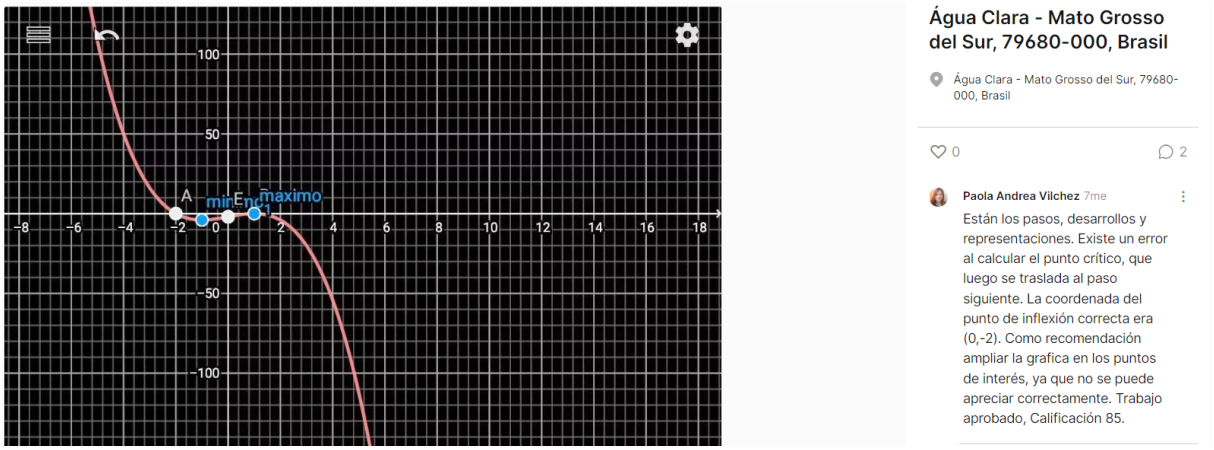


Fig. 6. se ve la gráfica del grupo Sao Paulo y también la corrección de una de las docentes.

Análisis Grupo 3: Trabajaron en la función ubicada en Brasil (Amazonas) los integrantes de este grupo no solo insertaron fotos de los desarrollos, sino que debajo de cada una de ellas realizaron una explicación en formato de texto.

Fig. 7. Imagen del grupo ubicado en Brasil (Amazonas) realizando el recorrido mediante imágenes y texto.

Si bien llegaron a un análisis correcto cometieron un error en el punto de inflexión. Como se puede ver en la fig. la imagen que insertaron esta vertical en lugar de colocarla en forma horizontal.

Fig. 8. Gráfica de la función y corrección de una docente.

Análisis Grupo 4: Trabajaron en la función ubicada en Bolivia, los integrantes de este grupo no solo insertaron fotos de las producciones hechas a mano, sino que también se ayudaron de gráficos y presentaciones más formales.

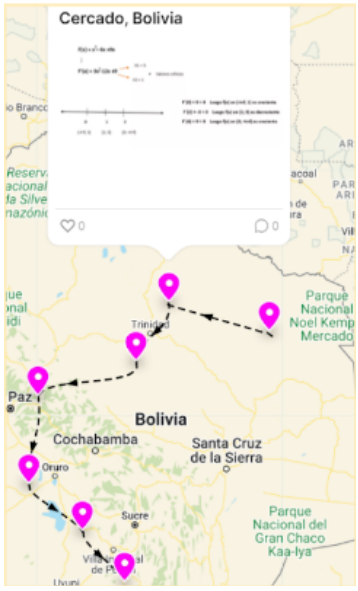


Fig. 9. imagen del grupo ubicado en Bolivia, realizando el recorrido mediante imágenes gráficos y textos.

Se cometió un error de concepto al analizar los intervalos de concavidad, pero la gráfica y desarrollo del mismo fue muy clara y correcta.

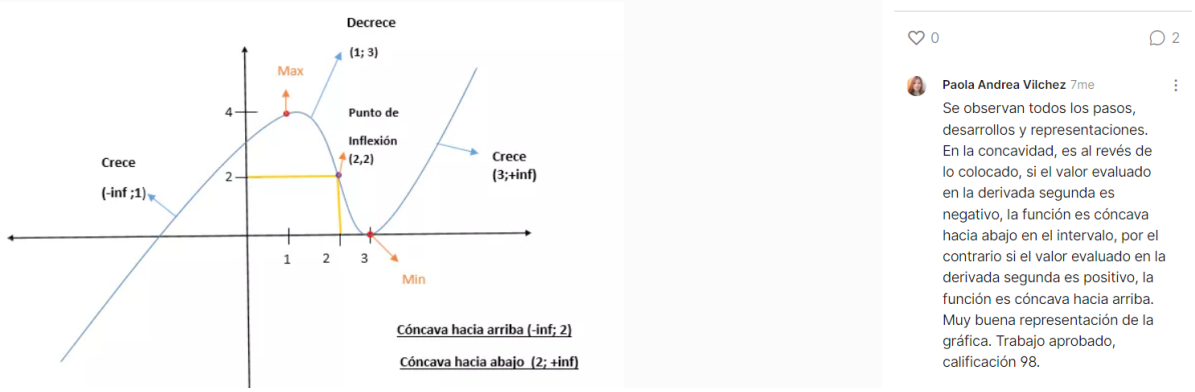


Fig. 10. Imagen de la gráfica y corrección.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Realizada la propuesta, se logra:

Mejorar la relación entre los estudiantes y los docentes, generando un ambiente más flexible, de interacción entre las partes, fomentando la comunicación y el interés. Estimulando el trabajo colaborativo, apuntando a que el docente no sólo transmita contenido, sino que actúe como guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A partir de la propuesta, el estudiante pudo construir su propio conocimiento mediante la interacción de ideas, estrategias y metodologías que promovieron el aprendizaje significativo.

Como trabajos a futuro queda evaluar nuevamente la propuesta, ya que actualmente se encuentra en práctica la misma actividad a una población mayor (120 alumnos), que se encuentran cursando por primera vez Análisis Matemático 1.

Como segunda propuesta se pretende crear una nueva actividad con el objetivo que los estudiantes aporten material teórico, ya sea en formato texto, imagen o videos, y entre ellos interactúen respecto de la utilidad de la información.

Referencias

1. Torres Taborda, Sandra Liliana ; Martínez Meneses, Efraín José. (2015) Laboratorio virtual de matemáticas como estrategia didáctica para fomentar el pensamiento lógico. Revista Academia y Virtualidad, ISSN 2011-0731, Vol. 8, Nº. 2.
2. Begoña Gros. (2015). La caída de los muros del conocimiento en la sociedad digital y las pedagogías emergentes. Education in the Knowledge Society (EKS), 16(1), 58–68. https://doi.org/10.14201/eks20151615868
3. Méndez, M., & Concheiro, P. (2018). Uso de herramientas digitales para la escritura colaborativa en línea: el caso de Padlet. Revista marcoELE, 1(27), 1-17. Obtenido de https://www.redalyc.org/jatsRepo/921/92155498008/92155498008.pdf
4. Lima, G., & Araújo, J. (2018). El uso de las redes sociales para el desarrollo de la enseñanza de ELE: el investigador y el profesor. Un diálogo entre estos dos sujetos a través de la entrevista con Daniel Cassany y Dayane Cordeiro. Trabalhos em Linguística Aplicada, 57(2), 1275-1296. Obtenido de https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-18132018000201274
5. Varela, S., & Valenzuela, J. (2020). Uso de las tecnologías de la información y la comunicación como competencia transversal en la formación inicial de docentes. Revista Electrónica Educare., 24(1), 1-20. Obtenido de https://www.scielo.sa.cr/pdf/ree/v24n1/1409- 4258-ree-24-01-172.pdf

XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

Aproximación Computacional al Álgebra Lineal: Enseñanza de Transformaciones Lineales con Aplicaciones en Carreras de Ingeniería

Eduardo A. Gago[1], Paola A. Szekieta[1], Ada E. Mascheroni[1], Matías F. Romero[1].
[1] Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario
Zeballos 1341
eagago@gmail.com, paolasz@gmail.com, aemascheroni@hotmail.com, mati_rom@hotmail.com

Resumen. En los cursos de primer año existen diferentes aspectos que dificultan los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, siendo el más notorio el alto nivel de abstracción de los conceptos involucrados en esta disciplina. Por lo tanto, es esencial presentar modelos simples que puedan alentar a los estudiantes a desarrollar nuevas formas de pensar y razonar al mismo tiempo que desencadenan situaciones de enseñanza motivadoras. En este trabajo se relata una experiencia de clase en la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica con el objetivo de integrar los conceptos de las transformaciones lineales y el uso de herramientas de software matemático. Las actividades presentadas tienen como objetivo desarrollar procedimientos algorítmicos para relacionar conocimientos teóricos con interesantes aplicaciones en ingeniería. Los estudiantes realizaron una actividad exploratoria relacionando los conceptos teóricos, y a partir de transformaciones se desarrollaron diferentes modelos, curvas y superficies en 2D y 3D, buscando patrones de comportamiento y su relación con diversas aplicaciones.

Palabras Clave: Simulación, Transformaciones Lineales, Modelización, Aplicaciones.

1 Introducción

En nuestra práctica docente se ha evidenciado que en los cursos de primer año en las clases de Álgebra Lineal son diversas las cuestiones que obstaculizan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Una de las más relevantes es la insuficiente formación básica con la que los alumnos ingresan a la universidad, una manera de palear esta situación es formular modelos sencillos que converjan hacia nuevas formas de pensamiento, y sean disparadores de situaciones motivadoras.

En el presente trabajo se describe una experiencia en un curso de primer año en la Cátedra de Algebra y Geometría Analítica, en la carrera Ingeniería Química, con el propósito de integrar conocimientos cuando se desarrolla el tema Transformaciones lineales mediante la utilización de software específico.

Se proponen situaciones mediante las cuales se induce a desarrollar un procedimiento analítico para relacionar los conceptos teóricos aprendidos en el aula y potenciar las competencias que puedan desarrollar los estudiantes.

La visión de la enseñanza de Matemática en las carreras de Ingeniería en las instituciones de Educación Superior, pretende que el aprendizaje se realice bajo ciertas condiciones, que permitan al alumno adquirir conocimientos con técnicas que sean inherentes a problemas relacionados con su futuro quehacer profesional.

Se parte de la hipótesis que las decisiones sobre la práctica de enseñanza de la Matemática están íntimamente asociadas a las posiciones ante el propio saber matemático y ante el saber a enseñar. En este sentido vale intentar un análisis a priori de algunas de las complejas tramas que se pueden vivir en las instituciones [1].

La incorporación de los recursos computacionales de cálculo simbólico matemático al ámbito educativo, dentro

de las carreras de Ingeniería, han cambiado las estrategias de enseñanza por una línea de trabajo en la elaboración de propuestas didácticas impensable hace algunos años atrás.

Para construir las bases cognitivas y actitudinales de un profesional, es necesario además, incentivar en los alumnos la dedicación a la investigación desde el primer nivel de la carrera. Particularmente, en el uso de aplicaciones informáticas, es necesario orientar al estudiante para encausar el bagaje de conocimientos que posee en el uso de recursos hacia el aprovechamiento del aprendizaje de los conceptos de Matemática.

La Universidad, acosada por requerimientos de su entorno para modificar sus prácticas según modelos ajenos a su propia idiosincrasia, parece responder lentamente a la urgencia de plantearse nuevas definiciones que la alejen de pensarse como una institución al servicio de esos modelos [2].

2 Metodología

El Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas, es el ámbito dentro de la Facultad para desarrollar la propuesta. Se genera con este propósito un espacio colaborativo de trabajo, y a tal efecto se diseña una clase taller que se denomina clase teórico práctica tecnológica donde se aplican los conceptos de la geometría de las transformaciones lineales en el plano y en el espacio.

La intención de la clase es desarrollar una aplicación de las transformaciones afines introduciendo modelos que tengan entidad en el ámbito de la Ingeniería y que además, estén relacionados con la generación de objetos relacionados con la perspectiva de una matemática más actual.

En la Universidad Tecnológica Nacional, las asignaturas se dictan en dos instancias claramente diferenciadas, una de teoría y otra de práctica. El desarrollo de la teoría se hace mediante la modalidad de clase de carácter expositiva y dialogada entre docente y alumnos, mientras que en la clase de práctica se resuelven problemas de la guía propuesta por la cátedra.

En la experiencia que se relata en este trabajo, los alumnos ya tienen previamente dictadas las clases de teoría y práctica referidas al tema Transformaciones lineales, o sea los alumnos tienen conocimientos del tema. Además, al momento del desarrollo del práctico, los estudiantes ya realizaron tres talleres de laboratorio con instrucción en el uso de los dos programas que se utilizan en el laboratorio: MATHEMATICA y GEOGEBRA.

La clase de Laboratorio pretende entrenar al estudiante en el manejo de estos programas específicos con la intención de que a partir de la utilización de recursos informáticos pueda desarrollar su ingenio y destreza, y de esa manera conceptualizar los contenidos asociados a la unidad temática presentada.

Las plataformas de enseñanza proveen las herramientas y recursos tecnológicos necesarios para el desarrollo de una propuesta educativa basada en el uso de los mismos. Brindan además a los docentes la posibilidad de realizar seguimientos específicos de los alumnos que participan en la propuesta y la disponibilidad de distintos tipos de estadísticas sobre el desarrollo del curso. Su principal ventaja es la capacidad de dar seguimiento a los alumnos, el registro de sus trabajos, aplicación de pruebas en línea, almacenamiento de portafolios electrónicos de trabajo y registro de sus evaluaciones [3].

Las características de la clase teórico-práctico tecnológica son establecer las pautas de un trabajo interactivo de análisis ingenieril que se manifieste en una actividad productora de nuevas ideas. La adquisición individual de habilidades técnicas, sin considerar las organizacionales y el trabajo en equipo, indispensables para la producción autogestionada, la constitución de equipos multifuncionales, la estructura, los sistemas operativos y los procesos de producción que caracterizan a las organizaciones de vanguardia [3].

Las bases metodológicas de los procesos de aprendizaje se sustentan en avanzar primero con la investigación teórica del tema, creando un ambiente donde el alumno asuma un rol activo, dejando de lado el hecho de ser espectador, y le permita ir construyendo los conceptos mediante la experimentación, y la elaboración de conclusiones. El desempeño basado en habilidades y/o reglas puede ser individual, según el nivel de pericia personal, pero en determinados casos requiere colaboración (trabajo en equipo) debido a la complejidad o exigencias físicas propias de una tarea [3].

El conocimiento en la acción contribuye a que no seamos presa de las prácticas pedagógicas academicistas, en las cuales la teoría y los conocimientos se asumen como fines en sí mismos, con poca o ninguna aplicación práctica. Por ello, las estrategias pedagógicas deben tener siempre presente el desempeño del alumno [4].

Los docentes, en este tipo de experiencias, toman el rol de guía del proceso y actúan como facilitador del aprendizaje con la intencionalidad de llegar a la comprensión cabal de las aplicaciones del tema en estudio, incluso con preguntas que activen un mecanismo de continuidad en la profundización de contenidos y posterior investigación

de distintas líneas sobre el problema propuesto. En este caso los docentes que llevan adelante la experiencia prestan asistencia continua a los estudiantes.

3 Objetivos de la propuesta pedagógica

Se plantea la necesidad de implementar una forma alternativa de enseñanza que atienda no sólo a los requerimientos del programa, sino que motive a los alumnos con la incorporación de problemas de aplicación que se relacionen con la teoría del tema desarrollado.

Muchos estudios sobre las profesiones han encontrado que los recién egresados tienen problemas al enfrentarse al mundo laboral en sus primeros años, lo que ha conducido a experimentar con nuevos enfoques curriculares. Uno de ellos es el currículo basado en problemas, actualmente bien establecido en una variedad de campos profesionales y en un importante número de universidades a nivel internacional. Este enfoque trata los problemas reales que enfrentan las profesiones como punto de partida de un currículo [4].

Debido al escaso nivel de conocimientos previos que poseen los alumnos en el primer año de las carreras de Ingeniería se sabe que en el área del Álgebra Lineal es difícil encontrar modelos que puedan ser comprendidos y tratados por los estudiantes, pero es tarea del docente introducir situaciones problemáticas que despierten la curiosidad y la motivación en los alumnos. Esta restricción también se ve condicionada por los obstáculos que genera el propio concepto de Transformaciones Lineales cuando se presenta a los alumnos en primera instancia.

En esta experiencia se propone la utilización de una herramienta valiosa como el cálculo simbólico que se usa como conector de funciones matemáticas aplicadas a situaciones reales, lo que permite validar las destrezas propias del alumno para el desarrollo de capacidades básicas.

La interconexión entre los conceptos del Álgebra Lineal, los casos reales en el ámbito ingenieril, y la anticipación a conocimientos que luego se complejizarán en las asignaturas que se ocupan de las tecnologías básicas y aplicadas proveen a los estudiantes de versatilidad a la hora de abordar modelos cada vez más sofisticados en las asignaturas específicas de su carrera.

Las principales tendencias a futuro en torno a la ingeniería respecto a prioridades educativas que se anticipan en este tiempo pueden ser modificadas o ampliadas, según se relacionan con la creatividad, innovación, diseño, métodos de ingeniería y fundamentos, estudios multidisciplinarios y aprendizaje independiente.

Se espera que se proyecte un enfoque en garantizar que los ingenieros sean más creativos e innovadores, a medida que las actividades tradicionales de ingeniería se vuelven más frecuentemente deslocalizadas. Estos atributos pueden ayudar a mantener a ellos a la vanguardia de la profesión de ingeniería integrando la innovación y la mejora continua como elemento esencial [5].

Se trata de crear un ámbito de trabajo donde el alumno pueda ser reflexivo, crítico, tome decisiones y también delimite los errores cometidos en el proceso. Esta situación provoca la necesidad por parte del alumno de conocer el objeto de estudio e impone a los docentes crear las condiciones internas para la asimilación, en forma activa e independiente de nuevos conocimientos.

4 Clase teórico práctica tecnológica

Se diseña una clase teórico práctica tecnológica en tres sesiones de tres horas cátedras cada una, con el propósito de implementar un proceso significativo del aprendizaje del tema propuesto, mediante el análisis de las transformaciones lineales y la relación que se establecen con las visualizaciones geométricas.

Las etapas diseñadas para llevar adelante la clase son:

- Armado de los grupos de trabajo
- Planteo de las situaciones problemáticas
- Revisión y posterior selección del material bibliográfico sobre el tema.
- Repaso de los contenidos desarrollados en la clase de teoría
- Modelado de la situación
- Resolución de los modelos propuestos y conclusiones.

En la clase de Laboratorio, se trabaja con grupos de alumnos que no superen los tres integrantes, y para llevar a cabo la tarea prevista se les presenta casos de aplicaciones ingenieriles sencillas y de la geometría fractal, con el propósito que los alumnos se apoyen en el uso de las herramientas informáticas.

Los alumnos tienen la libertad de formar los grupos de acuerdo a su criterio y elegir en qué grupo quieren participar, pero se fija como condición indispensable que se trabaje en equipo propiciando un ambiente colaborativo. Cada grupo dispone al menos de una computadora de escritorio, pero también se admite que traigan sus computadoras personales para trabajar.

De esta manera, el trabajo colaborativo ofrece la posibilidad de construir el conocimiento en forma cooperativa, contrastando ideas, a la vez que se mejoran las habilidades comunicativas y se brinda la oportunidad de disfrutar nuevas experiencias entre pares. Los participantes deben interiorizarse de las normas o reglas de interacción, mediada por computadora, que deben respetar a los efectos de mantener la armonía del grupo de trabajo. Es necesario prever y favorecer ampliamente la participación dinámica de alumnos y docentes.

Ya sea que estas estrategias se implementen en un entorno presencial o virtual, debe garantizarse la diferenciación de los logros del grupo de trabajo y de los logros individuales, esto no sólo para la correcta evaluación, sino para la propia motivación para seguir interactuando en un futuro [5].

Interpretar (por parte de los alumnos) implica: dialogar, relacionar y confrontar significados, con el fin de encontrarle sentido a un texto, una proposición, un problema, gráfico o esquema, plantear argumentos en pro o en contra de una teoría o propuesta, justificar una afirmación, explicar los por qué de una proposición, demostrar la articulación de conceptos, teorías o partes de un texto que fundamenten la reconstrucción global del mismo, organizar premisas y relaciones causales para sustentar una conclusión [3].

En la primera parte de esta experiencia se presentan modelos sencillos relacionados con el quehacer ingenieril y en la segunda parte de la clase se realiza la generación de fractales a partir de transformaciones afines, que involucran los conceptos de las transformaciones lineales.

4.1 Simulación del movimiento de una herramienta para trituración y molienda de sólidos

La trituración es un proceso en la Ingeniería mecánica que tiene las mismas características que la molienda, y ambas consisten en una operación que se ocupa de la reducción de tamaños que permite realizar una tarea de separación, pero no una operación de separación de componentes, sino que es una separación de un material, que generalmente es sólido, en fracciones de tamaño más pequeño.

En general, las piezas que forman las máquinas de trituración de sólidos suelen presentar la propiedad de simetría de sus componentes respecto al eje de rotación. La simetría rotacional, es la condición que posee un objeto en el plano que le permite cambiar de posición, esto se logra después de aplicarle una rotación mediante un giro parcial determinado según las necesidades y los intereses del modelo en desarrollo.

El grado de simetría rotacional de un objeto se establece como el número de orientaciones distintas en las que se ve igual que en su posición inicial.

A partir de la información anterior, se propone a los alumnos diseñar como referencia inicial un objeto patrón, como el que se observa en la Fig. 1. La gráfica de dicho objeto les posibilita imitar la forma de un diente de una cuchilla que tritura materia sólida de un grado de dureza bajo.

Con este propósito, y utilizando la potencialidad del programa de computación MATHEMATICA, los alumnos diseñan la gráfica de una geometría simple que se observa en la Fig. 1.

La Fig. 1 es la representación gráfica de un objeto patrón sencillo resultante de la aplicación del sistema de inecuaciones (1) que se exhibe a continuación:

$$\begin{cases} 2y \geq (x-1)^2 \\ 16x \geq (-2y+1)^2 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

El sistema (1) surge como resultado de realizar varias pruebas con el propósito de lograr la forma del engranaje. Después de varias propuestas, pruebas y correcciones con el software MATHEMATICA, los estudiantes enunciaron las inecuaciones expresadas en (1).

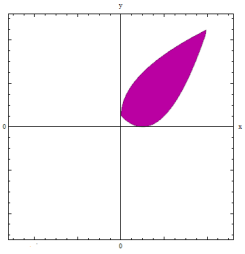


Fig. 1. Diente de un engranaje de una cuchilla.

Mediante la aplicación de un sistema de funciones iteradas (SFI) $\{f_1,f_2,f_3\}$ conformado por las ecuaciones (2), (3) y (4), a la gráfica de la Fig. 1 se producen reflexiones y traslaciones respecto a los ejes coordenados para generar parcialmente la estructura geométrica deseada. Estas reflexiones se realizan respecto a los ejes *x* e *y* [6].

$$f_1: R^2 \to R^2 \,/\, f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$$f_2: R^2 \to R^2 \,/\, f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

$$f_3: R^2 \to R^2 \,/\, f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

La aplicación del SFI con ayuda del software MATHEMATICA, se traduce en las gráficas de la Fig. 2, donde se puede visualizar las transformaciones lineales en el plano generadas a partir de la gráfica de la Fig. 1 que muestran la reflexión y simetría del diseño del engranaje de la cuchilla.

Para terminar el proceso, a partir de la Fig. 2, y siempre con ayuda del mismo software MATHEMATICA, muestran en la Fig. 3 los movimientos de rotación que tendría la cuchilla si estuviera en un aparato de molienda de sólidos.

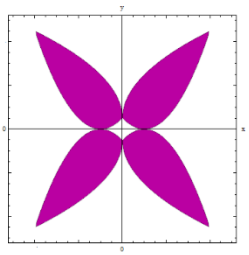


Fig. 2. Diseño de una cuchilla.

Las trayectorias de dichos movimientos se pueden obtener matemáticamente por medio de la ecuación (5) [6]. A través de las herramientas que posee el programa MATHEMATICA, es que los estudiantes pueden introducir la ecuación (5) y dándoles distintos valores al ángulo β, obtienen la secuencia de movimientos de la Fig. 3.

$$f_4: R^2 \to R^2 \,/\, f_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos\beta & -sen\beta\\sen\beta & cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

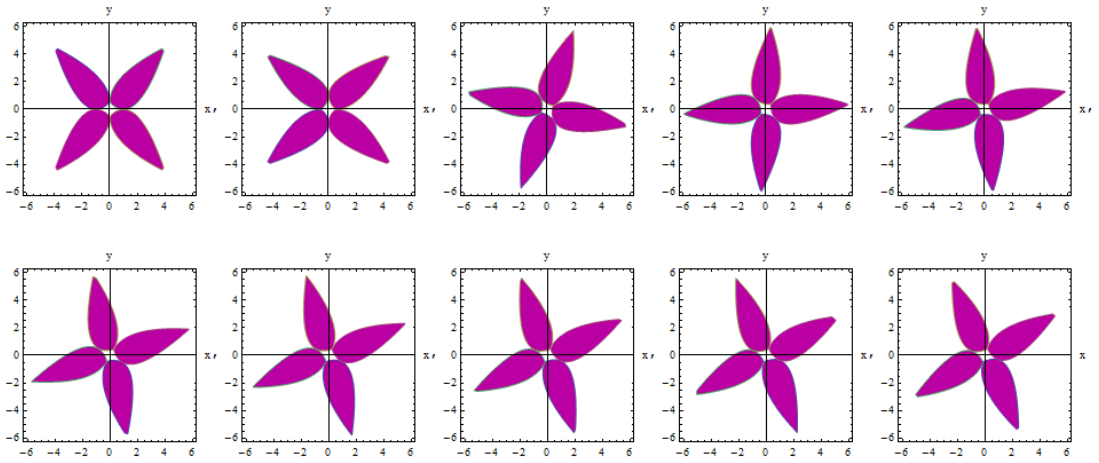


Fig. 3. Trayectoria del Giro de la cuchilla.

4.2 Generación de objetos fractales

En principio, se pretende que los alumnos generen el objeto fractal denominado Triángulo de Sierpinski (TS), analizando las transformaciones afines que se van a utilizar para dicho proceso. En este contexto, comienzan la experiencia partiendo de un triángulo isósceles de vértices: $O(0,0)$, $A(1,0)$ y $B(1,0)$, y mediante la aplicación consecutiva de un sistema de funciones iteradas (SFI) $\{f_5 f_6 f_7\}$ van a generar la estructura geométrica deseada.

Las leyes de las transformaciones afines aplicadas son [7]:

$$f_5: R^2 \to R^2 \,/\, f_5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(6)}$$

$$f_6: R^2 \to R^2 \,/\, f_6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

$$f_7: R^2 \to R^2 \,/\, f_7\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

Cuando realizan la primera iteración sobre el triángulo *OAB* aplicando el SFI, se obtiene el generador que es un triángulo dividido en cuatro triángulos más pequeños. A partir de ahí, y como consecuencia de seguir aplicando el SFI los estudiantes logran las cinco primeras gráficas que se observan en la Fig. 4.

A través de las herramientas que posee el programa GEOGEBRA, es que los estudiantes pueden introducir el SFI $\{f_5 f_6 f_7\}$ y dándoles distintos valores a x e y, obtienen la secuencia de la Fig. 4.

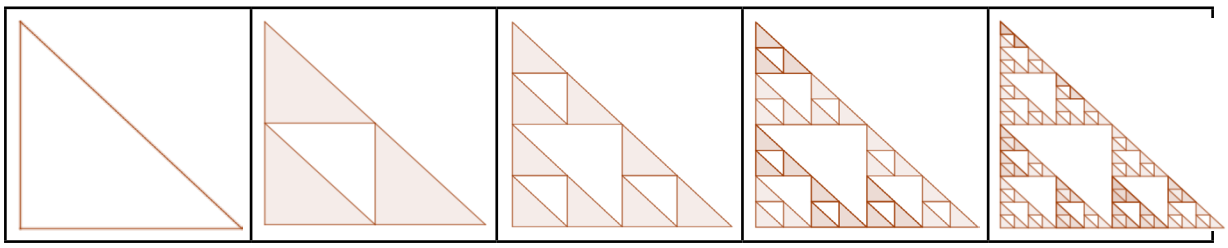


Fig. 4. Primeras cinco iteraciones en la construcción del TS.

La iteración tendiendo al infinito aplicando el SIF les permite a los alumnos generar el fractal denominado TS, En Fig. 5, se muestra el resultado de la experiencia.

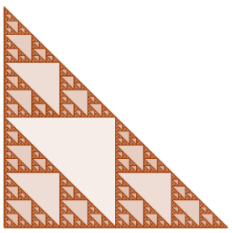


Fig. 5. Triángulo de Sierpinski.

Consecuentemente a esta actividad, y mediante la aplicación de un nuevo SFI $\{f_8 f_9 f_{10} f_{11} f_{12} f_{13} f_{14} f_{15}\}$ que constan de 8 aplicaciones, los alumnos construyen un nuevo fractal denominado alfombra de Sierpinski (AS), que según la indagación realizada en la investigación de la tarea solicitada, es una generalización del conjunto de Cantor. Para realizar este objeto recurren a las siguientes ecuaciones [7], [8]:

$$f_8: R^2 \to R^2 \,/\, f_8\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

$$f_9: R^2 \to R^2 \,/\, f_9\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

$$f_{10}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{10}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

$$f_{11}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{11}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(12)}$$

$$f_{12}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{12}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(13)}$$

$$f_{13}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{13}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(14)}$$

$$f_{14}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{14}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(15)}$$

$$f_{15}: R^2 \to R^2 \,/\, f_{15}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(16)}$$

La aplicación del software libre GEOGEBRA los alumnos diseñan el primer y los siguientes cuadrados que dan origen al fractal AS.

En la Fig. 6 se muestran las cuatro primeras iteraciones realizadas con el programa. Mientras que en la Fig. 7, después de realizar una cantidad importante y determinada de pasos se obtiene la AS.

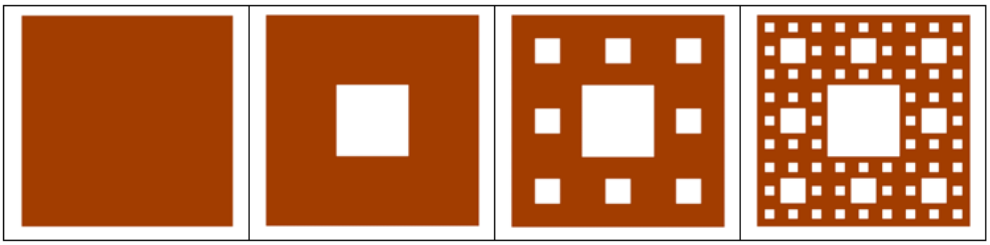


Fig. 6. Primeras aplicaciones de SFI para la AS.

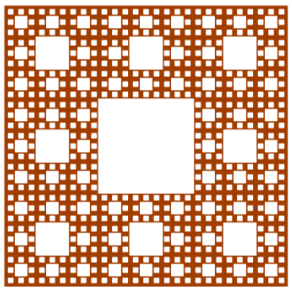


Fig. 7. Generación de la AS.

Luego de generar el TS y la AS, los estudiantes analizan estructuras similares pero en el espacio, El SFI que se aplica para este caso es $\{f_{16}, f_{17}\}$ [8]

$$f_{16}: R^3 \to R^3 \,/\, f_{16}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

$$f_{17}: R^3 \to R^3 \,/\, f_{17}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \forall\, a, b, c \in R \quad \textbf{(18)}$$

A partir de un tetraedro y de un cubo se pide que los alumnos comienzan con el proceso de formar con cada uno de ellos, un objeto fractal en R^3. En las Fig. 8 y 9, se muestran las primeras gráficas en 3D obtenidas luego de aplicar las transformaciones afines del SFI.

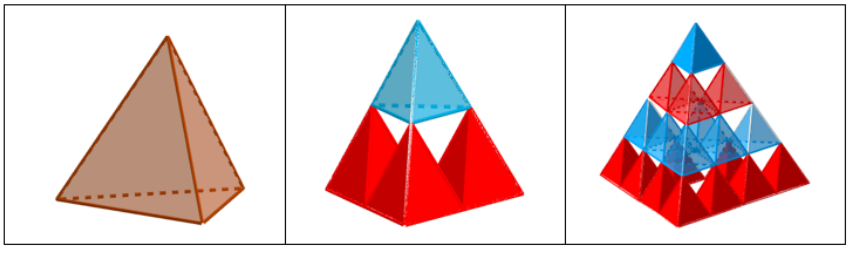


Fig. 8. Fractal en 3D a partir de un tetraedro.

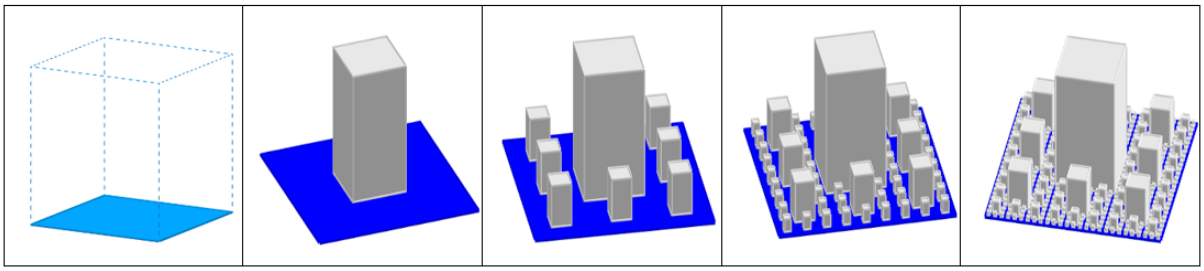


Fig. 9. Fractal en 3D a partir de un cubo.

5 Resultados

La evaluación es un proceso que está inserto dentro de otro más complejo que es el de enseñanza aprendizaje. La evaluación de la experiencia se sustenta en el criterio de seguir en forma continua y permanente todas las actividades que realizan los estudiantes en los grupos conformados por ellos. Además se les solicita que a partir del TS, y aplicando las reflexiones, traslaciones y rotaciones que estudiaron en el plano, construyan figuras fractales sencillas a partir de un patrón.

A modo de ejemplo se expone una de las tareas realizadas por un grupo de alumnos:

En primera instancia el objeto patrón que eligen es el que se observa en la Fig. 10. A partir de la Fig. 10, deciden realizar una reflexión respecto al eje y gráficamente resulta la Fig. 11.

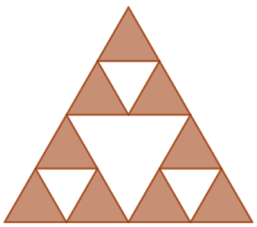


Fig. 10. Nuevo TS elegido por los alumnos.

La evaluación es, sin duda, un componente necesario no sólo para acompañar y dar cuenta de logros y aciertos en los propósitos y caminos elegidos, sino que además debe orientar e iluminar el sentido y metas que han de envolver y caracterizar a la educación. Desde esta perspectiva, es necesario incluir y discutir la evaluación como pieza fundamental [9].

Fig. 11. TS reflejado con el patrón original.

Luego realizan un ejemplo de traslación horizontal del objeto de la Fig. 11. Situación que se observa en la Fig. 12.

Luego, los alumnos enuncian la expresión matricial de una transformación afín en el plano, y tal que para todo k, c, b_1 y $b_2 \in R$, resulta la ecuación (19):

$$T: R^2 \to R^2 \;/\; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -c\sin\beta \\ k\sin\alpha & c\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

Donde , $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$

Finalmente, varían alternativamente de manera aleatoria los parámetros involucrados en la ecuación (19) y lo aplican a todos los puntos del patrón diseñado en la Fig. 11, para obtener la gráfica de transformaciones afines en el plano que se observa en la Fig. 13. La estructura geométrica de la Fig. 13 surgen de las aplicar sucesivamente traslaciones, reflexiones y rotaciones del patrón de la Fig. 11 [6].

Fig. 12. TS reflejado con el patrón original.

Fig. 13. TS reflejado con el patrón original.

6 Conclusiones y trabajos futuros

La utilización de las transformaciones lineales aplicadas al estudio de modelos idealizados relacionados con la ingeniería, junto con la generación de objetos fractales y el apoyo de los recursos informáticos utilizados adecuadamente, propiciaron un análisis contextualizado que logró el objetivo de introducir el tema, visualizando las propiedades de reflexión, rotación y traslación que presentan las superficies tratadas.

Las relaciones que los alumnos pudieron establecer mediante la visualización permitieron conceptualizar de una manera rápida y eficaz el tema de las transformaciones en el plano y en el espacio. La utilización de las matrices de transformación lineal determinó que los alumnos tuvieran que apelar a repasar e investigar conceptos relacionados con el tema (producto de matrices, la visión de lo que significa la transformación lineal como función y alternativamente como un producto matricial, etc.)

Los estudiantes que participan en este tipo de propuestas, aprecian el trabajo en equipo, ya que les exige el

desarrollo de capacidades y valores que contribuirán en su futuro perfil profesional, tales como responsabilidad, compromiso y honestidad.

Se coincide con Rosen que, aún en la actualidad, se espera que los responsables que desarrollan los currículos de ingeniería acepten que no todo el contenido específico de la disciplina se puede cubrir en un programa de ingeniería, y centrarse más en fundamentos y métodos de ingeniería y enfoques que tienden a proporcionar a los estudiantes las herramientas que necesitan para abordar tareas específicas de la disciplina [4].

Luego de finalizada la clase se realizó una charla informal con los alumnos que permitió evidenciar que la propuesta pedagógica realizada mediante esta prueba piloto repercutió positivamente en el aprendizaje del tema. Ya que tanto en la clase, como en la charla, los alumnos reconocieron la importancia y la ventaja de usar software específico para poder generar los fractales, y evidenciaron que esta actividad se pudo realizar porque en nuestra facultad se cuenta con un laboratorio multidisciplinar equipado adecuadamente.

A futuro se pretende desarrollar otros temas de la asignatura en el Laboratorio, y extender la experiencia a cursos de otras especialidades de ingeniería dentro de nuestra Facultad con el objetivo de generar capacidades básicas en el área de Matemática.

Esta experiencia es un nexo entre las disciplinas del Ciclo Básico universitario con las asignaturas de tecnologías básicas y aplicadas, y permite dotar a los estudiantes de un carácter autónomo para realizar las tareas requeridas y aprender nuevos conocimientos, además de crear un cúmulo de actividades para abordar situaciones problemáticas relacionadas con el quehacer ingenieril.

Referencias

1. Sessa, C.: Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: Orígenes y perspectivas. Libros del Zorzal. pp. 65–75 (2005).
2. Lucarelli, E.: Didáctica universitaria: ¿un asunto de interés para la universidad actual? *Revista Perspectiva*, pp. 418–420 (2011).
3. Posada Álvarez, R.: Formación Superior Basada en Competencias, Interdisciplinariedad y Trabajo Autónomo del Estudiante, *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(1), pp. 1-33 (2004).
4. Rosen, M.: Engineering Education: Future Trends and Advances, *proceedings of the 6th. International Conference on Engineering Education* (6th. WSEAS), pp.44-52 (2009).
5. Raichman, S.; Sabulsky, G.; Totter, E. (Coords), Orta, M.; Verdejo, P.: Estrategias para el desarrollo de innovaciones educativas basadas en la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación. En: Estrategias para el uso de tecnologías de información y comunicación en los procesos de aprendizaje, Innova Cesal, México, pp. 19-34 (2013).
6. Nakos, G.; Joyner, D: Álgebra lineal con aplicaciones, International Thomson, pp. 365-369 (1999).
7. Kolman, B.; Hill, D.: Álgebra lineal con aplicaciones y MATLAB, Pearson Addison-Wesley, pp. 520-536 (2006).
8. Zhu, Z.; Dong, E.:Simulation of Sierpinski-type fractals and their geometric constructions in Matlab environment .*Proceedings of WSEAS Transactions on Mathematics*, pp. 327-333 (2013).
9. Murillo, F.; Román, M.; Hernández Castilla, R.: Evaluación Educativa, *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, Vol. 4, Nº 1, pp. 7-23 (2011)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Modelización Computacional de un Sistema de Flujo de Fluido en la Enseñanza de Matemática Superior

Eduardo A. Gago[1], Marcelo M. Zurbriggen[1], Matías F. Romero[1]
[1] Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario
Zeballos 1341
eagago@gmail.com, marcelozurb@gmail.com, mati_rom@hotmail.com

Resumen. De acuerdo con la línea de innovación educativa en Ingeniería se trabaja sobre nuevos paradigmas de enseñanza con la intención de lograr, un mayor desarrollo de capacidades intelectuales, adquisición de destrezas, sustitución de técnicas obsoletas por medios más eficientes y rápidos, y una mejor integración de conocimientos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En función de esto, y con la inclusión de los recursos computacionales, se ha implementado la utilización de nuevas metodologías pedagógicas y diversas estrategias didácticas, apuntando al trabajo multidisciplinar en el desarrollo del tema Transformada de Laplace correspondiente a la asignatura Cálculo Avanzado en la carrera Ingeniería Mecánica. La propuesta didáctica que se presenta corresponde a sistemas relacionados con la circulación del flujo de un fluido, donde los conceptos involucrados en los modelos son abordados analítica y gráficamente dándole sentido a los contenidos curriculares, facilitando la interpretación y conceptualización de la teoría.

Palabras Clave: Modelización, Multidisciplina, Simulación, Transformada de Laplace.

1 Introducción

Los entornos computacionales han cambiado los procesos de enseñanza y aprendizaje en la enseñanza universitaria en el ámbito de las carreras de Ingeniería, influyendo directamente en la conceptualización y en la forma de interactuar con la resolución de los problemas, enriqueciendo dichos procesos al imprimir un carácter multidisciplinar e integral a la resolución de los mismos.

El vertiginoso avance de los medios tecnológicos y la inserción de las herramientas digitales condicionan el desempeño académico de los docentes en el entorno de la Educación universitaria. Bajo esta realidad, los profesores deben realizar cambios continuos y permanentes en las formas de enseñanza y además, deben influir en la elección de los contenidos curriculares. El diseño de las estrategias de aprendizaje debe ser acordes a las oportunidades que brindan los sistemas computacionales en creciente desarrollo y vasta disponibilidad.

El curriculum de las asignaturas de Cálculo en Ingeniería debe adoptar una plataforma de gestión de contenidos que brinden la posibilidad de comunicación entre disciplinas y además establezcan una conexión que propicie el desarrollo de los mismos. Las prácticas curriculares deben incluir aspectos multidisciplinarios, enfatizando los puntos de vista de los sistemas e introducir problemas de ingeniería, principios y soluciones desde muy temprano en la enseñanza. Es necesario vincular los cursos horizontales y verticales y los problemas de ingeniería [1].

Los nuevos avances en la tecnología aportan muchas potencialidades para ser usadas en el entrenamiento matemático de los estudiantes en carreras de ingeniería. Es menester del docente distinguir cuáles son las capacidades básicas de los alumnos que resultan indispensables para abordar el análisis y resolución de modelos sencillos donde se desarrollen estrategias de aprendizaje apropiadas para conectar e integrar la matemática computacional con

las tecnologías básicas y aplicadas en Ingeniería.

La modelización de sistemas reales determina que los objetos matemáticos tratados en el aula deben adaptarse a los procesos de aprendizaje y al nivel de los alumnos al que se dirige la enseñanza. Es por esta razón que se hace necesario adecuar las tareas propuestas en la clase en situaciones tangibles de aprendizaje.

Es necesario tener presente en todo momento que los temas del curriculum que se desarrollan en las clases de Matemática Superior, se van a utilizar posteriormente en el ciclo de tecnologías aplicadas de la carrera y en la futura vida profesional [2].

Estos temas suelen presentar dificultades asociadas a la complejidad de las estructuras matemáticas que se pretende enseñar. Por eso es necesario desarrollar actividades que estén sustentadas en recursos didácticos y pedagógicos utilizando los medios que proveen las herramientas del Cálculo simbólico, numérico y gráfico.

En este trabajo se presenta una experiencia realizada en la asignatura Cálculo Avanzado de la carrera Ingeniería Mecánica, en la Facultad Regional Rosario de la Universidad Tecnológica Nacional, donde se modelizan problemas en referencia a un sistema de flujo de fluido cuando se quiere tratar el tema Transformada de Laplace.

Se propone una metodología de trabajo que concede igual relevancia tanto a los contenidos de Matemática que se pretenden enseñar, como a las competencias que se intenta que el alumno alcance, para lograr un aprendizaje significativo y funcional con aplicación de software específico.

Todas las clases de Cálculo Avanzado se desarrollan en el Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas, un ámbito dentro de la Facultad equipado con 25 computadoras con conectividad a Internet.

2 Criterios Metodológicos

El aprendizaje basado en la presentación de modelos relacionados con el quehacer ingenieril es una metodología que permite a los alumnos adquirir conocimientos y capacidades básicas claves o competencias, mediante la elaboración de propuestas que dan respuesta a problemas de la especialidad.

La enseñanza de Matemática mediante la modelización de sistemas dinámicos sencillos colabora para que el estudiante se involucre responsablemente en los temas del curriculum, esta situación permite lograr autonomía en el aprendizaje y así facilitar la incorporación de conceptos de manera significativa, además de prepararse para su desempeño profesional [2].

Los alumnos trabajan en forma independiente por lo que desarrollan autonomía y responsabilidad, ya que son ellos, con la supervisión y sugerencias de los docentes, los encargados de planificar, estructurar el trabajo y elaborar los resultados para resolver las cuestiones planteadas. La labor de los docentes en esta forma de implementar la enseñanza se circunscribe a ser guía, facilitador de los procesos de enseñanza y aprendizaje y de brindar contención a lo largo de la experiencia. Dadas las peculiaridades tecnológicas de la modalidad educativa es indispensable que el profesor convierta el escenario en su ambiente de aprendizaje, es decir, que además de construir habilidades con el manejo de la tecnología logre desenvolverse con naturalidad en los diferentes espacios [3].

En esta propuesta metodológica se presentan el contenido matemático basándose en la búsqueda de modelos que simulen la situación que se quiere formular o la situación técnica en términos matemáticos, para lo cual se presenta una situación simplificada, se traduce dicha situación en terminología matemática, y se trabaja con dicho modelo.

Se estimula el interés por el descubrimiento y la búsqueda de nuevos conocimientos en la utilización de los aspectos formativos de la Matemática, relacionados con otras áreas de conocimiento y con otras disciplinas.

Formar un profesional idóneo requiere articular el plan de la carrera para alcanzar las competencias profesionales, seleccionar los contenidos y actividades acordes a dichas competencias; como así también las políticas y gestión que deben acompañar la evaluación y construcción curricular [1], [2].

Se trata de crear un ámbito de trabajo donde el alumno pueda ser reflexivo, crítico, tome decisiones y también delimite los errores cometidos en el proceso, esto provoca la necesidad de conocer el objeto de estudio y crear las condiciones internas para la asimilación, en forma activa e independiente de los nuevos conocimientos.

La clase se realiza en el Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas de nuestra Universidad equipado con 25 computadoras con conectividad a internet y la disponibilidad de software específico. En esta experiencia de modelado matemático los alumnos interactúan con el programa Mathematica y contrastan el modelo presentado con la plataforma de simulación LabVIEW.

El diseño metodológico propuesto transita los siguientes aspectos: generación de un espacio para capacitar en cálculo simbólico, numérico y gráfico, integración de las disciplinas básicas con un enfoque multidisciplinar, com-

plementación de contenidos para la utilización de métodos analíticos y simulados en la reproducción y análisis del comportamiento de dos sistemas reales sencillos.

3 Objetivos

Las acciones que se implementan para desarrollar las actividades programadas tienen como objetivo realizar experiencias donde los alumnos practican un trabajo autogestionado y colaborativo con el propósito de internalizar los conceptos del tema mediante el diseño de una situación ingenieril que estudia temas de la currícula de Cálculo Avanzado aprovechando los recursos que suministran las plataformas de simulación.

La clase se desarrolla en torno a la presentación de un problema motivador que involucra un modelo físico fomentando como paradigma la interdisciplina. Para tal fin, se orienta a los alumnos con una guía de trabajo que incluye preguntas y que permiten monitorear la experiencia y observar el desarrollo de las actividades programadas.

La enseñanza de Matemática superior en ingeniería debe encontrar el equilibrio adecuado entre la formulación de modelos matemáticos, y las destrezas que apliquen los estudiantes para resolver los desafíos que se plantean en ciclo de tecnologías aplicadas y en su actividad profesional futura.

Se procura mostrar donde se utilizan los temas teóricos desarrollados en la asignatura poniendo énfasis en la simulación y visualización de los sistemas en estudio. Se pretende con la experiencia convertir la clase en un aula taller donde el alumno experimente un aprendizaje generado por técnicas de interacción entre el docente como sujeto pasivo y el alumno como un sujeto activo del conocimiento [4].

Las competencias profesionales en un marco institucional de nivel educativo superior se concretan mediante proceso que permite formar profesionales competentes, no solo por los conocimientos y las habilidades para desempeñar sus funciones profesionales y laborales, sino también por su proceso de desarrollo personal y social.

Es muy importante orientar la formación de los estudiantes de ingeniería para brindarles una capacitación que les permita desenvolverse de manera idónea en el mercado laboral, al respeto se advierte que mientras las competencias académicas giran principalmente alrededor de la teoría y la reflexión sobre el papel de la Ingeniería, las competencias laborales trabajan desde una perspectiva pragmática que demanda un desempeño eficaz [2].

La utilización de una herramienta de cálculo simbólico y la utilización de recursos informáticos conectan la Matemática y los modelos reales, y desarrollan una enseñanza basada en competencias al contribuir al desarrollo de las capacidades básicas de los alumnos.

4 Nuevos escenarios de aprendizaje

Los entornos interactivos y virtuales de aprendizaje se desarrollan en una atmósfera de construcción del conocimiento, desde una concepción actualizada. El laboratorio virtual juega un papel preponderante en este nuevo modelo de enseñanza y aprendizaje. La introducción de software en la educación dentro de los procesos de resolución de problemas influye en la secuencia de los pasos que se consideran y los criterios que se crean para dicha resolución.

Los recursos tecnológicos no se soslayan a herramientas operativas, se integran a un ambiente de aprendizaje y constituyen un nuevo escenario educativo, donde si bien no son el fin, tampoco son sólo el medio [3].

La educación basada en el análisis de modelos ingenieriles asistido por computadora permite desarrollar habilidades en los estudiantes debido a que promueven el pensamiento crítico, facilitando la interpretación y las limitaciones de la teoría, es decir, el estudio experimental prepara a los estudiantes para los desafíos profesionales donde estas herramientas juegan un papel esencial.

Las actividades que se diseñan incorporan diversas estrategias aplicadas a un sistema físico que involucran, dispositivos adecuados para construir y desarrollar habilidades en el tratamiento de sistemas ideales.

Las estrategias están diseñadas para desarrollar destrezas en los estudiantes tendientes a lograr un estilo de aprendizaje activo que favorece la capacidad para enfrentar situaciones complejas, que requieren descubrir soluciones, dar retroalimentación y definir los posibles comportamientos ante diferentes escenarios.

El modelado y la simulación requieren o implican un trabajo de formalización matemática, generalmente previo, pero esto no siempre es cierto, a veces la matematización se puede hacer más tarde como una verificación o

demostración de lo que se ha modelado o simulado [1].

Se presenta a continuación un modelo de flujo de fluido ideal que se analiza desde dos perspectivas diferentes. En la primera fase se recurre al modelado del sistema con resolución por métodos numéricos, y en la segunda etapa de la clase se utiliza una plataforma de simulación. Ambas experiencias permiten contrastar resultados y obtener interesantes conclusiones.

4.1 Flujo de fluido en dos tanques conectados en serie

Se propone estudiar un sistema de primer orden constituido por dos tanques interconectados en serie como se muestra en la Fig. 1. El interés en este tipo de sistema es formular un modelo que represente el caudal de salida de líquido en el tanque N° 2 en función del tiempo, cuando se aplica en la entrada del fluido en el tanque N° 1, una variación de tipo escalón unitario de $1\frac{m^3}{h}$ Las áreas de las secciones transversales para el primero y el segundo tanque son *2 m²* y *4 m²* y respectivamente, y las resistencias hidráulicas de ambos tanques son $0{,}5\frac{h}{m^2}$. .
Siendo: q_1 caudal de fluido que ingresa al tanque N° 1; q_2 caudal de fluido que ingresa al tanque N° 2 proveniente del tanque N° 1; q_3 caudal de fluido que sale del tanque N° 3; h_1 nivel alcanzado en el tanque N° 1, h_2 nivel alcanzado en el tanque N° 2; R_1 es la resistencia hidráulica del fluido al salir del tanque N° 1 y R_2 es la resistencia hidráulica del fluido al salir del tanque N° 1 [5].

De acuerdo a los datos suministrados, se orienta el trabajo de los alumnos por medio de las siguientes consignas:

a) ¿Cuál es el balance de energía del sistema de la Fig. 1?
b) ¿Cuál es el modelo que rige el caudal de fluido que abandona el tanque N°2 en relación al caudal de entrada en el tanque N°1?
c) ¿Cuáles son los diagramas de bloque que se pueden realizar representativos del sistema?
d) Realizar una gráfica que represente el modelo obtenido
e) De acuerdo a la ecuación que representa el sistema, y en concordancia con su gráfica ¿Cómo puede clasificar al sistema?

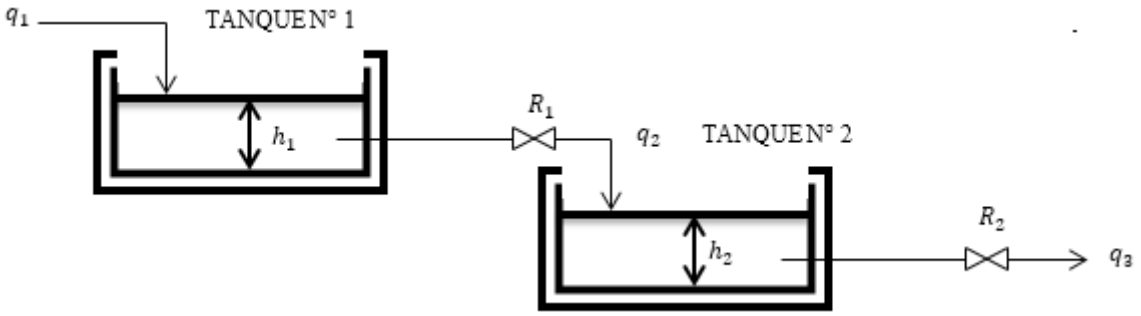


Fig. 1. Esquema del sistema en estudio.

Antes de comenzar a analizar el sistema la Fig. 1, los alumnos definen el parámetro resistencia hidráulica *R*, que relaciona la altura en un tanque respecto al caudal de salida, como se indica en la ecuación (1).

$$R = \frac{h}{q} \qquad \textbf{(1)}$$

También definen la constante de tiempo *T*, expresada en la ecuación (2), que es el producto entre la resistencia hidráulica y el área de la sección transversal en un tanque.

$$T = RA \qquad \textbf{(2)}$$

Luego realizan el balance de energía del sistema dinámico de la Fig. 1. En el tanque N° 1, el caudal neto es el producto del área de la sección transversal por la velocidad, el mismo está indicado en la ecuación (3)

$$q_1(t) - q_2(t) = A_1 \frac{dh_1}{dt} \quad \textbf{(3)}$$

Con las relaciones que establecieron en la ecuación (1) pueden determinar la velocidad en el tanque N°1 que se encuentra expresada por medio de la ecuación (4)

$$\frac{dh_1}{dt} = R_1 \frac{dq_2(t)}{dt} \quad \textbf{(4)}$$

Resultando el caudal neto para el tanque N° 1, el identificado por la ecuación diferencial de primer orden (5)

$$q_1(t) - q_2(t) = A_1 R_1 \frac{dq_2(t)}{dt} \quad \textbf{(5)}$$

Ahora si aplican un balance de energía similar para el tanque N° 2, el caudal neto en el tanque N° 2 es el expresado en la ecuación (6)

$$q_2(t) - q_3(t) = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad \textbf{(6)}$$

Según las relaciones que definieron, en la ecuación (7), se indica la velocidad del fluido en el tanque N°2

$$\frac{dh_2}{dt} = R_2 \frac{dq_3(t)}{dt} \quad \textbf{(7)}$$

Resultando la ecuación (8), ecuación diferencial de primer orden, que indica el caudal neto para el tanque N° 2, y que permite indagar respecto al flujo que sale finalmente del segundo tanque.

$$q_2(t) - q_3(t) = A_2 R_2 \frac{dq_3(t)}{dt} \quad \textbf{(8)}$$

Si $T_1 = A_1 R_1$ y $T_2 = A_2 R_2$ son las constantes de tiempo para los tanques N° 1 y N° 2 respectivamente, entonces las ecuaciones (9) y (10), expresadas según sus constantes de tiempo, son consecuencia de aplicar la Transformada de Laplace a las ecuaciones (5) y (8).

$$Q_1(s) - Q_2(s) = T_1 \, s \, Q_2(s) \quad \textbf{(9)}$$

$$Q_2(s) - Q_3(s) = T_2 s \, Q_3(s) \quad \textbf{(10)}$$

Siendo $Q_k(s) = \mathcal{L}[q_k(t)]$ donde $k \in N$ con $1 \leq k \leq 3$, y tal que el símbolo $\mathcal{L}$ indica la Transformada de Laplace [6].

De la ecuación (9) se puede obtener la relación entre los caudales de entrada y salida transformados del tanque N° 1, tal como se observa en la ecuación (11)

$$\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \textbf{(11)}$$

La ecuación (11) puede representarse mediante un diagrama de bloques como el que se indica en la Fig. 2.

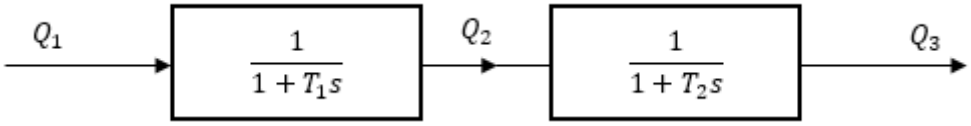


Fig. 2. Diagrama de bloques del sistema en etapas.

La ecuación (12) representa la relación transformada entre el caudal de entrada al tanque N° 2 y el caudal de salida del sistema.

$$\frac{Q_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{1+T_2 s} \quad \textbf{(12)}$$

Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (11) y (12) encuentran la relación entre el caudal de entrada al sistema por medio de la función escalón y el de salida expresada en la ecuación (13).

$$Q_3(s) = \frac{1}{1+T_1 s}\frac{1}{1+T_2 s} Q_1(s) \quad \textbf{(13)}$$

La ecuación (13) puede interpretarse como un diagrama de bloques en un solo paso tal como lo muestra la Fig. 3

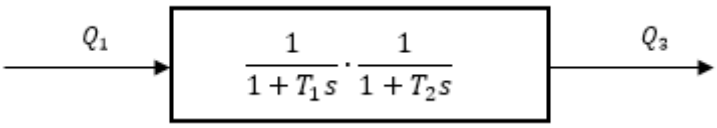


Fig. 3. Diagrama de bloque del sistema simplificado.

Pero como el caudal de ingreso es una función escalón unitario, entonces, $q_1(t) = 1\frac{m^3}{h}$, y su Transformada de Laplace es $Q_1(s) = \frac{1}{s}$. Lo que implica que la ecuación (13) pueda expresarse por medio de la ecuación (14)

$$Q_3(s) = \frac{1}{1+T_1 s}\frac{1}{1+T_2 s}\frac{1}{s} \quad \textbf{(14)}$$

Los alumnos aplican la Transformada inversa de Laplace a la ecuación (14) resultando la ecuación (15)

$$q_3(t) = q_1(t)\,[1 + \frac{1}{T_2 - T_1}\left(T_1\, e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2\, e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \quad \textbf{(15)}$$

Luego reemplazan los datos en la ecuación (15), resulta la ecuación (16), que responde al modelo solicitado

$$q_3(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-\frac{t}{2}} \quad \textbf{(16)}$$

Los alumnos realizan la gráfica de la Fig. 4 con el software MATHEMATICA que representa a la ecuación y que permite visualizar la relación entre el caudal de salida en el tanque N° 2 respecto del tiempo. Se observa en dicha gráfica que el caudal de salida crece hasta llegar a un valor límite determinado por la asíntota. Los alumnos reconocen por medio de la gráfica de la Fig. 4 tiene cierta semejanza con la respuesta de un sistema de primer orden, pero la pendiente de la recta tangente a la curva en el origen es cero.

Una vez obtenido el modelo reconocido por medio de la ecuación (16) y su correspondiente gráfica observada en la Fig. 4, se puede concluir que el sistema resulta de segundo orden y se dice que su comportamiento es hiperamortiguado o sobreamortiguado, como se evidencia en la ecuación (13).

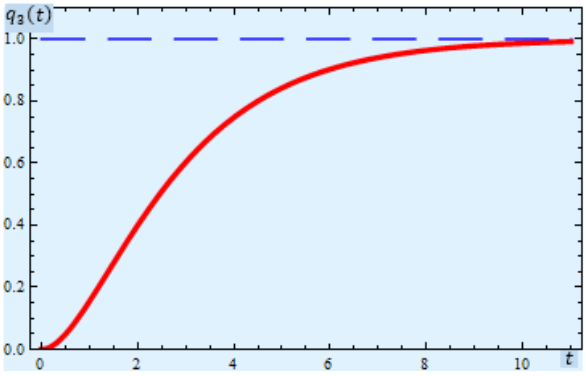


Fig. 4. Gráfica del modelado del sistema.

Los alumnos pueden construir la gráfica de la Fig. 4 porque tienen una formación previa en la utilización del software MATHEMATICA. En los cursos de primer año de Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica, y en segundo año en Análisis Matemático II, los alumnos realizan talleres de capacitación con este software. De acuerdo a las planificaciones de cátedra de dichas asignaturas los estudiantes deben realizar trabajos prácticos con el uso de herramientas computacionales (Res. 68/94 CSU UTN y posteriores).

4.2 Análisis del sistema de flujo de fluido con aplicación de LABVIEW

Continúan la experiencia implementando la plataforma de programación LABVIEW, que es un entorno de programación flexible. Aprovechando la potencialidad de los recursos tecnológicos, se realiza un cambio metodológico en la manera de tratar el sistema anterior, esta variación sigue los lineamientos de la Teoría de Control de procesos, tendiente a integrar los conocimientos e introducir un entorno gráfico de programación que facilite el análisis de la dinámica del sistema.

Dentro de la asignatura se implementa un taller extracurricular del uso de la plataforma LABVIEW. Este taller, a cargo de uno de los auxiliares de docencia, tiene como objetivo dotar de una capacitación básica en el uso de la plataforma, para que los alumnos puedan corroborar los resultados del problema que se resuelven en la clase.

Debido a la complejidad en la manipulación de esta plataforma, en esta parte de la clase los estudiantes reciben la colaboración de los auxiliares de docencia. Si bien los profesores prestan asistencia continua se presentan dificultades que se ven atenuadas con las explicaciones dadas.

LabVIEW es el acrónimo de Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench, es una plataforma y entorno de desarrollo para diseñar sistemas, con un lenguaje de programación visual gráfico pensado para sistemas hardware y software de pruebas, control y diseño, simulado o real y embebido [7].

El trabajo propuesto es actuar sobre las posibilidades de mejora en el análisis del prototipo, aplicando el toolkit VI (Instrumentos virtuales) que genera LABVIEW mediante un entorno gráfico de programación. Estos VI sirven para realizar simulaciones, efectuar cálculos, plantear y resolver ejemplos, modelar sistemas y además, posibilita concluir un análisis en tiempo real que brinda el entorno de programación.

La estructura del software, junto con la posibilidad de modificar los parámetros estudiados mediante los controles del Panel Frontal, mientras el VI se ejecuta, son características que lo diferencian de los demás software de simulación. Se destacan también la potencialidad de sus módulos y su lenguaje denominado G, totalmente gráfico, que permite el desarrollo muy rápido de la simulación sin un conocimiento intensivo de la programación [7].

La gráfica que el programa muestra para el caso de la simulación del sistema de flujo de fluido en un proceso de circulación del fluido es la que se visualiza en la Fig. 5, donde se observa el Panel Frontal del programa que representa la interfaz con la cual interactúa el usuario, cuando el programa se está ejecutando.

En esta interfaz figuran los controles (usados como entradas, pueden ser botones, marcadores etc.) e indicadores (usados como salidas, pueden ser gráficas, indicadores numéricos, etc.). Esto permite a los alumnos controlar el programa de manera intuitiva a medida que realizan su trabajo.

A la derecha del panel frontal se puede visualizar el diagrama de Bode, donde se observan los polos del sistema graficados con dos cruces de color rojo. Mediante la aplicación de la plataforma de simulación verifican que la aproximación del modelo matemático responde a un sistema hiperamortiguado, con dos polos.

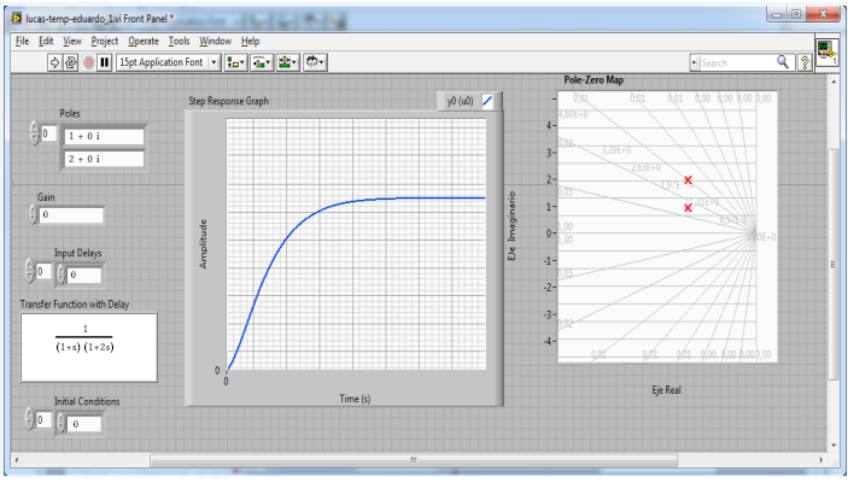


Fig. 5. Panel frontal.

En la Fig. 6 se muestra la programación del diagrama de bloques para el sistema en estudio. Esta pantalla representa el armado de la estructura del diagrama de flujo que van a realizar las distintas variables del programa, es en sí, el programa propiamente dicho. Aquí se define su funcionalidad, se colocan objetos virtuales que realizan una determinada función y se interconectan con el código fuente que controla el programa.

En el diseño del diagrama de flujo de la Fig. 6 trabajan mancomunadamente alumnos y docentes, ya que esta etapa del trabajo les genera a los alumnos muchos inconvenientes. El resultado de este trabajo es que los alumnos aprendan no sólo a construir un diagrama en bloques de un sistema sencillo, sino que se familiaricen con las nuevas tecnologías.

Las Fig. 5 y 6 muestran los resultados que se obtienen en la experiencia que posibilitan contrastar los resultados que se observan en la Fig. 4.

Entre los objetivos del programa están el reducir el tiempo de desarrollo de aplicaciones de todo tipo (no solo en ámbitos de Pruebas, Control y Diseño) y el permitir la entrada a la informática a profesionales de cualquier otro campo. LabVIEW consigue combinarse con todo tipo de software y hardware, tanto del propio fabricante -tarjetas de adquisición de datos, PAC, Visión, instrumentos y otro Hardware- como de otros fabricantes.

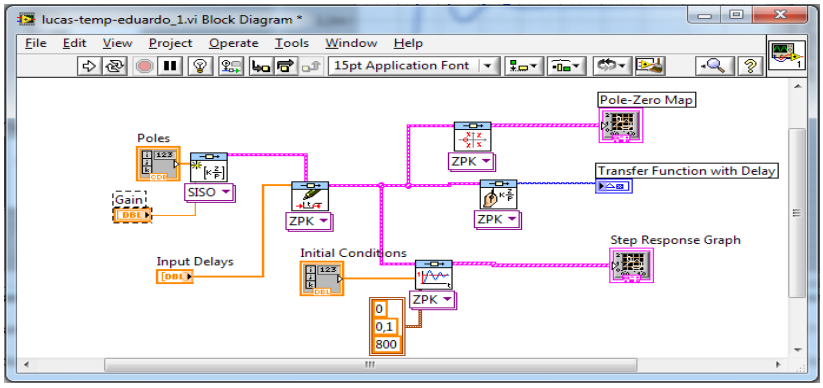


Fig. 6. Diagrama de bloques.

Es en esta etapa se tiene la posibilidad de modificar parámetros mediante los controles del Panel Frontal mientras el VI se ejecuta son características que lo diferencia de los demás software de simulación.

5 Conclusiones y trabajos futuros

La forma más efectiva de enfrentar los desafíos metodológicos de la enseñanza de Matemática superior en Ingeniería, es diseñar un mapa curricular que considere el carácter multidisciplinar en la enseñanza.
La experiencia desarrollada se enriquece al convertir el aula tradicional en un taller - laboratorio en el cual el estudiante integra los conocimientos de la Transformada de Laplace enfrentándose con modelos dinámicos aplicados a modelos reales.

El ambiente de aprendizaje generado logra una motivación que muestra la interconexión entre la Matemática computacional y las aplicaciones físicas. Aplicar este tipo de experiencias y adoptarlas como metodología de enseñanza de la Matemática influye en la adquisición de destrezas por partes de los estudiantes en un intento de reproducir el ambiente laboral del ingeniero.

El saber hacer, es una capacidad básica de todo profesional y debe fomentarse durante los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Mediante la utilización de entornos virtuales, como medio para facilitar la incorporación de conocimientos y mejorar la eficiencia de la educación, se facilitan los procesos de adquisición de capacidades a través del desarrollo de un lenguaje apropiado; mediante trabajos colaborativos para resolver situaciones problemáticas de magnitud y complejidad donde la tarea investigativa es central, respetando los ritmos de aprendizaje y propiciando ambientes en equipo y con participación activa del estudiante.

Referencias

1. Tinnirello, A.; Gago, E.; D'Alessandro, L: La Emergencia de la Matemática Computacional en Ingeniería: Proyectos Integradores en Cálculo Avanzado en Ingeniería Mecánica. *Proceedings del IV Congreso Argentino de Ingeniería - X Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería* (IV CADI- X CAEDI), pp. 1331-1342 (2018)
2. Gago, E.; D'Alessandro, L.; Zurbriggen, M.: Computational Engineering: Mathematical Models in Heat Flow Dynamics Study. *Proceedings of WSEAS. Design, Construction*, Vol. 2, N° 23, pp. 173-179 (2022)
3. Montiel Espinosa, G: Hacia el rediseño del discurso: Formación Docente en Línea Centrada en la Resignificación de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), Vol. 13, Nº 4, pp.69-84 (2010)
4. Sumithra, K.; Dharani, A.; Vijayalakshmi, M.: Transformation in Engineering Education: An Analysis of Challenges and Learning Outcomes. *Proceedings of the 14th International Conference on Education and Educational Technology*, pp. 33-36 (2015)
5. Ogata, K.: Ingeniería de Control Moderna. Pearson Education, pp. 78-192 (2010)
6. James, G: Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Pretince Hall, pp. 97-202 (2002)
7. Lajara, S.; Pelegrí, V.: LABVIEW: Entorno grafico de programación. Marcombo. p. 175-185 (2011)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Colaboración docente y educación remota de emergencia: una oportunidad para repensar la necesidad de la formación continua y el trabajo interdisciplinario

Javier Smidt[1], María de las Mercedes Trípoli[2]
[1] SENyT, Departamento de Electrotecnia; Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Avenida 1 y 47
javier.smidt@ing.unlp.edu.ar
[2] IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Avenida 1 y 47
mercedes.tripoli@ing.unlp.edu.ar

Resumen. Debido al cierre forzoso de los centros educativos ocurrido en marzo de 2020, los docentes universitarios debimos improvisar para poder afrontar, de la mejor manera posible, los desafíos con los que nos encontramos al pasar de una enseñanza totalmente presencial a una virtual. Durante el transcurso de estos dos años anteriores, son muchos los docentes que han relatado sus experiencias en diversos tipos de encuentros. En este trabajo, también nos proponemos describir nuestra experiencia, pero poniendo énfasis en cómo el trabajo colaborativo entre docentes nos permitió 'transitar por las aulas' de una manera un poco más amena y no tan solitaria. Asimismo, considerando la necesidad de que los docentes contemos con más conocimiento que el disciplinar, se concluye que el trabajo en colaboración entre docentes de distintas disciplinas, podría ser uno de los caminos a seguir para mejorar nuestras propias prácticas en pos de impactar en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras Clave: Educación remota de emergencia, Matemática e ingeniería, Trabajo en colaboración, Formación docente

1 Introducción

Los autores de este trabajo somos profesores de Matemática A, materia del primer semestre de los planes de estudio de todas las carreras que se dictan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). En marzo de 2020 se produjo un gran cambio en nuestra manera de trabajar, pero no por propia elección sino por el Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio decretado en nuestro país debido a la pandemia que el mundo estaba atravesando. Ya habían transcurrido dos semanas desde el inicio de las clases y de golpe debimos adaptarnos en forma vertiginosa a una nueva modalidad de enseñanza.

A la semana de comenzar las clases, ya se escuchaban "rumores" sobre la posibilidad del cierre de algunas actividades en todo el país, siendo la educación de todos los niveles una de tales actividades. Esos rumores se concretaron y el día domingo 15 de marzo la UNLP dispuso el cierre de todas sus dependencias (Resolución UNLP 667), ratificando el calendario académico y garantizando la continuidad pedagógica.

En este contexto nos enfrentamos a muchos desafíos, entre los que sobresalían dos grandes preocupaciones: mantener el cronograma de actividades y los contenidos de la asignatura y, sobre todo, no perder el contacto cotidiano con los alumnos. Pero para lograr eso afrontamos un desafío mayor: ¿cómo?, ¿con qué herramientas?, ¿de qué

manera? Y es así que nos embarcamos en lo que algunos autores llamaron Educación Remota de Emergencia, una enseñanza que conjuga características de las distintas modalidades de educación a distancia, en línea, virtual, entre otras denominaciones [1].

El propósito de este escrito es resaltar la importancia del trabajo colaborativo entre docentes realizado en la migración forzosa de la presencialidad a la virtualidad en la enseñanza, en el contexto de la pandemia debido al COVID19. Creemos importante destacar que el trabajo realizado no fue planificado como lo es una propuesta de educación a distancia, sino que surgió en la necesidad de acompañarse, de escuchar, de preguntar. Como mencionan Pedragosa y Barranquero [2], debimos en muy poco tiempo reconfigurar las prácticas docentes con muy poca experiencia en la modalidad a distancia. No hubo tiempo de realizar una reflexión sobre el uso de las tecnologías en la enseñanza. Pero el hecho de mantener un continuo diálogo con varios colegas permitió buscar alternativas posibles y necesarias para afrontar la nueva modalidad. Así, en este trabajo, se ponen en relación dos temas, colaboración entre docentes y enseñanza remota de emergencia, vinculando los mismos con el tipo de conocimientos que necesitan los docentes para ejercer su rol.

Comenzamos contextualizando en qué condiciones realizamos nuestra tarea educativa durante el período de enseñanza remota de emergencia; seguimos mencionando algunas características propias de la colaboración entre docentes para luego describir algunas de las acciones llevadas a cabo en las dos comisiones de la asignatura en la cual somos profesores. Para terminar, hacemos una discusión sobre cómo los diversos tipos de conocimientos por parte de los docentes se van ampliando cada vez más, y cómo el trabajo colaborativo entre los docentes, conformando equipos de trabajo con profesionales de distintas disciplinas que sean parte del plantel docente de las cátedras, puede ser una posibilidad que impacte en forma significativa en el aprendizaje de nuestros estudiantes, resignificando de esta manera el trabajo interdisciplinario.

2 Enseñanza remota de emergencia

Como ya es sabido por todos, debido al cierre forzoso de los centros educativos ocurrido en marzo de 2020, los docentes debimos pasar de un tipo de enseñanza totalmente presencial a una enseñanza en línea o virtual para poder garantizar la continuidad pedagógica tan mencionada y requerida en el contexto de la pandemia. Se han realizado varias jornadas, encuentros y congresos (virtuales) en los cuales los docentes de diferentes niveles han relatado su experiencia y han reflexionado sobre ella, ya sea al inicio de la cuarentena como a lo largo de estos dos años anteriores. En este trabajo también nos proponemos describir nuestra experiencia pero poniendo énfasis en cómo el trabajo colaborativo entre docentes permitió 'transitar por las aulas' de una manera un poco más amena y no tan solitaria.

La mayoría de los docentes hemos nombrado a la forma de trabajo con la cual hemos podido continuar con las clases como "enseñanza en línea o virtual", simplemente por haber desarrollado las mismas a través de internet, siendo indispensable contar para ello con conexión a esta red, ya sea domiciliaria o móvil, y con distintos dispositivos como PC, notebook, tablets, celulares, entre otros. Y siendo el intermediario distintas plataformas educativas, como Classroom o Moodle; diversas aplicaciones para realizar videollamadas como Meet, Zoom, Webex, BBB, Jitsi y hasta Whatsapp; y distintas herramientas como videos, presentaciones en Power Point, drive compartidos, tabletas gráficas, por nombrar algunas pocas de todo lo que ha circulado durante esta etapa. Como menciona Mayén [3], internet fue la herramienta más idónea para continuar con el desarrollo de las actividades, en donde en cuestión de días, docentes y alumnos quedamos anclados a un entorno digital improvisado.

Si consideramos la definición de educación en línea propuesta por Herrera Ordoñez y Herrera López [4]: "proceso mediante el cual se construyen ambientes virtuales educativos para proveer información, que es analizada, procesada y apropiada por estudiantes activos, sin necesidad de asistir a un espacio físico. La información es recibida mediante herramientas que son utilizadas por los docentes, las cuales se encuentran situadas en la web", podemos decir que la enseñanza en línea se apoya en las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), porque utiliza las herramientas que ofrece internet y las nuevas tecnologías para proporcionar ambientes educativos adecuados [5]. Entonces, estamos tentados a considerar que realizamos educación en línea ya que diseñamos materiales, elegimos cuál estrategia utilizamos en los distintos momentos, hicimos labor informática, por mencionar algunas de las acciones llevadas a cabo [5]. Sin embargo, hay algunas características de este tipo de educación que, aunque no estén explícitas en la definición, se desprenden de ella: se necesita una planificación, un diseño de materiales específicos (donde están involucrados pedagogos, diseñadores, entre otros), se tiene una evaluación planeada, tiempos precisos y asignados que los alumnos conocen de antemano [6]; es un proceso complejo que re-

quiere un diseño y desarrollo curricular muy detallado [7]. Sin profundizar mucho más, a pesar de haber trabajado "en línea", concluimos que lo que hicimos no fue educación en línea.

El tipo de enseñanza que implementamos en este período, fue una "enseñanza remota de emergencia" [1], contando de esta manera con un nombre propio para lo que hemos estado haciendo. Hodges y otros [1] afirman que una buena planificación para la educación en línea lleva entre seis y nueve meses previos a comenzar el curso diseñado y los docentes suelen sentirse cómodos recién la segunda o tercera vez que dictan el curso en línea. Esto da cuenta de la importancia de darle un nombre propio a la enseñanza que hemos brindado y sirve para resaltar que los cursos desarrollados de esta manera son parte de una solución temporal a un problema inmediato. Siguiendo a Rodríguez Morúa [6], la educación de emergencia es la que construyeron los alumnos y los docentes con sus propios recursos, donde la principal responsabilidad cayó en el docente afrontando la situación con recursos personales para seguir trabajando.

Los desafíos que enfrentamos los docentes en esta educación remota de emergencia fueron varios y diversos y Vera [7] los resume en la manera que transcribimos en la Tabla 1.

Tabla 1. Desafíos enfrentados por docentes durante la educación remota de emergencia. Tabla extraída de Vera [7].

Desafío	Descripción
Adaptabilidad	Capacidad de adaptarse a la educación remota de emergencia y tomar decisiones.
Competencias digitales	Materialización de habilidades relacionadas con la información y alfabetización informacional, comunicación y colaboración, curación y creación de contenidos, seguridad y resolución de problemas.
Metodologías activas	Manejo de diversas metodologías activas (aprendizaje basado en proyectos, aprendizaje basado en problemas, estudio de caso, juego de roles, etc.).
Relacionamiento	Habilidades interpersonales para relacionarse con otros en espacios virtuales.
Flexibilización curricular	Capacidad de ajustar el currículo a las circunstancias, independientemente de la planificación, integrando ambientes sincrónicos y asincrónicos.
Trabajo colaborativo	Capacidad para trabajar con diversos colegas desde un enfoque inter, multi y transdisciplinar.

Todos los desafíos mencionados fueron importantes y tomaron distintas dimensiones de acuerdo a las distintas realidades contextuales de los docentes, personales en cuanto a dinámica familiar, manejo de dispositivos electrónicos, conocimiento de metodologías de aprendizaje, conocimiento de TIC, contexto institucional, por mencionar algunos. De todos los referidos por el autor, nos interesa enfocarnos en el último de ellos, el del trabajo colaborativo, que en nuestro caso, más que un desafío fue una necesidad para afrontar la realidad que nos estaba atravesando, fue un salvoconducto que nos permitió sobrellevar la situación de una mejor manera desde muchos aspectos, fue uno de los pilares en la construcción de esta educación remota de emergencia.

3 Colaboración entre docentes

De acuerdo a Barrios [8], "trabajar en equipo significa trabajar en conjunto donde todos los miembros participen activamente de la propuesta pedagógica, aporten ideas, propongan actividades y herramientas para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje, donde sea necesario analizar, reflexionar y discutir colectivamente sobre los diferentes elementos…". Montero Mesa [9], menciona que, a pesar de que los términos cooperación, colaboración, participación, trabajo en equipo, están relacionados con diferentes perspectivas teóricas, son utilizados como sinónimos. Y al buscar los significados de estas palabras, todas se refieren a la idea de trabajar junto a otros, de esfuerzo común en pro de alguna meta, de apoyo y ayuda. No es nuestro propósito profundizar en dichas perspectivas ni

en analizar la utilización del término más apropiado, pues lo que nos interesa es justamente resaltar el hecho de trabajar con otros en pro de apoyo y ayuda, idea que está de acuerdo a la autora, implícita en todos los términos. Utilizaremos colaboración y trabajo en equipo en forma indistinta.

Hay diferentes maneras de trabajar en forma colaborativa entre docentes, depende de cómo esté organizada una cátedra, por ejemplo. Hay un trabajo en equipo (o no) en el interior de una comisión en donde interactúan profesor, jefe de trabajos prácticos y ayudantes; puede haber colaboración entre profesores de una misma cátedra, o entre los ayudantes; y hasta colaboración entre docentes de distintas áreas. En este trabajo en particular, nos centramos en el trabajo colaborativo realizado entre profesores de una misma materia, que están a cargo de dos comisiones distintas y que tienen la particularidad de contar con la misma docente en el rol de jefe de trabajos prácticos. La colaboración nació de manera espontánea y voluntaria, por la necesidad de ver qué estrategias o metodologías de trabajo realizaba el otro, qué herramientas utilizaba para comunicarse tanto con los docentes de su propia comisión como con los estudiantes, si los alumnos participaban, si se conectaban, y hasta cómo se sentía a nivel personal. Las conversaciones y reflexiones, la mayor parte de las veces, compartidas también con la Jefe de Trabajos Prácticos.

Algunos beneficios que se obtienen al trabajar de forma colaborativa, que menciona Montoya [10] citando a Hargreaves, y que compartimos, son: se tiende a superar los fracasos y frustraciones que podrían impedir las mejoras educativas; se comparten las cargas y presiones que se derivan de unas demandas de trabajo intensificadas; reduce la incertidumbre y limita los sentimientos excesivos de culpa; el diálogo y la acción constituyen una fuente de retroalimentación que incita a reflexionar sobre su práctica; la cooperación aúna los conocimientos, pericias y capacidades de los docentes; aumenta las oportunidades de los docentes para aprender unos de otros; y además, la cooperación estimula al docente para que considere el cambio como un proceso de perfeccionamiento continuo.

Asimismo, considerando que poseer dominio del conocimiento disciplinar de la asignatura que se enseña, generalmente no alcanza para saber cómo enseñar ese conocimiento, o no alcanza para que los estudiantes logren comprenderlo; es necesario que los docentes contemos con otros tipos de conocimientos como los son el pedagógico, didáctico y tecnológico, y el trabajo en equipo pudo de alguna manera reemplazar el hecho de no contar con dichos conocimientos. Es una realidad que la mayoría de los docentes universitarios tienen dominio disciplinar pero no cuentan con otro tipo de conocimiento, y este hecho fue más notorio cuando repentinamente hubo que buscar otras formas de enseñar. No desconocemos, sin embargo, que la experiencia de muchos años siendo docentes también es un conocimiento que posibilita la búsqueda e implementación de diversas estrategias, pero consideramos que no alcanza con ello. “Sólo cuando la práctica va acompañada de formación y de revisión (algunos prefieren hablar de “reflexión”) es cuando se hace posible el conocer cada vez más a fondo los entresijos del aprendizaje de los alumnos y el ajustar mejor nuestro trabajo docente a las condiciones y propósitos de la formación” [11].

4 Acciones implementadas

4.1 Estructura general de la materia (pre pandemia)

Matemática A es una materia semestral que pertenece al primer semestre de los Planes de Estudio de todas las carreras que se dictan en la Facultad, con una carga horaria semanal de 12 horas. Esta materia cuenta con una coordinación central a cargo de una Profesora Titular que, además de manejar los temas administrativos, se encarga de la confección de exámenes y del material de estudio, entre otras tareas inherentes a dicha función. Los alumnos se distribuyen en diversas comisiones con el objetivo de llevar a cabo una metodología de trabajo teórico práctica. Para ello la cátedra cuenta con un material de estudio que es central en el aula y organiza las actividades diarias. Asimismo, las aulas son planas y están equipadas con mesas que favorecen el trabajo grupal y colaborativo entre los estudiantes.

En cuanto a la dinámica de clase la forma de trabajo que llevamos a cabo en las comisiones a cargo de los autores, generalmente es que los estudiantes comienzan con la lectura del tema correspondiente y los docentes (que somos 3 o 4 en simultáneo) colaboramos en el proceso que van llevando a cabo los alumnos, manteniendo una interacción constante con los estudiantes en las diferentes mesas. A su vez, vamos haciendo intervenciones generales para todos los estudiantes (en el pizarrón), ya sea con la resolución de algún ejercicio o con alguna explicación orientada a fundamentar de manera teórica los conceptos involucrados. Solemos, hacia el final de la clase, realizar una puesta en común, haciendo un repaso de los conceptos relacionados al tema del día, promoviendo una participación activa por parte de los estudiantes. La finalidad es hacer una puesta en común de las ideas y conceptos trabajados en clase, tomando como disparador las dificultades observadas al recorrer las mesas. De acuerdo a las

características del grupo, y al tiempo de que se disponga, presentamos otras propuestas que no están en el material.

En cuanto a los contenidos de la materia, cuyo eje conceptual es la diferenciación en una y varias variables, se dividen en dos módulos, y para acreditar la materia, los estudiantes deben rendir y aprobar dos parciales, uno correspondiente a cada uno de dichos módulos. Cada parcial tiene su recuperatorio y existe una instancia llamada flotante, que la pueden utilizar aquellos estudiantes que aprobaron alguno de los dos módulos. Los exámenes los rinden todos los alumnos en forma simultánea (son 18 comisiones en la actualidad con distintos alumnos y distintos equipos docentes) y los profesores responsables de cada comisión no formamos parte de la confección de tales exámenes.

De acuerdo a las características mencionadas y con el objetivo de comprender parte de los desafíos afrontados en el paso a la virtualidad, creemos necesario remarcar aquellos aspectos que consideramos claves del proceso educativo usual de la materia, para este nuevo contexto: la disciplina en sí misma, el trabajo grupal y la discusión entre pares, la interacción permanente y durante tiempos prolongados con los docentes, y el uso del apunte de cátedra construido con estas ideas de base.

Pasamos entonces a relatar nuestra experiencia de adaptación a la educación remota de emergencia mediante la colaboración entre docentes. Elegimos describir dos momentos particulares: el primer semestre de 2020, cuando se realizó la transición, y el primer semestre de 2021, en el que el curso fue planificado ya de forma enteramente virtual.

4.2 Primer semestre del 2020

Al comienzo, cada una de las comisiones se comunicó con sus alumnos lo más rápido que pudo, dándoles algunas indicaciones de cómo trabajarían esos "15 días" de cuarentena. Luego hubo que seguir y los alumnos terminaron este primer semestre cursando de manera completamente virtual.

A pesar de tener muy poca experiencia en la enseñanza en línea o virtual, es decir no contar con conocimiento suficiente para enfrentar esta modalidad de enseñanza, consideramos que el primer obstáculo con el cual nos enfrentamos es la disciplina en sí misma. La matemática es una ciencia abstracta, con lenguaje y notación propia, plagada de símbolos, signos y figuras que se utilizan para expresar las propiedades, proposiciones y teoremas que la definen. Esto hace que sea una ciencia que suele resultarles compleja a los estudiantes, hasta tanto comprendan su propia lógica. Además de tener que comprender los conceptos teóricos involucrados, la matemática requiere realizar mucha práctica por parte de los alumnos.

Luego, el siguiente obstáculo tuvo que ver con la forma de trabajo en el aula, que como hemos relatado en el apartado anterior, la misma es una metodología tipo aula-taller, donde se comparten muchas horas con los estudiantes. Entonces el desafío era cómo podríamos recrear de alguna manera esas interacciones continuas que se dan en la presencialidad, en la cual se promueve el trabajo grupal y las discusiones tanto entre alumnos como entre estos y los docentes. Este punto resulta clave, pues la experiencia de años anteriores muestra que esta manera de trabajo es determinante en las posibilidades de sortear las dificultades relacionadas a la disciplina mencionadas en el párrafo anterior. También nos propusimos seguir fomentando que el alumno sea un sujeto activo, trabajando en la clase, siendo el protagonista de su propio aprendizaje.

Pero además, y sumado a lo anterior, nos preguntamos cómo enseñar en una modalidad prácticamente desconocida por nosotros, donde son necesarias herramientas que no solemos utilizar en nuestras clases presenciales. La misma idea de "clase" con la que habíamos trabajado hasta este momento ya no era aplicable.

De esa manera surge la búsqueda de ayuda, ya sea con los docentes de la misma comisión (que estaban en las mismas condiciones) como con otros colegas tanto de la misma asignatura como de otras disciplinas. La necesidad de la búsqueda de apoyo para enfrentar estos obstáculos hizo que comencemos a trabajar de manera colaborativa y en equipo en lo que ya se había convertido en un desafío.

El trabajo colaborativo al que hacemos referencia fue desarrollado sobre todo con encuentros informales, charlas, reflexiones, intercambio de ideas, intercambio de conocimientos en cuanto a la tecnología utilizada, dispositivos, plataformas educativas, aplicaciones para videollamadas, entre otras cuestiones que fueron surgiendo a medida que transcurría el semestre.

Distintos interrogantes fueron los que guiaron nuestro trabajo, en consonancia con lo expresado en el párrafo anterior: ¿qué plataforma educativa conocemos para empezar a usar ya?, ¿cuáles son sus ventajas y desventajas?, ¿cuál aplicación para videollamada utilizar?, ¿con cuál nos sentimos más cómodos?, ¿qué posibilidades brinda cada una de ellas?, ¿cómo continuar fomentando el aprendizaje activo por parte del estudiante?, ¿qué pasa si no tenemos conexión?, ¿cuál es la mejor manera de presentar en este contexto los contenidos?, por nombrar algunas de las muchas preguntas que nos fueron surgiendo.

Durante este semestre, en base a dichos encuentros y también debido a las disponibilidades personales, implementamos diversas acciones, no siempre compartidas, las cuales pudimos observar que también fueron desarrolladas por otros docentes de nuestro Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad, en otros contextos [12]. En particular, utilizamos la plataforma educativa Classroom, la aplicación para videoconferencias Zoom, ejemplos y ejercicios resueltos, autoevaluaciones en formularios de Google y consultas asincrónicas en la plataforma elegida. Además, realizamos videos explicativos y consultas de manera sincrónica. En una de las comisiones, la A6, esto último se hizo al principio ya que luego se realizaron clases sincrónicas, grabadas y subidas a YouTube.

Estas acciones mencionadas en el párrafo anterior fueron organizadas en base a la situación particular de los docentes de cada comisión y sobre todo se fueron realizando en base a cómo se iban desarrollando las "clases", de acuerdo a la participación de los estudiantes y lo que realmente se podía hacer.

En referencia a los exámenes parciales para acreditar la materia, durante la pandemia, desde la coordinación de la cátedra se decidió dividir cada parcial en dos partes: una consistente en un Formulario de Google para los que usábamos Classroom o en un Cuestionario para aquellas comisiones que utilizaban la plataforma educativa Moodle (con preguntas del tipo opción múltiple y/o, verdadero o falso. Y también podían utilizarse las de tipo respuesta corta o párrafo); y la otra parte, consistía en un archivo pdf con tres ejercicios que los alumnos debían desarrollar, sacar foto y subirlo a la plataforma educativa correspondiente. Ambas partes se tomaron el mismo día, la primera de 8 a 9hs y la segunda de 9.30 a 11hs. Como se venía realizando en la presencialidad, todos los estudiantes rindieron en forma simultánea.

La diferencia con respecto a la presencialidad fue que la primera parte debía ser confeccionada por los docentes de cada comisión, mientras la segunda parte seguía realizándose por la coordinadora de la materia. Y aquí otro desafío, ¿cómo realizar preguntas que puedan evaluar contenidos matemáticos y los alumnos estén en su casa contestando con todo a su disposición? En esta instancia, la colaboración tomó un rol realmente relevante, no solamente por el diseño de las preguntas sino por cómo 'hacer' un formulario de google. ¡Algo más que tampoco nunca habíamos utilizado! La interacción entre los profesores (nosotros) y el jefe de trabajos prácticos (común a ambas comisiones) fue primordial, incentivándonos entre nosotros mismos a la creatividad, a la prueba y error, a la reflexión sobre la evaluación en sí misma. El estrés y las frustraciones pudieron sobrellevarse de mejor manera por sentirnos contenidos y apoyados. Además que los distintos conocimientos que teníamos los docentes involucrados ayudaron en la confección del parcial. Los puntajes asignados a cada pregunta formaron parte del trabajo realizado, compartiendo los mismos en las dos comisiones.

4.3 Primer semestre del 2021

De la experiencia adquirida en el periodo anterior (y también en el segundo semestre, pero no trabajando a la vez en la misma asignatura), de capacitaciones realizadas y/o haber participado de conferencias y/o encuentros sobre la temática propia de la enseñanza en pandemia, y de continuar trabajando en colaboración, realizamos algunas modificaciones con el objetivo de mejorar la propuesta, sobre todo lo referido a la participación e intercambio con el alumnado.

Los mayores cambios (mejoras) implementados en este período se diferenciaron en ambas comisiones.

En cuanto a la Comisión A5, se continuó usando la plataforma educativa Classroom, pero utilizando algunas herramientas que antes no se habían usado. Además, para las clases sincrónicas, se implementó el uso del Google Meet inmerso en la misma plataforma educativa y para las consultas de las clases prácticas, se implementaron salas virtuales con la misma aplicación, para lograr un mayor acercamiento, discusión e intercambio de información con el alumnado.

En cuanto a la Comisión A6, se dispuso del entorno Moodle que mejoró la organización de la materia, tanto en el intercambio de información, material disponible (teórico y práctico) y sistema de evaluaciones y que tiene la gran ventaja de no consumir datos. Además, para las clases prácticas se implementaron salas virtuales mediante la plataforma Zoom para lograr un mayor acercamiento, discusión e intercambio de información con el alumnado.

En cuanto a los parciales en este semestre, siguieron con la misma estructura que la propuesta en el primer semestre 2020. La experiencia obtenida previamente, logró mejorar el tipo de preguntas y la manera de presentar las mismas. A pesar de utilizar plataformas diferentes, seguimos armando en conjunto las preguntas, a veces adaptándolas a la manera de expresarla en cada una de las plataformas. Asimismo, de acuerdo a las realidades de cada curso y la manera de presentar los temas y hacer énfasis en distintos aspectos, cada comisión adaptó las preguntas en su comisión.

Refiriéndonos a los párrafos previos en donde se observa que no se utilizaron las misma herramientas a pesar de afirmar estar 'trabajando de forma colaborativa', creemos oportuno y fundamental resaltar que la colaboración no

tiene que ver con ‘hacer lo mismo’, sino con reflexionar en forma conjunta “convencidos de que las necesidades, intereses, complejidades y finalidades de la tarea educativa requieren de la cooperación desde la independencia, desde la libertad individual de cada uno de los actores comprometidos*”* [13].

En la Tabla 2 se resumen las acciones implementadas en cada comisión a cargo de los autores de este trabajo, diferenciando entre lo hecho en 2020 y en 2021.

Tabla 2. Resumen de las acciones realizadas en cada comisión en los años 2020 y 2021.

Comisión A5	**Comisión A6**
Primer semestre 2020	
● Plataforma educativa Classroom ● Zoom para clases sincrónicas ● Videos explicativos. Consultas sincrónicas ● Ejemplos y ejercicios resueltos ● Autoevaluaciones en formularios de Google ● Consultas asincrónicas en la plataforma elegida	● Plataforma educativa Classroom ● Zoom para clases sincrónicas ● Videos explicativos y consultas sincrónicas al comienzo. Luego clases sincrónicas, grabadas y subidas a YouTube ● Ejemplos y ejercicios resueltos ● Autoevaluaciones en formularios de Google ● Consultas asincrónicas en la plataforma elegida
Primer semestre 2021	
● Plataforma educativa Classroom ● Generación de material de apoyo para que el alumno organice su propio estudio ● Consultas sincrónicas con división en salas para trabajo en grupo utilizando Google Meet ● Ejemplos y ejercicios resueltos ● Autoevaluaciones en formularios de Google ● Consultas asincrónicas en la plataforma elegida	● Plataforma educativa Moodle ● Clases sincrónicas con división en salas para trabajo en grupo utilizando Zoom ● Ejemplos y ejercicios resueltos ● Autoevaluaciones en cuestionarios Moodle ● Consultas asincrónicas en la plataforma elegida

5 Discusión

En el apartado anterior, sin ser minuciosos en la descripción de la tarea realizada, relatamos de manera general aquello que nos resultó importante comunicar de nuestra experiencia, sobre todo destacando el aspecto positivo de trabajar en equipo.

Creemos que, a partir de lo sucedido en estos dos años, es fundamental reflexionar (seguir reflexionando) no solamente sobre la necesidad e importancia de trabajar con otros, sino también sobre la formación de los docentes universitarios y sobre qué tipos de conocimientos son necesarios para afrontar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Creemos también, que la colaboración realizada por los autores de este trabajo muestra que la misma puede tomar muchas formas, adaptándose a las particularidades de cada docente y cada aula de manera que realizar tareas en forma colaborativa no signifique “copiar” o actuar de manera idéntica frente al desafío de ensañar. Por el contrario, creemos que el trabajo llevado a cabo nos permitió enriquecer nuestras propias prácticas, sin abandonar nuestras improntas personales.

La enseñanza remota de emergencia, que nos provocó tanto desazón, tensión y ansiedad, también permitió revalorizar el trabajo con nuestros pares como una necesidad intrínseca de la labor docente que no siempre la llevamos a cabo de esa manera.

¿Cómo vamos a saber lo que hacen otros docentes en sus clases si es que no compartimos nuestras experiencias? No es sencillo traspasar los muros del aula y "pesa mucho la tendencia al individualismo y a un cierto "ocultismo" de lo que hacemos en nuestras clases" [11]. Nuestra experiencia en estos dos años de enseñanza remota de emergencia nos lleva a considerar que el trabajo colaborativo no va en contra de las expresiones individuales de cada docente, por el contrario, las enriquece y fortalece. Se desprende entonces que es necesario hacer visible nuestras prácticas para poder nutrirnos mutuamente de ellas, para incorporar nuevas estrategias, modificar otras. Esto, como dice Zabalza [11], requiere una práctica revisada.

Como mencionamos antes, otro aspecto que resurgió es la necesidad de una formación continua de los docentes universitarios. Siguiendo a Zabalza [11], "ser un buen profesor (como ser un buen profesional en cualquiera de los campos) significa ser un especialista o, al menos, un buen conocedor de los procesos de enseñanza y aprendizaje". Y para ello hay que buscar la manera de conocer estos procesos, mediante cursos y talleres específicos. Y en este punto es donde podemos ver la necesidad de que el profesor universitario cuente con otro conocimiento aparte del disciplinar, como es el pedagógico. A lo largo de los años vamos observando cómo se va complejizando la tarea docente al reconocer, por ejemplo, el conocimiento tecnológico como otro necesario para desarrollar su labor.

Habiendo dejado clara nuestra postura sobre los beneficios del trabajo colaborativo y teniendo en cuenta la necesidad de formación de los docentes universitarios no sólo en su área disciplinar, nos surgen entonces los siguientes interrogantes: ¿no sería necesario un trabajo interdisciplinario en pos de un objetivo común, que es el aprendizaje de nuestros alumnos?, ¿por qué no formar equipos de trabajo con profesionales de distintas disciplinas que sean parte del plantel docente de las cátedras? ¿no mejorarían nuestras propuestas? ¿no encontraríamos mejores estrategias? ¿no nos sentiríamos más seguros si alguien más capacitado en aspectos que no son de nuestra especialidad trabajara en colaboración con nosotros?

Los autores consideramos que la enseñanza es la actividad primordial y razón de ser de las universidades, por lo que creemos necesario ponerse a pensar en los interrogantes anteriores no sólo desde nuestras prácticas individuales o con colaboraciones circunstanciales, sino a nivel institucional. Creemos que se deberían generar espacios de discusión y reflexión, fomentando activamente la participación de todos los docentes, valorando y jerarquizando estas tareas formativas como parte de sus obligaciones laborales. Estamos convencidos que este es el camino para generar un cambio positivo y duradero, que permita una actualización permanente de las prácticas de enseñanza centradas en los alumnos, reconociéndolos como sujetos activos y cambiantes del proceso de aprendizaje.

6 Reflexiones finales

Como comentarios finales nos parece importante destacar que la enseñanza remota de emergencia nos permitió reflexionar sobre nuestra propia práctica y al igual que todos los docentes universitarios, tuvimos aciertos y desaciertos. Sin embargo, nos caracterizó la responsabilidad por sobrellevar la situación mediante distintas acciones. A su vez, estamos convencidos que haber trabajado en colaboración hizo que la mochila que cargamos no sea tan pesada y compartimos con Montero Mesa [9] el hecho que "la colaboración es una actitud, una capacidad a desarrollar hoy y mañana, un deber de todo profesional, una inexcusable característica del sentido profundo de ser profesor y profesora que no radica en otra cosa que en cooperar con otros para posibilitar aprendizajes (y aprender uno mismo en ese empeño)". De esta manera nuestra reflexión se centra en la idea de "superar la tendencia que los docentes tenemos a centrarnos en lo "individual", ligado sólo a preocupaciones acerca de la materia que enseñamos o a los cursos que atendemos, donde prima la concepción que ser buen profesional significa saber mucho de aquello que debemos enseñar a nuestros estudiantes y ser capaz de explicárselos en la clase, para avanzar hacia una visión colectiva, comprometida con el trabajo solidario y en auténtica comunicación intersubjetiva" [13].

Asimismo, creemos en la necesidad de una formación integral del docente universitario, en la importancia que los docentes cuenten con otros conocimientos además del disciplinar y consideramos que trabajar en colaboración con profesionales de otras disciplinas sería parte de esa formación continua, mejorando de esa manera nuestra práctica docente. Como lo señalamos en la Discusión previa, sostenemos que este proceso no debe ser dejado a la buena voluntad circunstancial de un grupo de docentes preocupados por mejorar sus prácticas, sino ser impulsado y organizado desde las propias instituciones, reconociéndolo como parte de la labor docente.

Agradecimientos. Agradecemos especialmente a María Fernanda Bertero, Jefe de Trabajos Prácticos de ambas comisiones y a las ayudantes Bárbara Zorba, Inés Corte y Dolores Corva, por su gran responsabilidad y compromiso durante el desarrollo de las clases. Además, a todos aquellos docentes que compartieron sus conocimientos,

ideas e inquietudes, que hicieron que nuestra tarea haya sido menos pesada y más llevadera.

Referencias

1. Hodges, C.; Moore, S.; Lockee, B.; Trust, T y Bond, A.: La diferencia entre la enseñanza remota de emergencia y el aprendizaje en línea. En A. Cabrales et al (Editores) *Enseñanza de emergencia a distancia: textos para la discusión*. The Learning Factor (2020)
2. Pedragosa, M.A., y Barranquero, M.: Estrategias de colaboración con docentes universitarios para la migración de la enseñanza a la virtualidad en el contexto de la pandemia COVID19. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, No. 28, pp. 388-395 (2021)
3. Mayén, D. M. A.: Educación virtual, el disfraz de la enseñanza remota de emergencia. *Revista Guatemalteca de Educación Superior*, Vol. 4, No 2, pp. 11-22 (2021)
4. Herrera Ordoñez, A. y Herrera López, P.: La educación en línea. Hospitalidad ESDAI, No. 23 (2013)
5. ¿Qué es la educación virtual?. *GCF Aprende libre.* https://edu.gcfglobal.org/es/educacion-virtual/que-es-la-educacion-virtual/1/. Accedido el 5 de Abril de 2022
6. Rodríguez Morúa, G.: "¿Educación en línea o educación remota y de emergencia?". *Revista Observatorio de las Ciencias Sociales en Iberoamérica*, Vol 2, No. 12, pp. 155-159 (2021)
7. Vera, F.: Experiencia de docentes universitarios durante la educación remota de emergencia debido a la crisis por COVID-19. *Transformar*, Vol. 2, No 2, pp. 40-57 (2021)
8. Barrios, S.A.: Un acercamiento al trabajo colaborativo de docentes universitarios. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Económicas, Escuela de Estudios de Posgrado (2014)
9. Montero Mesa, L.: El trabajo colaborativo del profesorado como oportunidad formativa. *Participación educativa*, No. 16, pp. 69-88 (2011)
10. Montoya, M. D. G.; Navarro, R. B.; Sáez, A. A., y Montoya, F. G.: Trabajo cooperativo en el centro y en el aula. *In JAC'07: Séptima Jornada sobre Aprendizaje Cooperativo,* pp. 209-218 (2007)
11. Zabalza, M. Á.: Innovación en la enseñanza universitaria. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, No. 6, pp. 113-136 (2014)
12. Costa, V. A. y Trípoli, M. M. (compiladoras): Encuentro de docentes de Ciencias Básicas. Fac. de Ingeniería. UNLP (2022)
13. De la Barrera, S.: Colaboración entre profesores ¿Quién dice que es fácil?. *Colección de Cuadernillos de actualización para pensar la Enseñanza Universitaria*. Río Cuarto: Universidad Nacional de Río Cuarto. (2007)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Física en Clases de Matemática en Pandemia: Suma de Vectores

María de las Mercedes Trípoli[1] y Patricia Torroba[1]
[1] IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Avenida 1 y 47
{mercedes.tripoli,patricia.torroba}@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En clases presenciales se venían realizando propuestas interdisciplinarias teniendo en cuenta que en el proceso educativo es importante considerar lo que el individuo ya sabe de manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Se adaptó a la virtualidad durante la pandemia una actividad que ya se había implementado en la presencialidad, con el objetivo de darle continuidad a las experiencias de articulación que se venían realizando. Se trabajó con la suma de vectores y se vincularon notaciones, simbología y lenguajes propios de cada disciplina. Se utilizó una simulación para reemplazar las actividades experimentales que se realizaban en la presencialidad. Se relata la actividad áulica virtual realizada entre las áreas de matemática y física, con estudiantes de ingeniería. Se hace un análisis valorando la opinión de los alumnos y el trabajo interdisciplinario entre docentes y se concluye sobre la necesidad de seguir generando este tipo de actividades.

Palabras Clave: Pandemia, Articulación, Matemática y Física, Vectores en ingeniería.

1 Introducción

En el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo Acreditado, de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP): "Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería", algunos docentes realizan experiencias áulicas con alumnos de ingeniería con el objetivo de vincular notaciones y lenguajes y motivar a los estudiantes en el estudio de las ciencias básicas, que generalmente se enseñan desvinculadas entre sí.
Como es conocido por todos, en marzo de 2020, el decreto del aislamiento social obligatorio debido a la pandemia mundial, hizo que se suspendieran las clases presenciales en todo el país. Esto provocó incertidumbre y desesperación, por expresar algunos de los sentimientos que invadieron a gran parte de los docentes en ese momento. Se debió seguir con las clases de manera virtual. En muchos casos, con poco conocimiento de las herramientas tanto pedagógicas como tecnológicas para llevarlas a cabo. Eso hizo que la energía se centrara principalmente en ver cómo afrontar las propias clases, quedando de lado estas actividades de articulación que semestre a semestre se intentaban realizar y que no forman parte del contenido obligatorio de Matemática A, asignatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, en la cual las autoras de este trabajo realizan las actividades, junto a otros colegas.

A pesar de la dificultad de seguir realizando las actividades que se venían desarrollando, en el segundo semestre de 2020 se pudo implementar una experiencia como así también en el primer semestre de 2021 ([1], [2]). En este trabajo se relata una actividad áulica entre las áreas de matemática y física. La misma fue llevada a cabo durante el primer semestre del año 2021, en una comisión de Matemática A, con la presencia de una docente de Física I.

En general, para el diseño e implementación de las actividades, se tiene en cuenta que los alumnos de primer año aún no cuentan con la competencia necesaria para articular por sí solos los lenguajes y notaciones propios de cada disciplina, siendo los docentes los colaboradores en dicho proceso. A su vez, las actividades propuestas parten de los conocimientos de física que los alumnos estudiaron en la escuela media y se relacionan con los temas y conceptos estudiados en matemática, dejando para la clase de física los fundamentos teóricos necesarios para

comprender en profundidad los temas.

Cada comisión de alumnos es distinta, con sus propias particularidades, así como cada semestre de trabajo en los que se dictan las distintas materias de la Facultad. A veces el calendario académico está más ajustado por ejemplo debido a los feriados, y otras veces los docentes involucrados pasan por situaciones que no permiten que se desarrollen alguna de las actividades propuestas. De hecho, estas actividades, a pesar de hacerse en horario de clase, como ya se mencionó, no son parte de la propuesta integral de las cátedras de matemática y física, sino que son propuestas que se desarrollan en una comisión de matemática, en particular en donde una de las autoras del trabajo es profesora de la misma.

Específicamente en la propuesta que se expone, se trabajó con la suma de vectores. La intención no era hacer algo novedoso y que no se haya hecho anteriormente, sino *adaptar* al contexto de la virtualidad lo que ya se venía realizando. Hacia el final del artículo, se analiza la experiencia y se termina con una conclusión sobre la misma.

2 El contexto de trabajo y algunos posicionamientos teóricos

Matemática A es la primera asignatura de matemática con contenidos universitarios que cursan los alumnos que ingresan a la Facultad y corresponde al primer semestre de los planes de estudio de todas las carreras. El eje conceptual es la diferenciación en una y varias variables y la metodología de trabajo es teórico-práctica, tipo aula-taller. Se espera que el estudiante sea capaz de resolver problemas de índole geométrica, física u otros, seleccionando el modelo diferencial adecuado y aplicando los procedimientos de cálculo correspondientes al mismo. En cuanto a Física I, corresponde al segundo semestre de los planes de estudio de todas las carreras, siendo una asignatura correlativa de Matemática A. En relación al aspecto temático, se aborda la mecánica clásica y una introducción a la termodinámica. Se inicia el estudio del sistema físico, incorporando el concepto de modelización. Las leyes de Newton se emplean en el modelo más simple, la partícula, luego al sistema de partículas hasta llegar al modelo de cuerpo rígido. Para más detalle de las características de estas dos asignaturas, puede consultarse en [3].

Matemática y Física son dos asignaturas fundamentales para la enseñanza de la ingeniería, que están muy relacionadas entre sí. Asimismo, tanto la física como la ingeniería utilizan grandes cantidades de matemática. De hecho, gran parte del desarrollo de la matemática en los últimos tres siglos se ha originado por la motivación de resolver problemas físicos. Por ejemplo, la creación de aviones, el nacimiento del automóvil, los rayos X, la resonancia magnética, no hubiesen sido posible sin matemática [4].

Al ser la matemática una herramienta para el ingeniero, al enseñarla, como sostiene Santaló [5], “hay que simplificar los detalles técnicos, que deben dejarse para los matemáticos profesionales…basta que tengan de ellas una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera puede aplicarse”, acercando al alumno a la realidad profesional que enfrentará en el futuro.

Por ello, se cree que resulta conveniente motivar la enseñanza de los conceptos matemáticos a partir de temas propios de las carreras que se estudian, procurando que la enseñanza de la matemática no se convierta en un compartimento estanco, estableciendo relaciones horizontales y verticales con otras asignaturas, como lo es la física.

La investigación que se viene realizando se enmarca en la teoría cognitiva del aprendizaje significativo, que sostiene la idea de combinar la información previa con la nueva para arribar a una comprensión más profunda. En el proceso educativo es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Una forma de propiciar el aprendizaje y en forma significativa, es atender a lo expresado por Moreira que sugiere crear situaciones de enseñanza en el aula que motiven el aprendizaje ([6],[7]).

3 Las magnitudes vectoriales

Como ya se mencionó, las docentes autoras de este trabajo, en conjunto con otros colegas, venían realizando, en la presencialidad, propuestas didácticas en las que se vinculan notaciones y lenguajes propios de cada disciplina. En particular, dada la importancia que adquieren las magnitudes vectoriales en el estudio de la física y en materias específicas de ingeniería, se inició una investigación sobre la problemática de los vectores [8]. Por un lado, se realizó una revisión bibliográfica en la cual se puede observar de qué manera se mencionan y trabajan con los vectores en las asignaturas de matemática y de física. Para ello se analizaron los materiales de estudio correspondientes a las

materias de estas disciplinas que se dictan en la Facultad y los libros de texto recomendados por las cátedras. Esto permitió colaborar con los estudiantes en los distintos usos de terminología, nomenclatura, simbología y definiciones haciendo una comparación entre los mismos para tratar de evitar las confusiones a las que dan lugar. Por otro lado, se pudo observar que son varios los autores que acuerdan en la dificultad que presentan los estudiantes al momento de trabajar con vectores: en la suma y resta; al escribir un vector en coordenadas cartesianas o rectangulares; al tener que utilizar el producto vectorial; al trabajar con las variables cinemáticas, con las magnitudes vectoriales de velocidad y aceleración; sobre los procedimientos gráficos con vectores; la falta de contextualización de las magnitudes vectoriales; entre otras cuestiones ([9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]). Asimismo, en estas investigaciones se manifiesta el hecho que muchos estudiantes comienzan los cursos introductorios de física en la universidad, sin el conocimiento suficiente para encarar los temas correspondientes.

Lo expuesto anteriormente motivó a centrar una de las actividades al tratamiento de las magnitudes vectoriales. En las experiencias que se habían llevado a cabo en la presencialidad, además de pizarrón y tiza, de acuerdo a la propuesta, se utilizaron TIC en el aula: sensores de posición, carros de roce despreciable junto con pistas de aluminio, una interfase y un software que permiten la toma de datos en tiempo real y su respectiva representación. Siguiendo este camino, y recuperando lo desarrollado en la presencialidad, se diseñó una propuesta didáctica para llevar a cabo en la virtualidad, cuyo objetivo fue familiarizar a los estudiantes con el tratamiento de la suma y resta de vectores con alguna situación física concreta en la cual se pone en evidencia la importancia y utilidad de la matemática en contextos extra matemáticos.

4 Desarrollo de la propuesta

Los estudiantes de matemática recibieron una invitación mediante la plataforma educativa utilizada en la comisión involucrada en la experiencia, para participar de una clase especial, en donde la propuesta era relacionar temas estudiados en Matemática A con conceptos físicos. En particular se les informaba que se iban a analizar situaciones físicas concretas en donde se utilizan las magnitudes vectoriales. En esa misma invitación, podían ver qué día, hora (día y hora de clase de matemática) y qué aplicación de videoconferencia se iba a utilizar ya que la clase se iba a desarrollar de manera sincrónica, durante una hora aproximadamente.

El diseño de la propuesta consistió en la presentación de dos situaciones físicas diferentes, tal como se había hecho en la presencialidad. La primera referida a un sistema en equilibrio y la segunda al choque de dos cuerpos [8].

4.1 ¿Cómo se adaptó la situación referida a un sistema en equilibrio?

En la presencialidad, los docentes de física llevaron al aula de matemática un soporte, con una soga y pesas como se muestra en la Fig. 1. Los estudiantes participaron pasando a colocar pesas para ver si la soga que se mostraba podía ponerse totalmente en forma horizontal, ya que ese era el interrogante planteado.

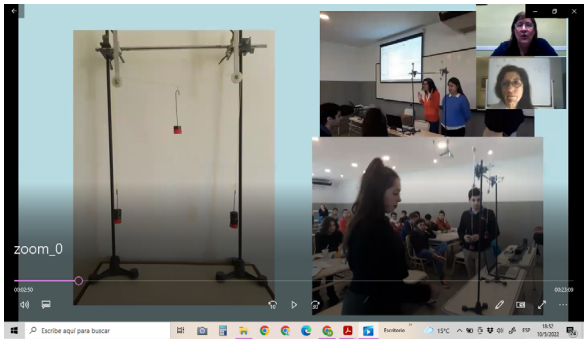


Fig. 1. Fotos de la experiencia realizada en forma presencial en el año 2019.

En la virtualidad, se utilizó como soporte para la experiencia, una presentación en PowerPoint y, además, una

pizarra que la docente de física tenía en su casa. Se comenzó compartiendo pantalla y planteando a los estudiantes el mismo interrogante (Fig. 2).

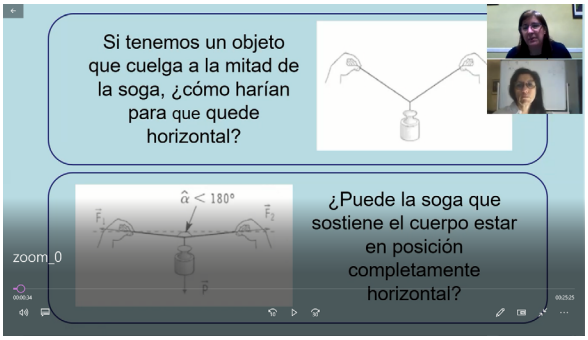


Fig. 2. Interrogante planteado a los estudiantes (las imágenes fueron extraídas de [16]).

Antes de trabajar directamente en posibles respuestas, se les comentó a los estudiantes que ya se había realizado esta experiencia en la presencialidad y se les mostraron algunas imágenes de dicho momento (Fig. 1). Es importante recalcar que estos alumnos nunca habían concurrido a la Facultad, por lo que ni siquiera tenían conocimiento del formato de las aulas de trabajo, que son aulas planas, equipadas con mobiliario para favorecer el trabajo grupal y colaborativo (mesas con capacidad para 8 alumnos con sillas o bancos alrededor).

La profesora de Física indaga a los estudiantes sobre la situación: qué hay que hacer para que el hilo se ponga tenso, quién estaría haciendo la fuerza, y cómo se podría representar dicha situación. Con apoyo en la imagen de los elementos utilizados en la clase presencial, se propuso el esquema que se muestra en la Fig. 3.

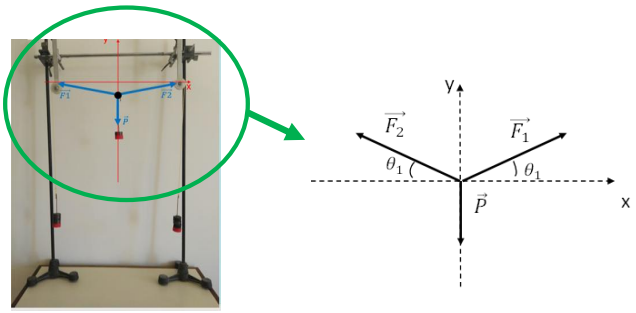


Fig. 3. Esquema de la situación planteada.

Recuperando lo visto por los estudiantes en la escuela media, se los interroga sobre el conocimiento que poseen de un sistema en equilibrio y se concluye que para que eso suceda, la suma de las fuerzas involucradas tiene que dar cero. En términos matemáticos, la suma de los vectores involucrados tiene que dar cero. Se comenta a los estudiantes que el arreglo experimental está diseñado, por simplicidad, de modo que exista una total simetría en relación al eje y, lo que permite afirmar que ambos ángulos y tensiones (en módulo) son iguales. El hecho de plantear que la suma de dichas fuerzas sea cero, hace que el peso deba ser cero, llegando a una contradicción y concluyendo que la soga nunca puede ponerse en forma horizontal.

Durante el desarrollo de la situación aparecieron notaciones desconocidas por los estudiantes, pero utilizadas en física y también en otras asignaturas de matemática que verán en semestres posteriores, así que se fueron realizando los vínculos correspondientes. Como también se pusieron en discusión los lenguajes específicos de cada disciplina. Asimismo, se revisaron algunos conceptos sobre trigonometría que, a pesar que los alumnos los estudiaron en la escuela media y los repasaron en Matemática para Ingeniería, siguen presentando dificultades al momento de utilizarlos en alguna situación concreta. Matemática para Ingeniería es una asignatura que se dicta en la Facultad a todos los alumnos ingresantes y tiene como correlativa a Matemática A. El propósito general es repasar los temas de la Escuela Media resultando, por tanto, ser un curso de nivelación en matemática. En particular, los contenidos

de trigonometría forman parte de los temas que se repasan.

Finalmente, se concluyó que mediante la suma de vectores se pudo ver de forma teórica la imposibilidad de que la soga pueda estar en forma horizontal.

4.2 ¿Cómo se adaptó la situación referida al choque de cuerpos?

En esta situación, que se contó en el mismo encuentro, se analizó un tipo de choque inelástico (que los alumnos estudiarán en Física I). Para desarrollar la situación, la profesora de física utilizó una pizarra que tenía en su casa con el objetivo de ir escribiendo lo que se consideraba necesario que quedara a la vista de los estudiantes. Esto en la presencialidad se desarrollaba en el pizarrón del aula física.

Para iniciar, se introdujo de manera sencilla la magnitud vectorial cantidad de movimiento para que los alumnos puedan seguir la charla.

Dado que la cantidad de movimiento de un objeto, que se denomina $\vec{p}$, es el producto de la masa del cuerpo (magnitud escalar) por la velocidad (magnitud vectorial), es decir: $\vec{p} = m\vec{v}$, se pudo mostrar un ejemplo concreto del uso del producto de un escalar por un vector, operación que ya había sido estudiada en matemática.

En referencia a la situación planteada, se les comenta a los estudiantes que si se liberan dos cuerpos, la cantidad de movimiento antes de la liberación y después, es la misma (concepto que se justificará cuando cursen Física I). Además, la cantidad de movimiento es la suma de la cantidad de movimiento de los dos móviles.

Específicamente se plantea lo siguiente: supongamos que tenemos $\overrightarrow{p_1}=m_1\overrightarrow{v_1}$ la cantidad de movimiento del móvil 1 $\overrightarrow{p_2}=m_2\overrightarrow{v_2}$ y la cantidad de movimiento del móvil 2. Se chocan entre sí y se van juntos. ¿Cuál es la velocidad de los móviles luego del choque, si $m_2 = 2m_1$ y la rapidez de los cuerpos son iguales inicialmente? Se esquematiza la situación planteada en la Fig. 4.

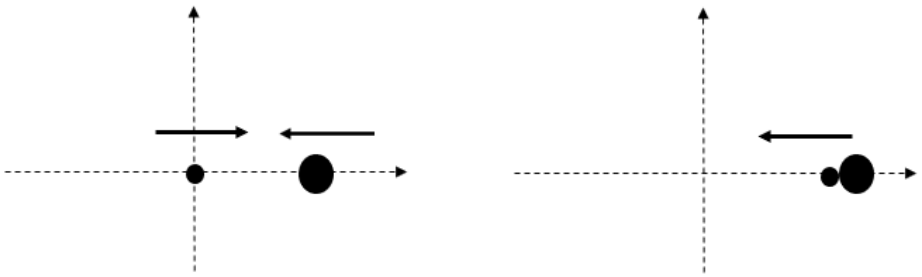


Fig. 4. Esquema del choque entre dos móviles.

Se resolvió primero en forma analítica mediante la suma de vectores y se llegó a que la rapidez de los dos móviles después del choque es 1/3 de la rapidez inicial de ambos móviles y que la dirección es horizontal apuntando hacia la izquierda. Luego de esto, en la presencialidad se corrobora este resultado en forma experimental. Para ello, habíamos llevado al aula de matemática una pista con dos carritos de bajo roce (Fig. 5) y un sensor de posición. El sensor mide las posiciones de los cuerpos y mediante un algoritmo, la interfaz deriva y calcula las velocidades de los cuerpos antes y después del choque y contrasta estos resultados con los que surgen a partir del modelo teórico.

Fig. 5. Carritos de bajo roce.

Para suplantar esta parte experimental, se decidió utilizar una simulación. En este caso, se usó la simulación "Laboratorio de Colisiones" de PHET Interactive Simulations de la Universidad de Colorado, cuyo link es: https://phet.colorado.edu/sims/html/collision-lab/latest/collision-lab_es.html.

En la Fig. 6 se muestra la imagen de los dos móviles antes de la liberación (izquierda) y luego de la liberación (derecha). En el primer caso, se puede observar que ambos móviles tienen la misma rapidez y uno el doble de masa que el otro de acuerdo a la situación planteada. En la imagen de la derecha, se puede observar que la rapidez final es 1/3 de la rapidez inicial, y que la dirección es horizontal apuntando hacia la izquierda, y así coincide con lo encontrado en forma analítica.

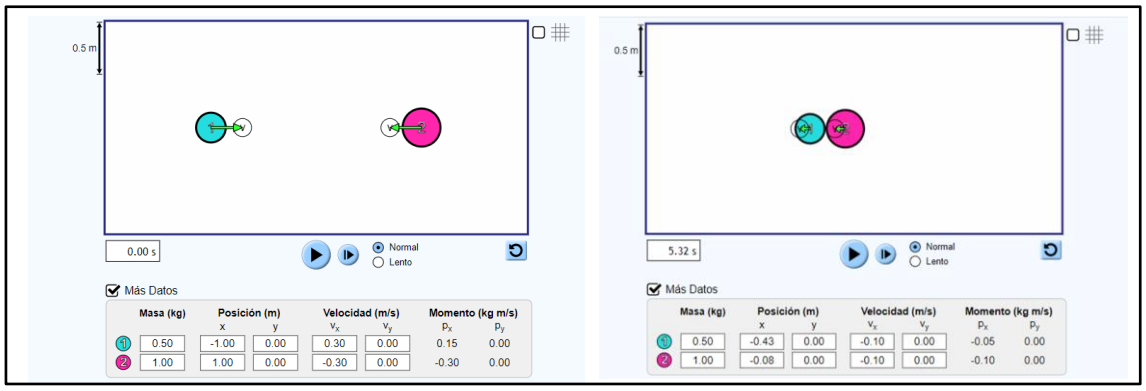


Fig. 6. Móviles antes y después de la liberación.

Luego se plantearon dos situaciones más, modificando la masa de los móviles y las velocidades iniciales. Se realizaron las cuentas correspondientes y se contrastaron con los resultados obtenidos en la simulación.

Al igual que en la primera situación, se concluyó que mediante la suma de vectores se pudo ver de forma teórica aquello que se sospechaba que sucedería con los móviles.

5 Un poco de análisis

Revisando las propuestas que se venían realizando en la presencialidad y de acuerdo a la continuidad que se le pudo dar en la virtualidad, se considera importante destacar los siguientes dos aspectos generales:

- *La opinión de los estudiantes como motivo de seguir realizando actividades de este tipo.* En general consideran que estas clases, encuentros, charlas, propuestas son interesantes ya que pueden ver otras áreas en las que se utilizan conceptos matemáticos y contextualizados a situaciones concretas. Además, manifiestan que pueden ver distintos lenguajes y notaciones propias de cada disciplina, entre otras apreciaciones, que

son el objetivo principal de las propuestas.
- *El trabajo colaborativo entre docentes de distintas disciplinas*. Se considera primordial destacar la importancia de un trabajo interdisciplinario que comprende interaccionar entre las distintas disciplinas, compartir ideas, vincular notaciones, promover habilidades en los estudiantes, entre otras.

Asimismo, así como se adaptó lo realizado en la presencialidad a la virtualidad para poder seguir realizando este tipo de actividades, se cree necesario volver sobre lo realizado en la virtualidad y recuperar aquello que puede sostenerse en la presencialidad. En este caso, a pesar que las simulaciones no reemplazan en el sentido estricto de la palabra las actividades experimentales, sí son una buena opción al momento de querer contrastar los resultados teóricos con los prácticos. No siempre es posible contar con los elementos del laboratorio de física, o los docentes que participan encargados del laboratorio no pueden hacerlo u otras cuestiones que hacen imposible utilizarlos. Además, usando las simulaciones se puede pedir a los alumnos tareas en las cuales sean ellos los que deban manipular los datos y registrar lo que sucede para luego contrastar sus resultados. A su vez, los alumnos opinaron que el uso de la simulación colaboró en la comprensión de la situación planteada.

Las opiniones de los estudiantes se obtuvieron de una encuesta que se realizó luego de desarrollar la experiencia. A modo de ejemplo, se *transcriben* algunos comentarios de alumnos:

- Todo genial y muy útil, sirve mucho relacionar los temas de física con matemática ;buena explicación y tiempo de charla
- Esta bueno hacer estos encuentros cada tanto ya que vemos otras áreas que comparten conceptos matemáticos pero relacionados a otro ámbito en este caso la física
- Me gusto este encuentro, primero porque no duró mucho para explicar todos los conceptos que se habían preparado, y segundo porque pude entender todo, y también visualizar la representación del lenguaje simbólico en los elementos del dispositivo mostrado (masa, velocidad, vectores fuerza). También sumó la simulación por computadora que mostraron, fue una buena forma de cerrar el concepto y que se termine de entender.
- Las explicaciones fueron claras (quizás entendí todo porque los conceptos dados ya los había visto en la secundaria). Las simulaciones estaban buenas.
- los simuladores aportan mucho a la hora de comprender la situación
- La clase me pareció muy entretenida, ya que los conceptos fueron explicados muy didácticamente, ya que además pude entenderlos y plasmarlos mejor con las simulaciones. Me gusta que hagan este tipo de clases especiales, porque también puedo ver que veré mas adelante y me puede ayudar al momento de rendir la materia, es este caso Física, la cual me puedo apoyar en algunas formas de resolución mas matemáticas.

6 Conclusión

De acuerdo al objetivo planteado, que fue adaptar algunas actividades que se venían realizando en la presencialidad a la virtualidad, consideramos que se pudo encontrar la manera de seguir brindando actividades que vinculan notaciones y lenguajes acercando de esta manera ambas disciplinas, matemática y física, con el fin de motivar a los estudiantes en el estudio de las ciencias básicas. En el primer caso, el hecho de contar con fotos de la experiencia desarrollada en el aula, sirvió como apoyo para presentar la situación propuesta. En el caso de la segunda situación, el choque inelástico entre dos móviles, la inclusión de una simulación para "reemplazar de alguna manera la parte experimental" permitió "visualizar" el comportamiento del sistema físico y facilitar su entendimiento. A su vez, resultó motivador en los alumnos.

La opinión de los estudiantes es primordial para seguir desarrollando este tipo de experiencias y generalmente las valoran de manera positiva, lo que nos alienta a seguir por este camino.

Consideramos que este tipo de actividades motivan a los alumnos que ingresan a la facultad de ingeniería a seguir estudiando, dándole un sentido a la matemática y valorando la misma como una herramienta esencial en su formación. Siendo una ciencia abstracta pueden reconocerla en situaciones físicas concretas que estudiarán más adelante. Y a su vez, creemos que esto es posible debido al trabajo interdisciplinario en el que cada docente aporta a la propuesta desde el conocimiento específico de su disciplina.

Asimismo, como mencionamos anteriormente, esta adaptación nos hace pensar en una readaptación de lo que aprendimos en la virtualidad para la presencialidad, diseñando actividades que contemplen el uso de otras herra-

mientas tecnológicas y otras estrategias de enseñanza.

Referencias

1. Torroba, P. y Trípoli, M.: Magnitudes vectoriales: una propuesta de articulación en tiempos de pandemia. *Revista de Enseñanza de la Física*, Vol. 33, No. 33, pp. 621-627 (2021)
2. Trípoli, M. y Torroba, P.: Matemática y física. Actividades de articulación en la virtualidad. *Libro de Actas de las 6tas Jornadas de Investigación, Trasferencia, Extensión y Enseñanza*, *Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Ingeniería*, pp. 188-193 (2021)
3. Devece, E., Di Domenicantonio, R., Torroba, P., & Trípoli, M. D. L. M. Experiencia de articulación entre Matemática A y Física I. En *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales 28, 29 y 30 de octubre de 2015* Ensenada, Argentina. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Ciencias Exactas y Naturales (2015)
4. Rodríguez, M. E. La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Vol. 77, pp. 35-49 (2011)
5. Santaló, L.. "Matemática para no matemáticos". En : Parra, C. y Saiz, I. *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós. (1994)
6. Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H.. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, Vol. 3. Trillas, México (1976)
7. Moreira, M. A. "Aprendizaje significativo. Un concepto subyacente, en *Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*, Burgos, España (1997)
8. Torroba, P., Trípoli, M., Devece, E. y Aquilano, L.: Implementación de una propuesta sobre vectores, para articular matemática y física, con uso de TIC y actividad experimental. *Revista de Enseñanza de la Física*, Vol. 31, pp. 697-705 (2019)
9. Aguirre, J. y Rankin, G.: College students' conceptions about vector kinematics. *Physics Education*, Vol. 24, No. 5, pp. 290-294 (1989)
10. Shaffer, P. y McDermott, L.: A research-based approach to improving student understanding of kinematical concepts. *American Journal of Physics*, Vol. 73, pp. 921-931(2005)
11. Flores García, S., González Quezada, M., Alfaro Avena, A., Hernández Palacios, A., Barrón López, J. y Chávez Pierce, J.: Uso de vectores en su propio contexto. Parte I. *Revista Cultura Científica y Tecnológica*, Vol. 5, No. 26, pp. 17-25 (2008)
12. Barniol, P. y Zavala, G.: Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 60, pp. 86-102 (2014)
13. Gutiérrez, E. y Martín, J.: Dificultades en el aprendizaje de vectores, en los estudiantes que cursan materias del ciclo introductorio de la FCEFyN de la UNC. *Revista de Enseñanza de la Física*, Vol. 27(Extra), pp. 89-96 (2015)
14. Flores García, S., Cuellar, C., González Quezada, M., Ramírez Sandoval, O., Cruz Quiñones, M. y Aguirre, V.: Problemas de entendimiento conceptual con las operaciones entre vectores. *Latin-American Journal of Physics Education*. Vol. 11, No. 4, p. 7 (2017)
15. Serrano, M., Herrero, M., Anise Chirino, S. y Palma, N.: Implementación de estrategias didácticas para favorecer el aprendizaje significativo de física. *Revista de Enseñanza de la Física*, Vol. 30(Extra), pp. 171-179 (2018)
16. Muszcats, J. y Ojeda, D.: Matemática Instrumental. En *Matemática I (Polimodal)*. Buenos Aires, Puerto de Palos (2001)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Predicciones matemáticas a partir de modelos "defectuosos": una experiencia en pandemia

Alberto Miyara[1,2], Rosana Cassan[1]
[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina
ajmiyara@fceia.unr.edu.ar, cassan@fceia.unr.edu.ar
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta provincial 11, km. 10, 3100 Oro Verde (ER), Argentina
ajmiyara@fceia.unr.edu.ar

Resumen. En la única actividad presencial llevada a cabo en un curso de Cálculo II durante el año 2021, se convocó a un grupo de estudiantes a un laboratorio de física, donde ejecutaron un experimento consistente en hacer girar un disco de plástico y deslizar un marcador sobre su superficie, quedando marcada una trayectoria sobre esta. Ajustando dos parámetros (velocidad de deslizamiento del marcador y velocidad angular del disco), cada grupo obtuvo una curva distinta, y el desafío consistió en plantear ecuaciones matemáticas que describieran las trayectorias observadas y evaluar si esas expresiones permitían en efecto predecir sus características. El trabajo permitió a los alumnos familiarizarse con las ventajas y limitaciones de los modelos lineales, así como postular explicaciones para los desvíos entre modelo teórico y observación real, lo que dotó de significación a su aprendizaje del tema de curvas en el plano.

Palabras Clave: Curvas en el plano, Modelos lineales, Aprendizaje significativo**.**

1 Introducción

La actividad académica durante los años 2020 y 2021 estuvo marcada por la pandemia de Covid-19, que trastocó de manera súbita y transversal las prácticas docentes y los recursos puestos en juego. Los docentes debimos adaptarnos y autoformarnos sobre la marcha para encarar la enseñanza en estas nuevas condiciones, lo cual implicó conflictos e inseguridades, pero también un innegable proceso de enriquecimiento. Furman [1], analizando el legado positivo de estas experiencias, afirma que

> Tal vez el tesoro más grande es que la pandemia abrió una puerta inesperada para avanzar en un cambio más profundo en educación que necesitamos hace tiempo. Y aceleró algunos procesos que ya se estaban dando.

Esta autora continúa reflexionando que

> [U]na de las consecuencias del trabajo remoto fue la revisión de los contenidos que se esperaba enseñar [...]. Aparecieron nuevas conversaciones dentro de los equipos pedagógicos de las jurisdicciones y, especialmente, de las mismas instituciones educativas, acerca de qué contenidos y capacidades son en verdad irrenunciables, cuáles no lo son tanto, y cómo garantizar su aprendizaje.

La Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) no fue ajena a esta problemática; más aún, por su calidad de unidad académica de corte masivo experimentó dificultades y contradicciones que no se presentaron, o fueron rápidamente resueltas, en otras instituciones de me-

nores dimensiones. Cantoral [2] ha estudiado el fenómeno de la inercia que se puede observar en una comunidad educativa como consecuencia de su cultura y tradiciones. En el caso de la FCEIA-UNR, se trataba de una facultad con un relativamente escaso nivel de institucionalización de lo virtual, al punto de que muchas asignaturas ni siquiera disponían de un espacio en común en el Moodle de la institución, quedando librado a cada docente solicitar un curso para su comisión. Todo esto debió ser solventado en un período muy breve de tiempo, y en el caso de las asignaturas del área matemática se implementó el dictado virtual. Dichas clases remotas se prolongaron durante todo 2020 y el primer semestre de 2021, pero en el segundo semestre de este último año se decidió llevar a cabo algunas experiencias presenciales de carácter voluntario a modo de aprestamiento para los alumnos para cuando se retornara al dictado normal de las asignaturas. Es en ese contexto que desarrollamos la actividad que describiremos.

1.1 Contexto de la experiencia

El trabajo se desarrolló con un grupo de quince alumnos de la asignatura Cálculo II, divididos en tres equipos de cinco. Se pensó en una primera instancia en llevar a los estudiantes a alguno de los laboratorios de computación, pero dado que las actividades con software que se podrían desarrollar allí también serían factibles de llevar a cabo de forma virtual, se prefirió una actividad en alguno de los laboratorios de Física, en la cual realizaran un experimento en que tuvieran que modelizar un fenómeno en base a los saberes analíticos adquiridos durante el cuatrimestre. Por la etapa de dictado en que nos hallábamos, e intentando conjugar los conocimientos de Cálculo con los de Física I, se decidió que la experiencia ilustraría el tema de mecánica relativa, que trata de los diferentes movimientos que se observan en un objeto desde un observador fijo y uno móvil.

1.2 Marco teórico

Distintos investigadores han estudiado y avalado la cognición matemática fundamentada y corporalizada (GEMC, *Grounded and Embodied Mathematical Cognition*) como una estrategia útil para la fijación de conceptos matemáticos en un contexto de aprendizaje significativo [3]. Esta herramienta apela al uso del cuerpo y de recursos basados en lo corporal para promover la cognición, en un proceso que involucra una relación entre la activación del sistema motor, el procesamiento espacio-temporal, la representación gestual (y su acompañamiento mediante el lenguaje) y la representación formal escrita. Nathan y Walkington [4] establecieron que la GEMC arroja resultados particularmente satisfactorios en aquellas áreas de la matemática que involucran un uso intensivo de la geometría, aunque advierten que las experiencias basadas en esta teoría deben ser cuidadosamente preparadas y dirigidas por los docentes, especialmente en lo tocante a las consignas proporcionadas y al lenguaje utilizado, que deben aprestar al estudiante para establecer las necesarias conexiones entre las observaciones derivadas de la experiencia corporal y el campo teórico que se intenta ilustrar.
En el caso de la actividad descrita en el presente trabajo, los estudiantes pudieron establecer un modelo matemático que permitía describir un objeto geométrico obtenido a partir de una experiencia que involucraba el uso del cuerpo, para luego analizar y discutir su validez.
Por otro lado, la experiencia tuvo en cuenta las consideraciones vertidas por Serres [5] en el sentido de que

> Con el acceso a las personas, por medio del teléfono inteligente, con el acceso a todos los lugares, por el GPS, el acceso al saber está de ahora en adelante abierto. De cierta manera, está siempre y por todas partes ya transmitido.

Aceptamos, eso sí, este análisis del filósofo francés desde una perspectiva crítica. Serres habla del ocaso del saber memorístico: ya no es necesario retener conceptos, puesto que estos están todo el tiempo al alcance de un clic. Entendemos que esto es perfectamente válido en el caso del saber enciclopédico y no tanto en aquel que implica un contenido de abstracción conceptual. Hay abstracciones de un carácter tan complejo que sólo pueden ser construidas fluidamente si el aprendiz ya cuenta con un número importante de conceptos accesibles inmediatamente en su red neuronal (esto es, memorizados). Si debe saltar de página en página web para ir recopilando los conceptos necesarios para el desarrollo de una teoría, le resultará mucho más difícil "unir los puntos" para llegar a un estadio superior de aprendizaje. Por lo tanto, nos propusimos utilizar los recursos tecnológicos en la medida en que estos pudieran liberar al alumno de tareas de cálculo rutinarias para, entonces sí, centrarse en la construcción de las abstracciones, exigiendo sólo haber retenido en la memoria los contenidos ineluctables para dicha construcción (no podemos estudiar trayectorias parametrizadas si tenemos todo el tiempo que buscar en Wikipedia qué es una fun-

ción trigonométrica, por ejemplo). En otras palabras, alentamos a los estudiantes a domeñar el recurso tecnológico como coadyuvante de la construcción de nuevos saberes, y no como medio de paliar la carencia de estos últimos.

Por otro lado, también nos interesó el concepto de "alumno conductor" de Serres, que, en la exégesis de Dussel [6], asume los siguientes postulados:

> En estas transformaciones, Serres subraya algo que tiene grandes consecuencias pedagógicas. Para él, el modo de estar y vincularse con el mundo hoy exige una actividad y una disposición siempre atenta del cuerpo. Es la "gestualidad del cuerpo-piloto" la que se pone en juego frente a una computadora o un celular, no la del pasajero que anda "con la panza al aire y la mirada perdida y pasiva". Por eso "ya sólo hay conductores, sólo hay motricidad; ya no hay espectadores, el espacio del teatro se llena de actores, móviles; ya no hay jueces en el pretorio, sólo oradores, activos; ya no hay sacerdotes en el santuario, el templo se llena de predicadores; ya no hay maestros en el anfiteatro, en todas partes hay profesores…" .

Intentamos, de esa manera, diseñar una experiencia en que los estudiantes pudieran tomar control de su aprendizaje en una medida limitada pero suficiente, al tiempo que ponían en juego su motricidad, usando el movimiento y el cuerpo como medios para el aprendizaje.

1.3 Contenidos involucrados

La experiencia se propuso vincular el tema de sistemas de referencia móviles, perteneciente al capítulo de mecánica relativa en Física I, con el de curvas en el plano descritas como trayectorias parametrizadas, perteneciente al capítulo de cálculo de funciones vectoriales en Cálculo II. Es interesante destacar que de esta manera nos apartábamos de la exposición tradicional del tema de parametrización de curvas en los textos de Cálculo, y más concretamente en el texto de la materia [7], que no alude a la existencia de sistemas de referencia móviles y cómo tratarlos, aun cuando ello no implicaría una complejidad adicional para el tema. En contra de nuestros temores, este desvío respecto al desarrollo clásico del tema fue tomado con naturalidad por los estudiantes.

2 Desarrollo de la experiencia

Se intentó que el trabajo propuesto a los alumnos tuviera una estructura parecida a la de los distintos proyectos que se les requerirá completar en el ciclo profesional de la carrera. Así, se lo dividió en las siguientes etapas:

2.1 Motivación y planteo de la consigna

El tema que se estaba desarrollando en Cálculo II al momento de habilitarse las actividades presenciales era el de trayectorias parametrizadas. Este tema implica adquirir la habilidad matemática de describir una curva cualquiera, sea en el plano o en el espacio, a través de ecuaciones en que cada variable cartesiana sea función de un único parámetro llamado t. Decidimos combinar ese tema con el de Mecánica Relativa, que ven simultáneamente en Física I, que implica ser capaz de explicar los diferentes movimientos que se observan de un objeto desde un sistema de referencia fijo y desde uno móvil (por ejemplo, si estamos en un colectivo no vemos que otro pasajero del mismo vehículo se esté moviendo; en cambio, una persona que lo observe desde la vereda sí lo ve moverse).
A ese efecto, un docente de Física I preparó un dispositivo consistente en un redondel de plástico articulado alrededor de un eje con escasa fricción sobre el cual puede girar libremente.

Se comunicó a los estudiantes que solamente necesitarían tres elementos para desarrollar la experiencia: ese disco de plástico móvil, un marcador de fibra y sus respectivos teléfonos celulares (Fig. 1).

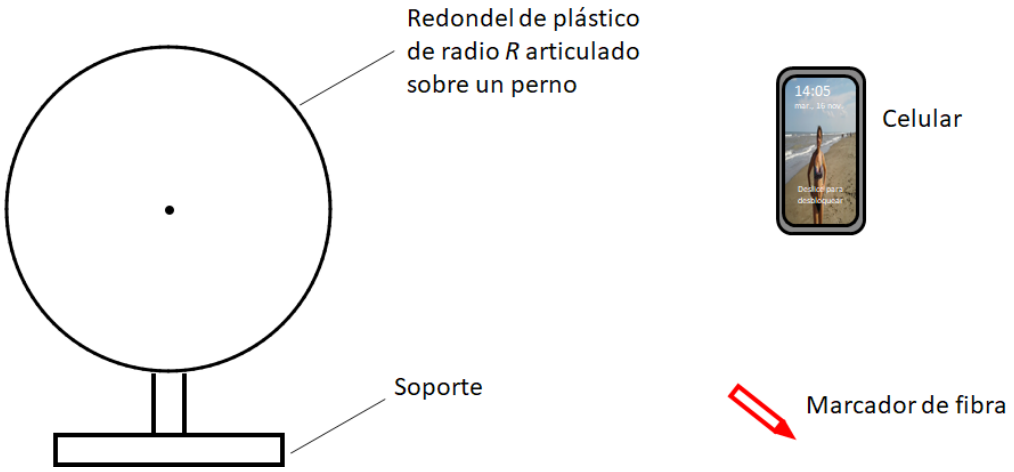


Fig. 1. Los materiales usados para la experiencia.

A continuación se les planteó un experimento mental, consistente en suponer que se hace girar el disco, se apoya el marcador de fibra sobre su centro y se lo desliza verticalmente hacia abajo (Fig. 2).

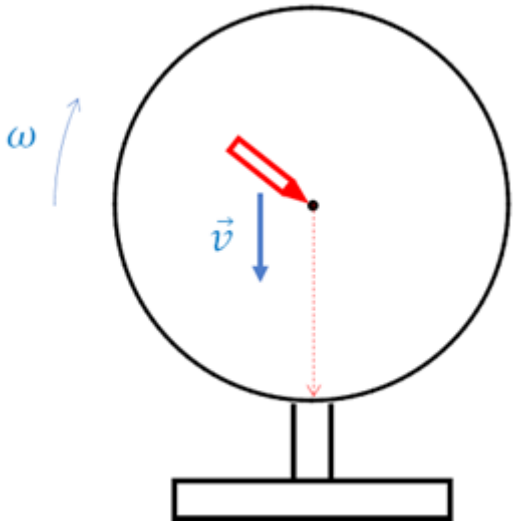


Fig. 2. Experimento mental propuesto a los alumnos.

En este gráfico, representa la velocidad angular del disco (básicamente, cuántos radianes gira por segundo) y representa el módulo de la velocidad del marcador (cuántos centímetros se desliza hacia abajo por segundo). La pregunta que se les formuló fue que postularan qué figura quedaría trazada por el marcador sobre el disco cuando aquel llegara al borde.

Correctamente, intuyeron que quedaría marcada una curva en forma de espiral, y se les preguntó por qué, si el marcador se estaba moviendo en línea recta hacia abajo. Tras alguna discusión, concluyeron (sin que los docentes debieran inducir nada) que la trayectoria vertical del marcador era lo que aprecia un observador fijo, mientras que la trayectoria en espiral era el mismo movimiento pero apreciado por un observador que girara solidariamente al disco, esto es, un sistema de referencia móvil (Fig. 3).

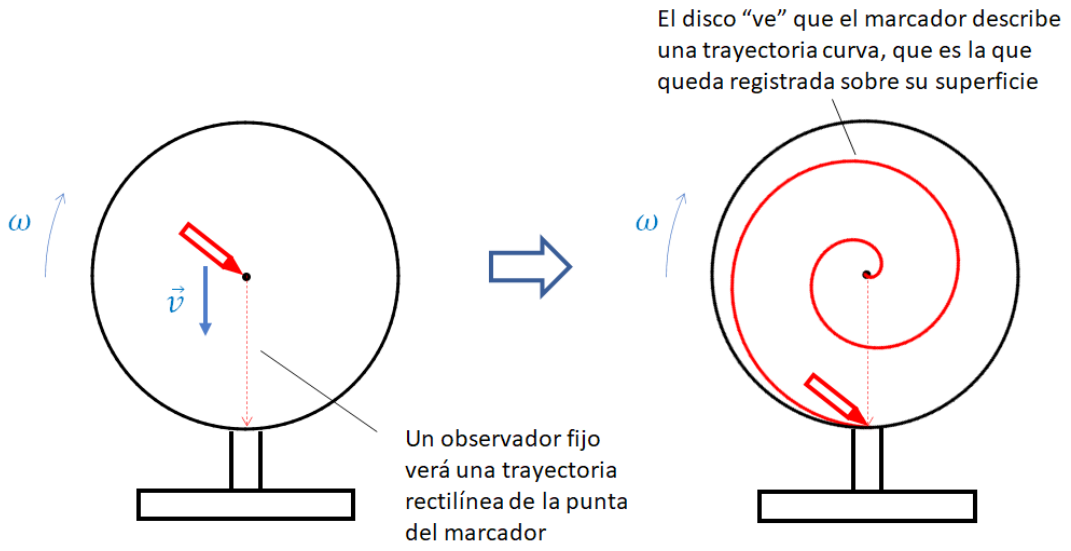


Fig. 3. La experiencia propuesta analizada en abstracto por los alumnos.

Acto seguido se les preguntó de qué dependía la curva que quedaría marcada, ante lo cual respondieron, nuevamente correcta y lógicamente, que dependía de la velocidad angular del disco y de la velocidad del marcador.

Ya preparado el terreno, se les propuso la experiencia: cada grupo haría girar el disco y deslizaría el marcador con una velocidad angular y velocidad del marcador distinta de la de los demás grupos. Obtendrían, así, una curva diferente para cada grupo, y el desafío era obtener la expresión matemática de esa curva, graficarla con un software y compararla con la curva real que había quedado plasmada sobre el redondel.

2.2 Discusión teórica

En una experiencia de esta naturaleza, es importante que el docente sea capaz de dar a los alumnos pautas suficientes como para que puedan abordar el desafío, pero cuidando de no invadir el territorio que corresponde a los propios estudiantes, que es el de alcanzar una etapa superior de conocimiento a partir de sus saberes previos [8]. En el presente caso, los pasos necesarios para traducir las expresiones “lo que aprecia un observador fijo” y “lo que aprecia un observador móvil” a ecuaciones matemáticas no resultaban evidentes, precisamente porque la posibilidad de que un observador se mueva no se suele contemplar en los cursos de Cálculo.

De esa manera, se pidió a los alumnos reflexionar en primer lugar sobre cuáles son los atributos de un observador. Invocando sus conocimientos de Física, respondieron que un observador siempre posee un sistema de referencia. Se les preguntó entonces cuál es la diferencia entre dicho sistema de referencia para un observador fijo y otro móvil y, nuevamente recordando lo visto en Física, respondieron que en el móvil el origen puede cambiar de posición o los ejes girar, o ambas cosas.

A continuación se les pidió que sugirieran un sistema de referencia móvil adecuado para estudiar la curva que quedaría marcada sobre el disco, y propusieron dos opciones: un sistema con origen fijo en el centro del disco, cuyos ejes rotaran, y uno con origen en un punto de la periferia, en el cual tanto el origen como los ejes se movieran. Los docentes recomendaron este último.

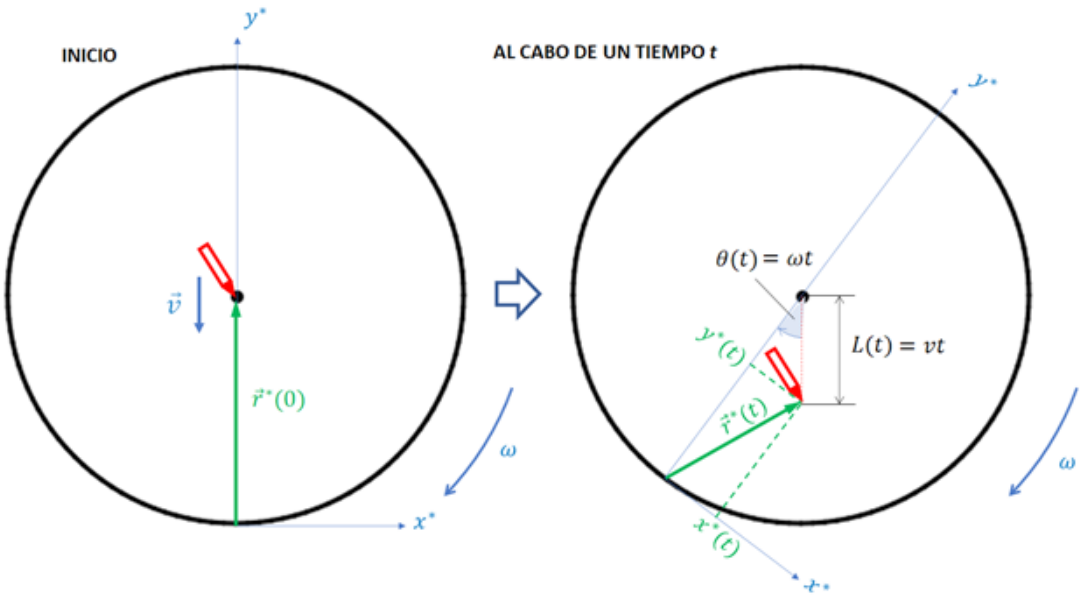


Fig. 4. La posición de la punta del marcador observada desde el origen del sistema móvil al inicio del movimiento y cuando ha transcurrido un tiempo .

De esa manera, se les presentó la imagen de la izquierda de la Fig. 4, con su sistema de referencia móvil marcado, y se les pidió que dibujaran la situación al cabo de un tiempo . Tuvieron en cuenta que a causa de la velocidad angular del disco el sistema de referencia habría rotado, y a causa de la velocidad del marcador este habría alcanzado una posición a una cierta distancia directamente por debajo del centro del disco. Los alumnos fueron capaces de dibujar los ejes y el marcador, y se les preguntó qué significaba poder describir la trayectoria de la punta del fibrón vista desde ese sistema móvil solidario al disco, con lo cual se indujo la noción de que su tarea consistiría en poder escribir el vector posición de la punta con sus componentes expresadas en función del tiempo.

2.3 Desarrollos matemáticos de los alumnos

Los estudiantes establecieron que la distancia recorrida por el marcador $L(t)$ y el ángulo girado por los ejes $\theta(t)$ dependían del módulo de la velocidad del primero v y de la velocidad angular del segundo ω. En esta etapa todavía no eran conscientes de que estaban adoptando un modelo lineal (v y ω ambas constantes). Escribieron así:

$$L(t) = vt \tag{1}$$

$$\theta(t) = \omega t \tag{2}$$

Y así pudieron hallar las componentes $x^*(t)$ y $y^*(t)$ de la posición del fibrón observada desde el sistema móvil:

$$x^*(t) = L(t)\,\mathrm{sen}\big(\theta(t)\big) = vt\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{3}$$

$$y^*(t) = R - L(t)\cos\big(\theta(t)\big) = R - vt\cos(\omega t) \tag{4}$$

2.4 Implementación práctica de la experiencia

El día de la experiencia, y previamente al desarrollo de la misma, se preguntó a los estudiantes si ya sabían cómo iban a medir la velocidad y velocidad angular. Todos traían una propuesta al respecto, comprendiendo que allí era donde intervenía el celular en el experimento. La idea era hacer una marca en la periferia del disco, filmar la experiencia y después comparar dos fotogramas y ver qué ángulo había girado la marca (y con ello calcular la velocidad angular) y qué distancia había bajado el marcador (y con ello calcular la velocidad del marcador). Estuvieron debatiendo un rato cuál era la mejor manera (medirlo sobre una pantalla; imprimirlo y hacer la medición sobre el papel...) hasta que en un momento heurístico una alumna afirmó "ya debe haber una aplicación que te lo hace sola". Efectivamente esas aplicaciones existen, se llaman programas de *tracking* y permiten hacer cálculos sobre el movimiento de un punto en la pantalla; y en cuestión de minutos todos los grupos tenían bajada una.

Pertrechados con ese recurso tecnológico, los distintos grupos convinieron en ir probando diferentes combinaciones de velocidades angulares y velocidades (disco rápido y marcador lento; disco lento y marcador rápido; ambos rápidos; ambos lentos), de modo que cada grupo marcó una espiral diferente sobre el disco.

2.5 Análisis de resultados

Se pidió a los estudiantes que graficaran las curvas paramétricas descritas por las ecuaciones (3) y (4) de acuerdo con las velocidades y velocidades angulares que habían sido capaces de determinar a partir de las filmaciones y los programas de *tracking*.

También se les pidió que cotejaran dichas gráficas con las que realmente se habían plasmado sobre el disco de plástico en el experimento, y se los animó a explicar las diferencias que hubieran entre ambas.

2.6 Presentación grupal

Se requirió que los alumnos entregaran informes escritos y que hicieran una presentación digital en un encuentro virtual. Se estableció una dinámica en que cada integrante del grupo debía hacerse cargo de una parte de la exposición. Se animó a cada grupo a hacer observaciones, objeciones y correcciones al trabajo de sus compañeros en un clima de respeto y honestidad académica.

3 Resultados

Los tres grupos de trabajo pudieron llegar a las relativamente sencillas ecuaciones paramétricas que describen el movimiento de la punta del marcador observada desde un sistema de referencia que se mueve solidariamente con el disco, inclusive identificando dos formas alternativas según que el disco girara en sentido horario (el sugerido por los docentes) o antihorario (el adoptado por uno de los grupos). Pudieron, asimismo, determinar mediante las aplicaciones de *tracking* valores para la velocidad del marcador y velocidad angular del disco. De esa manera pudieron graficar con un software las trayectorias previstas por el modelo y las cotejaron con las que habían realmente quedado marcadas sobre el redondel: en dos casos poniendo ambas gráficas una al lado de la otra (como en la Fig. 5), y en el restante superponiéndolas en un mismo dibujo (Fig. 6).

Al analizar sus resultados, los tres grupos encontraron disidencias entre la gráfica prevista y la efectivamente obtenida. El principal detalle que mencionaron fue que en la espiral teórica cada circunvolución estaba separada de la siguiente por una distancia constante, mientras que en la que había quedado plasmada sobre el disco dicha separación era variable.

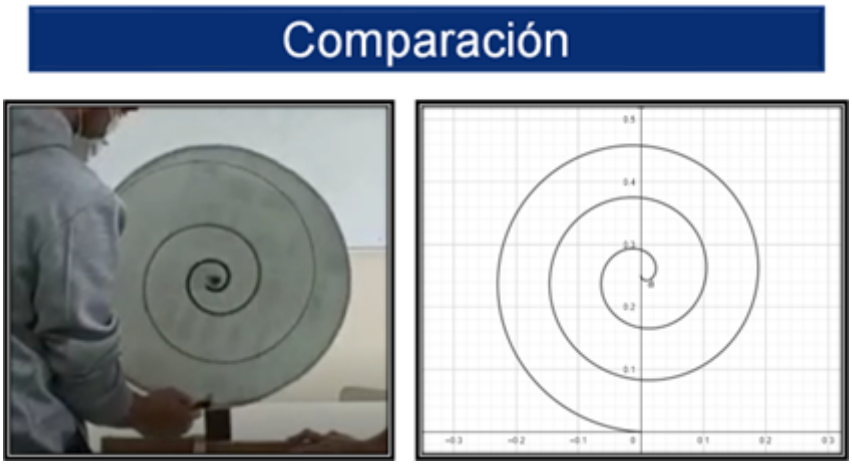


Fig. 5. Gráfica de la trayectoria obtenida por un grupo de alumnos comparada con la que predice el modelo teórico.

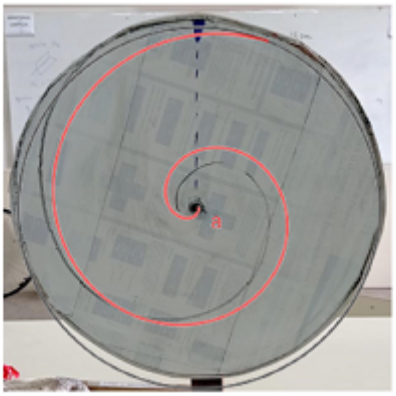


Fig. 6. Comparación de trayectorias por superposición.

Al intentar explicar esto, los grupos comprendieron que en el desarrollo del modelo teórico habían hecho una suposición que no se verificaba en la realidad, que era la de que la velocidad del fibrón y la velocidad angular del disco se mantenían constantes. En un caso argumentaron:

> ω no es contante porque, las fuerzas de fricción (ejercidas por el eje y por el fibrón) disminuyen su módulo. Por ese motivo en el instante inicial la ω es máxima y al final mínima. Lo que genera el efecto de que la distancia entre espirales aumente progresivamente a medida que se frena el disco.

De esta manera, atribuían las disidencias solamente a las variaciones en la velocidad angular del disco, que explicaban a partir de consideraciones físicas. Otro de los grupos adujo:

> Comparando la curva Teórica y la Real podemos observar que nuestra compañera se apresuró en bajar el fibrón los primeros segundos por lo que la curva salió un poco más espaciada y luego disminuyó la velocidad por lo que la curva fue menos espaciada, en cambio, podemos apreciar que la curva resuelta por la graficadora tiene sus distancias perfectamente distribuidas.

Finalmente, en lo que resultó el análisis más completo del fenómeno, el tercer grupo sostuvo:

> Las diferencias obtenidas son por diferentes cuestiones, la principal es que tanto la velocidad media del marcador, como la velocidad angular media del disco, en la curva teórica se consideran constantes. Sin

embargo, en la práctica, ambas magnitudes varían en el tiempo debido a la fricción (rozamiento con el aire, rozamiento en el eje de giro y el rozamiento entre el marcador y el disco) y a la inexactitud del movimiento de las manos humanas.

Aunque confundieron los conceptos de velocidad media e instantánea (lo cual fue aprovechado por los docentes para dejar en claro la diferencia entre ambas), habían logrado identificar todas las fuentes posibles de no linealidad. Este grupo no se limitó a este análisis cualitativo sino que procedió a graficar una aproximación obtenida por muestreo de la distancia real del marcador al centro del disco (en azul) en comparación con su expresión teórica (la recta en rojo, correspondiente a un movimiento rectilíneo uniforme a tasa constante v), como se ve en la Fig. 7.

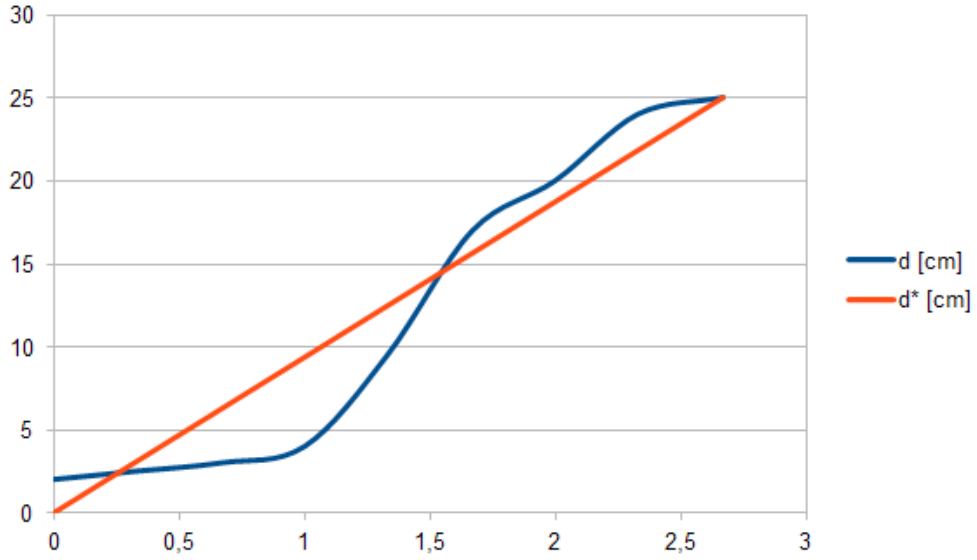


Fig. 7. Distancia de la punta del marcador al centro del disco según el modelo teórico (en rojo) y según los datos del experimento real recogidos por la aplicación de tracking (en azul) graficados por uno de los grupos de trabajo.

Esto permitió matizar las conclusiones extraídas por los grupos. Si bien el modelo teórico no se ajustaba al comportamiento real de la curva obtenida, las diferencias no eran tan pronunciadas, y, fundamentalmente, parecían compensarse a medida que transcurría el experimento: inicialmente la distancia al centro del disco era mayor que la prevista, luego pasaba a ser menor y finalmente volvía a ser superior. Se concluyó que la recta en rojo constituía un ajuste razonable para los datos de la realidad.

Se les preguntó si había alguna magnitud que el modelo sí permitiera predecir con exactitud, y luego de un pequeño debate todos los grupos estuvieron de acuerdo en que las ecuaciones teóricas, unidas a la suposición de que la velocidad y velocidad angular utilizadas eran constantes, eran suficientes para pronosticar con precisión el número de circunvoluciones de la espiral alrededor del centro del disco. En palabras de uno de los grupos: “Al analizar la cantidad de vueltas entre la gráfica y el experimento, encontramos que son análogas, lo cual fue bastante sorprendente. Ambas espirales tienen 3 vueltas y terminan en la parte inferior del disco”. Se preguntó a los estudiantes si eso sería siempre así o si eran capaces de imaginar un escenario en que las ecuaciones basadas en movimientos uniformes no pudieran aportar información confiable sobre el número de vueltas. Propusieron varias alternativas para ello, por ejemplo que el operador humano del experimento deliberadamente aumentara o disminuyera la velocidad del fibrón de manera aleatoria.

La valoración general fue que un modelo lineal puede aportar información útil sobre el comportamiento de un fenómeno, pero hay que tener consciencia de cuáles son sus limitaciones y de qué variables pueden ser pronosticadas con mayor precisión.

4 Conclusiones

Esta experiencia desarrollada por tres grupos de alumnos que concurrieron voluntariamente a lo que podríamos llamar un "respiro presencial" en medio del dictado virtual de una asignatura permitió poner en juego saberes previos y el uso del cuerpo para construir primero un objeto geométrico y luego una descripción del mismo a través de un modelo matemático que presuponía linealidad de dos magnitudes. Los estudiantes pudieron comprobar que ese modelo no permitía una descripción rigurosa del objeto geométrico pero sí de algunas de sus características, lo cual permitió instilar la noción de que los modelos ingenieriles habitualmente sacrifican algunas ventajas en aras de obtener expresiones de aplicación sencilla.

Consideramos que modelos de este tipo promueven la confianza en la matemática por parte del estudiante, al tiempo que, por las características de la experiencia desarrollada, permiten una asimilación vívida y significativa de los temas que ilustran.

Agradecimientos. Deseamos agradecer al Prof. Leonardo Rico la construcción del dispositivo usado para esta experiencia.

Referencias

1. Furman, M.: Enseñar distinto. Siglo XXI Editores, pp. 42 y ss. (2021)
2. Cantoral, R.: La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática (Blumenau, Brazil*), CD-ROM pp. 1-15 (2003)
3. Weisberg, S; and Newcombe, N.: Embodied cognition and STEM learning: overview of a topical collection in CR:PI. *Cognitive Research: Principles and Implications* 2:38 DOI 10.1186/s41235-017-0071-6 (2017)
4. Nathan, M.J.; Walkington, C. : Grounded and embodied mathematical cognition: Promoting mathematical insight and proof using action and language. *Cognitive Research*, 2:9. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0040-5. Accedido el 9 de Julno de 2021. (2017)
5. Serres, M. Pulgarcita. Fondo de Cultura Económica, p. 53 (2013)
6. Dussel, I. Enseñar con medios digitales. Disponible en:https://www.flacso.org.ar/noticias/ensenar-con-medios-digitales-la-reconfiguracion-de-la-distancia-como-nuevo-problema-pedagogico/ (2020)
7. Stewart, J.: Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 7ª edición. Cengage Learning, p. 650. (2012)
8. Aguilar, A.; Ramos, R.: La zona de desarrollo próximo en el aprendizaje del método de descomposición LU, como actividad en el aula de clases. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 971-978). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (2009)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

La Teoría del Cambio Conceptual en la enseñanza de Matemática Superior

Eduardo A. Gago[1], Caren L. Brstilo[1], Vanina A. Amaya[1], Carolina G. Pozzebon[2]
[1] Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas,
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario
Zeballos 1341
eagago@gmail.com, brstilocaren@gmail.com, va_amaya@hotmail.com, cgpozzebon@gmail.com
[2] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue
Buenos Aires 1400
cgpozzebon@gmail.com

Resumen. Basados en la necesidad de implementar nuevas estrategias de enseñanza, se describe en el presente trabajo una manera de programar el dictado de un tema de la planificación de Cálculo Avanzado aplicando la Teoría del Cambio conceptual. Se consideran además, las preconcepciones que tienen los alumnos, donde la mediación entre el contenido de la asignatura y las aplicaciones concretas de modelos sencillos ingenieriles son el eje para desarrollar el tema: Funciones analíticas de Variable Compleja. Para llevar adelante el trabajo en el aula, la propuesta contempla la vinculación de las herramientas computacionales, la modelización y un sistema de flujo de fluidos. En la formación del Ingeniero Mecánico deben contemplarse conocimientos básicos indispensables para abordar el análisis y resolución de sistemas complejos, que involucran una Matemática Superior donde se desarrollen métodos analíticos, cualitativos y numéricos capaces de resolver modelos matemáticos diversos que describan algún sistema o fenómeno de la vida real

Palabras Clave: Cambio conceptual, Ideas previas, Modelización, Funciones complejas.

1 Introducción

En la actualidad, la concepción de la enseñanza en las carreras de ingeniería se halla vinculada con la modelización matemática, es decir estructuras cada vez más complejas aportadas por la ciencia matemática, son más útiles en aplicaciones concretas dentro del campo ingenieril. La clave del rápido traslado de los resultados teóricos al campo tecnológico está en relación al desarrollo del avance computacional, que no puede ser ignorado por la enseñanza.

Los avances tecnológicos de los últimos años han producido un fuerte impacto en Educación Superior ampliando los escenarios educativos. Los campus físicos se cambian o se complementan por otros de carácter virtual, las relaciones dentro de la comunidad se desarrollan preferentemente en formato no presencial y no siempre de forma síncrona. La presencia de campus físicos y campus virtuales para desarrollar los procesos de enseñanza aprendizaje, dan lugar a los nuevos ambientes educativos.

En estos ambientes no sólo aparece un cambio espacio–temporal sino también en las responsabilidades, las tareas, materiales, actividades y evaluaciones. En definitiva, las decisiones sobre el qué, cuándo, dónde, cómo o cuánto enseñar transforman las concepciones tradicionales de los ambientes educativos.

Los espacios de trabajo virtual, los sistemas de modelización y las simulaciones complementan el trabajo del aula real y permiten a los alumnos verificar hipótesis, explorar relaciones dinámicas con el propósito de mostrar un mismo elemento en diversos contextos.

En la formación del Ingeniero Mecánico deben contemplarse conocimientos básicos indispensables para abordar el análisis y resolución de sistemas complejos, que involucran una Matemática superior donde se desarrollen

métodos analíticos, cualitativos y numéricos capaces de resolver modelos matemáticos diversos que describan algún sistema o fenómeno de la vida real.

El proceso de modelización se articula mediante una red de componentes de especificidad determinada, donde el alumno está sometido a la toma constante de decisiones que lo llevan a obtener la conceptualización del mismo.

Basados en estas premisas, se describe en el presente trabajo el análisis de una experiencia aplicando la Teoría del Cambio conceptual considerando además, las preconcepciones que tienen los alumnos. El análisis de la Teoría se implementa en la clase de Cálculo Avanzado, en la carrera de Ingeniería Mecánica, donde la mediación entre el contenido de la asignatura y las aplicaciones concretas de modelos sencillos ingenieriles son el eje para desarrollar el tema: Funciones analíticas de Variable Compleja.

2 Marco Teórico

Se presentan dentro del marco teórico dos aspectos fundamentales a considerar en el análisis de la Teoría del Cambio Conceptual:

- Las ideas previas.
- El Cambio conceptual.

2.1 Ideas previas

Uno de los grandes problemas al que se enfrenta la enseñanza de las ciencias es la existencia en los alumnos de fuertes concepciones alternativas a los conceptos científicos, que resultan muy difíciles de modificar y, en algunos casos, sobreviven a largos años de instrucción [1].

Las ideas previas, también conocidas como concepciones alternativas, preconceptos, errores conceptuales, ciencia de los niños, etc., han sido tratadas en numerosas publicaciones, impresas y electrónicas [2].

Las ideas previas son construcciones que los sujetos elaboran para dar respuesta a su necesidad de interpretar fenómenos naturales o conceptos científicos, y para brindar explicaciones, descripciones o predicciones. Son construcciones personales, pero a la vez son universales y muy resistentes al cambio; y en ocasiones son persistentes.

Mortimer, cuando analiza el cambio de perfil conceptual en la educación, considera que pueden existir ideas previas relativamente aisladas, y que las mismas implican la formación de una red conceptual (o red semántica) o esquema de pensamiento más o menos coherente, pero diferente al esquema conceptual científico [3].

El esquema de pensamiento alternativo se conoce entre los investigadores educativos como esquema representacional. Si los estudiantes encuentran información que contradiga sus esquemas representacionales es difícil para ellos aceptarla, porque les parece errónea. En estas condiciones actúan de diversas maneras: la ignoran, la rechazan, no creen en ella, la reinterpretan a la luz de sus propios esquemas representacionales, o bien, llegan a aceptarla haciendo sólo pequeños cambios en sus concepciones [4]. Es ocasional que la información que parece anómala sea aceptada y obligue al estudiante a revisar su esquema representacional

Por ello, es muy importante conocer los esquemas representacionales de los estudiantes y reflexionar sobre la importancia que tienen dichos esquemas en la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia. Los investigadores de la educación han coincidido en la necesidad de transformarlos en conceptos más cercanos a las concepciones científicas.

Es necesario reflexionar sobre la naturaleza del cambio conceptual con el fin de plantear cambios en la metodología de enseñanza.

2.2 Cambio conceptual

La transformación de los esquemas representacionales en concepciones científicas se ha denominado cambio conceptual. Una de las principales causas de estudios sobre las ideas previas es que se hace necesaria la modificación de estas ideas como medio para lograr un aprendizaje significativo de los conceptos y esto se debe a que, las ideas de los alumnos ofrecen una gran resistencia al cambio.

Se entiende por cambio conceptual aquel que consiste, en esencia, en modificar las ideas previas de los alumnos y sustituirlas por las ideas y conceptos aceptados por la comunidad científica, dado esto, se entiende que en la bús-

queda por encontrar formas de lograr el cambio conceptual, la situación es mucho más compleja que pretender una sustitución de ideas previas específicas por las correspondientes ideas científicamente correctas [5].

A comienzos de los años 80 un grupo de investigadores en educación de la Universidad de Cornell, dirigidos por el investigador en tecnología educativa Posner, realizaron los primeros desarrollos de la llamada Teoría del Cambio Conceptual, emparentada tanto con las ideas piagetianas de desequilibrio y acomodación, como con la teoría de Khun de las revoluciones científicas [6].

Piaget explicó cómo un conocimiento nuevo produce un desequilibrio en la mente de un individuo que exige una acomodación de una conducta y una asimilación de una nueva conducta a la estructura mental preexistente, para recuperar el equilibrio, produciéndose una adaptación cognitiva, que permanecerá estable hasta que un nuevo desequilibrio se produzca [6].

Por su parte, Kuhn explicó de manera similar el mecanismo de la evolución de la ciencia describiendo el modo en que un paradigma científico imperante entra en estado de crisis en determinado momento histórico, cuando es incapaz de explicar o dar soluciones a un problema particular identificado por la comunidad científica.

Es entonces cuando se puede producir la revolución si el paradigma es reemplazado por otro modelo alternativo que promete proveer la explicación o la solución buscada, adoptándose entonces un nuevo marco de pensamiento que mantendrá su vigencia hasta que se produzca una nueva revolución [6], [7], [8].

De manera similar, en todo proceso de adquisición de conocimientos el alumno cuenta con un bagaje de conocimientos anteriores de origen diverso: por un lado tiene ciertos conocimientos intuitivos, que provienen de su experiencia cotidiana y conforman una teoría ingenua de la realidad, y por otro lado cuenta con sus aprendizajes académicos previos.

Si estos conocimientos anteriores resultaran coherentes con los nuevos contenidos a los que tiene acceso en su experiencia educativa, no se producirá conflicto alguno, la nueva información simplemente se agregará a la anterior, y el alumno conservará su marco teórico previo y continuará aplicándolo sin modificación a la nueva situación.

Pero en numerosas ocasiones la nueva información resulta de algún modo incompatible con la preexistente y es allí donde se produce un conflicto cognitivo. Si el mismo se resuelve de manera adecuada, se producirá una reorganización de los conocimientos en la mente del alumno, dando lugar a lo que se denomina un cambio conceptual [9].

3 Criterios Metodológicos

La problemática de fondo de como impartir la enseñanza reside en crear las condiciones para que los esquemas de conocimiento que construye el alumno evolucionen en un sentido determinado. La cuestión clave no reside en si el aprendizaje debe conceder prioridad a los contenidos o a los procesos, sino en asegurarse de que sean significativos y funcionales.

El alumno necesita disponer de conocimientos previos suficientes a partir de los cuáles poder abordar los contenidos propuestos, con el fin de establecer relaciones entre ellos lo más complejas y ricas posibles que le permitan aumentar el significado de sus aprendizajes.

Por todo ello es conveniente ayudar en un principio al alumno a recordar, reordenar o asimilar aquellos conocimientos previos necesarios relacionados con el contenido propuesto, con el fin de abordar con éxito los aprendizajes programados, diseñando puentes cognitivos entre el nuevo contenido y la estructura de conocimiento que posee el alumno -organizadores previos- y elaborar las estrategias adecuadas para poner a los alumnos en situación favorable a aprender. Ello implica una intensa actividad por parte del alumno y un real compromiso del docente en lo que hace a la direccionalidad, coordinación y ayuda pedagógica.

En tal sentido, se desarrolla un aprendizaje integrado teórico-práctico y teórico-tecnológico en un intento de experiencia diferente basado en: el diálogo, la convergencia de criterios y la participación activa del alumno. Hay que lograr que el alumno salga de su rol pasivo, adquiriendo capacidad memorística que no le permite pensar por cuenta propia y crear.

Además, la disponibilidad generalizada de las nuevas tecnologías interactivas de la información y la comunicación abren una inmensa cantidad de posibilidades que se concretan con el desarrollo de nuevos modelos de enseñanza aprendizaje y dado que el trabajo de análisis ingenieril se asienta en un sistema y comunicación mediada por ordenador se considera importante generar un espacio en el que se produzca un conjunto de actividades, intercambios y relaciones comunicativas como el eje fundamental del proceso educativo [10].

La clase se desarrolla en el Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Matemática de la UTN FRRo, donde

se realizan actividades que brindan apoyo a las cátedras del área Matemática para cumplimentar los aspectos del cálculo numérico, simbólico y gráfico de las asignaturas del área. El equipo docente está involucrado en la implementación de nuevas estrategias metodológicas para el desarrollo de los contenidos curriculares, generando el material didáctico necesario para la realización de talleres que se dictan en primero y segundo año de las carreras de Ingeniería.

Las actividades didácticas analizadas en la clase de Cálculo Avanzado siguen los lineamientos propuestos según la clasificación desarrollada por Posner y sus colaboradores.

4 Análisis de la clase basado en el modelo desarrollado por Posner y sus colaboradores

El análisis de la clase se realiza mediante una estrategia didáctica tomando como premisa la Teoría del Cambio Conceptual de acuerdo al modelo desarrollado por Posner et al en 1982. La estrategia propuesta por estos autores se desarrolla en siete fases que tienen su basamento en un aprendizaje constructivista [6].

Los siete momentos que se describen para proyectar el desarrollo de la clase son: Momento de motivación, Momento de expresión de las ideas previas, Momento de búsqueda, Momento de movilización y conflicto, Momento de estructuración, Momento de refuerzo y transferencia, y finalmente Momento de evaluación.

El tema de la clase se denomina: Funciones analíticas de variable complejas. La experiencia se realiza en el Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario y se respeta el paradigma cualitativo encuadrado en lo que se conoce como experiencias de cátedra o experiencias de clase. Los 25 alumnos que integran la clase son de la carrera Ingeniería Mecánica dentro de la asignatura Cálculo Avanzado, asignatura del tercer nivel.

4.1 Primera fase: Momento de motivación

La motivación juega un papel fundamental para logar que el proceso enseñanza aprendizaje sea funcional y significativo. Para la formación de los ingenieros y otros profesionales de la rama de la ingeniería, es atractivo utilizar modelos y métodos que brinda la matemática, ya que son ellos los que deben ofrecer las soluciones más óptimas a los distintos modelos planteados para poder alcanzar el pensamiento abstracto.

En referencia a este momento se puede entender: Es la fase inicial que pretende motivar al alumno para que la nueva situación de aprendizaje, es decir, despertar en él, una curiosidad. En esta etapa se tiene que movilizar al alumno comprometiéndole afectivamente para las nuevas actividades a realizar [11].

Con este propósito, en primera instancia se presenta a los alumnos para su análisis un sistema de flujo bidimensional de un fluido incompresible, no viscoso correspondiente a un campo irrotocional que se mueve en estado estacionario para una expresión del potencial complejo de velocidad.

Otra cuestión a tener en cuenta es que la presentación de una situación sencilla y real para introducir el nuevo contenido, es responder la constante pregunta que reiteran los estudiantes a los docentes de Matemática ¿Y esto para que me sirve?

La elección del ejemplo motivador se fundamenta en el hecho que existe una relación directa entre los conceptos de las Funciones analíticas de Variable Compleja con la velocidad de un fluido ideal y otros parámetros físicos con los que se trabaja en el modelo previsto.

El modelo propuesto a los alumnos para su análisis es:

> Estudiar el movimiento de un fluido ideal, considerando que la constante $a > 0$, el potencial complejo de velocidad para dicho fluido es:
>
> $$F(z) = V_o \left(z + \frac{a}{z}\right)$$

4.2 Segunda fase: Momento de expresión de las ideas previas

Luego de la fase inicial en la que se presenta el caso en estudio, se diseña un cuestionario para identificar la infor-

mación previa de la que disponen los alumnos en relación a la nueva información y que resulta de utilidad para incorporar los conceptos del tema a enseñar (Funciones analíticas de Variable Compleja).

El cuestionario que se les suministra a los alumnos se presenta a continuación:

1) Dada la función de variable compleja cuya ley es $f(z) = \frac{1}{z}$
   a) Hallar gráfica y analíticamente la imagen en el plano complejo w, de la región del dominio complejo $(x-2)^2 + y^2 < 1$ donde $z = x + jy$
   b) ¿Sería posible analizar la consigna del punto anterior (a) para una región del dominio complejo $x^2 + y^2 < 1$ donde $z = x + jy$? ¿Por qué?
2) Sea $f: R^2 \to R$, si $lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5$ por la trayectoria C_1 y $lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5$ por la trayectoria C_2 donde $C_1 \neq C_2$ (para dos trayectorias diferentes), entonces se puede asegurar que$lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5$ para toda trayectoria. Obtener conclusiones.
3) Si $f: R \to R$ un función con dominio D_f, y sean c, $c + \Delta x \in D_f$. Defina derivada de f en un punto de abscisa $x = c$, y función derivada. Establezca sus diferencias.
4) ¿Cómo define velocidad instantánea de una partícula?
5) ¿Las rectas de ecuaciones $r_1)\ y = mx + h$ y $r_2)\ x - m\,y + c = 0$, son perpendiculares? Analice además, el caso de las rectas de ecuaciones: $r_1) \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 7t \end{cases} t \in R$ y $r_2)\ 14x + 6y + 1 = 0$
6) ¿Qué condiciones deben cumplir dos curvas para ser ortogonales?
7) Si $f: R^2 \to R$ ¿Cuándo se dice f es armónica en R^2?

Los alumnos disponen en el Laboratorio de bibliografía específica para poder indagar y responder a todas las preguntas del cuestionario. Además, la conectividad a internet de todas las PC ayuda a poder explayarse y buscar material en toda la web.

Después de responder y discutir todas las respuestas se redacta en forma escrita un documento conjunto que sirve como guía para seguir adelante con el aprendizaje del tema.

4.3 Tercera fase: Momento de búsqueda

En esta etapa se pretende que mediante la interacción alumno-alumno y docente-alumno establezcan, analicen, discutan y formalicen los conceptos teóricos inherentes a las Funciones analíticas de Variable Compleja. Para ello se diseñan una serie de actividades, que se complementan con las ideas previas que ellos poseen.

Se reúnen los grupos de alumnos con la misma conformación anterior con el material bibliográfico sugerido y con el acompañamiento de los docentes se llega a comprender y obtener una guía tutorial teórica de los conceptos a utilizar en la propuesta de trabajo. De acuerdo a la solicitud de los docentes, luego de escuchar y revisar las conclusiones a que llega cada grupo se hizo un debate sobre el tema para proponer luego un marco teórico.

Con la analogía de la definición de derivada de una función en un punto para una función de una variable real, se consulta cómo definen los alumnos la derivada de una función en un punto para una Función de Variable Compleja [13].

La derivada de una función real f de una variable real x con $x = x_o$ está dado por la expresión:	La definición de la derivada de la función f de la variable compleja z en el punto z_o, es entonces:
$f'(x_o) = \lim_{x->x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$	$f'(z_o) = \lim_{z->z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$

Las metáforas y analogías constituyen un aspecto esencial en el proceso de formación mental de las representaciones del mundo que nos rodea y de las inferencias que se pueden establecer entre ellas [14].

Las metáforas y analogías si bien son definidas iguales, hay que destacar que son expresiones distintas, porque x_o es un número real, así que puede representarse por un punto en la recta real. Mientras que en referencia a la variable compleja y a las funciones dependientes de ellas, se sabe que se requiere un plano complejo para representar a los números complejos, así z_o es un punto fijo en el diagrama de Argand, en algún lugar del plano complejo.
Una metáfora es efectiva cuando existe una interacción entre los componentes término expresado y análogo con-

trastado. Por ejemplo, en la metáfora: un virus es un intruso invisible, el término virus no debe ser similar, pero tampoco demasiado diferente, del análogo intruso invisible para que la metáfora sea efectiva [14].

Luego se les solicita a los alumnos desarrollar la definición por dos caminos diferentes, el primer camino que se toma es $z - z_o = \Delta x$, y el segundo camino que se sigue es $z - z_o = j\Delta y$. A partir de ambos desarrollos les permite a los alumnos concluir [13], [15]:

- Una función de Variable Compleja $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ unívoca en alguna región R del plano z, es analítica en dicha región R si existe la derivada $f'(z)$ en todo punto z de dicha región R .
- Una condición necesaria para que f sea analítica en una región R del plano complejo z del dominio de f, es que en R, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann que se muestran en las ecuaciones (1) y (2). Además si las derivadas parciales observadas en las ecuaciones (1) y (2) son continuas en R, entonces dichas ecuaciones son condiciones suficientes para que f sea analítica en R.

Resolver una situación propuesta por el docente para buscar en el alumno información de sus conocimientos de los tópicos tratados en la estrategia, la cual variará según el tipo de situación: bibliográfica, experimentos, intervención del profesor y audiovisual [11].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \textbf{(2)}$$

Las funciones que satisfacen las condiciones (1) y (2) se dicen conjugadas y este tipo de funciones cumplen con la propiedad de ortogonalidad, quiere decir que las gráficas de las curvas de la forma (3) y (4) son ortogonales.

$$u(x,y) = k_1 \quad \textbf{(3)}$$

$$v(x,y) = k_2 \quad \textbf{(4)}$$

Si además las derivadas parciales segundas de u y v son continuas en R, se cumple la ecuación de Laplace que para el caso de las variables u y v son las que se observan en las ecuaciones en las ecuaciones (5) y (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{(5)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{(6)}$$

La derivada de la función f puede calcularse por medio de la ecuación expresada en (7):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textbf{(7)}$$

Con las definiciones, desarrollos y conclusiones que se han expuesto, los alumnos podrán elaborar un material teórico escrito para poder continuar con la actividad.

4.4 Cuarta fase: Momento de movilización y conflicto

En esta etapa los alumnos deben modelizar el sistema en estudio tratando de relacionar los conceptos teóricos ya

formalizados con las variables ya definidas que conformar el sistema dinámico.

El potencial de velocidad complejo f es una Función analítica de Variable Compleja compuesta por un par ordenado en el plano, cuya parte real es el potencial de velocidad $\emptyset$ y la parte imaginaria es la función de corriente φ [16]. O sea,

$$F(z) = \emptyset(x,y) + j\varphi(x,y) \quad \textbf{(8)}$$

La velocidad de circulación del fluido $w = u + jv$, es el gradiente del potencial de velocidad $\nabla\emptyset = w$. Entonces la velocidad del fluido es la expresada en (9)

$$w = \emptyset_x(x,y) + j\emptyset_y(x,y) \quad \textbf{(9)}$$

y tal que la derivada de la ecuación (8) es la expresada en la ecuación (10)

$$F'(z) = \emptyset_x(x,y) + j\varphi_x(x,y) \quad \textbf{(10)}$$

Como *F* es una función analítica cumple con las condiciones expresadas por las ecuaciones (1) y (2) (Cauchy-Riemann). En este caso las curvas equipotenciales son aquellas tales que $\emptyset(x,y) = k_1$, y son ortogonales con las líneas de corriente que son las curvas de ecuación: $\varphi(x,y) = k_2$ (con k_1 y k_2 constantes) [16].

Con el modelo obtenido se puede deducir que la velocidad del fluido es el complejo conjugado, derivada de la función *F* expresada en la ecuación (11).

$$F'(z) = \emptyset_x(x,y) - j\emptyset_y(x,y) \quad \textbf{(11)}$$

Resultando, según expresada en la expresada en la ecuación (12)

$$w = \overline{F'(z)} \quad \textbf{(12)}$$

Para poder calcular el módulo de la velocidad se utiliza la expresión indicada en la ecuación (13)

$$|w| = |F'(z)| \quad \textbf{(13)}$$

4.5 Quinta fase: Momento de estructuración

En esta etapa se resuelve el modelo planteado en la primera fase de motivación. Con este propósito se orienta el trabajo de los alumnos con las consignas que se enuncian a continuación [16]:

Se propone ahora estudiar el movimiento del fluido presentado como motivador en la etapa inicial de la clase, y considerando que la constante $a > 0$, el potencial complejo para dicho fluido es:

$$F(z) = V_o \left(z + \frac{a}{z}\right)$$

a) Obtener las ecuaciones de las líneas de corriente y las curvas equipotenciales
b) Realizar una representación gráfica de las trayectorias de las ecuaciones obtenidas en el ítem anterior
c) De las gráficas obtenidas en el punto b, analizar cómo es el régimen del fluido
d) Analizar cómo será el perfil de velocidades en los distintos puntos de su trayectoria
e) Individualizar los puntos estacionarios del sistema.

La existencia de las nuevas explicaciones, supone que los alumnos han establecido modificación en los conocimientos almacenados en las estructuras mentales ante la situación planteada, la confrontación por parte de los estudiantes con las nuevas ideas, supone que estos han establecido distintas concepciones conceptuales a las que traían antes de la experiencia con la estrategia de cambio conceptual, lo que supone que los alumnos originaron nuevas estructuras mentales [11].

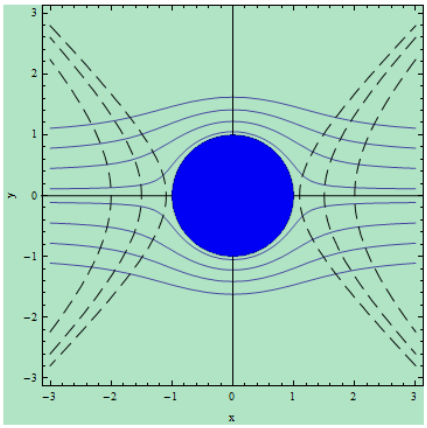


Fig. 1. Líneas de corriente y curvas equipotenciales (Fuente: Elaboración propia).

Del análisis propuesto y mediante la gráfica de la Fig. 1, los alumnos establecen las siguientes conclusiones:

- Las curvas paralelas al eje *x* indican los caminos que siguen las partículas de fluido. Cuando $\varphi = 0$ corresponde a una trayectoria que se mueve en el eje *x*, o en el contorno de la circunferencia de radio a.
- En la Fig. 1, las líneas equipotenciales están marcadas con línea de puntos y son ortogonales a las líneas de corriente que están dibujadas en trazo lleno.
- La circunferencia de radio a representa una trayectoria; y puesto que como no puede haber flujo a través de una trayectoria, se puede considerar como un obstáculo circular de radio a colocado en el camino del fluido.
- La velocidad compleja del fluido posee un valor variable cerca del obstáculo y su módulo corresponde al expresado en la ecuación (14)

$$|v| = V_o \sqrt{1 + \frac{a^4 - 2a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} \qquad \textbf{(14)}$$

- Si se aleja del obstáculo la velocidad asume el valor $v = V_o$, es decir el fluido está corriendo en la dirección del eje *x* positivo con velocidad constante V_o. Los puntos estacionarios del sistema son aquellos donde la velocidad es cero y están dados por los valores de $z = \pm a$.

Los alumnos elaboran la gráfica de la Fig. 1 con el software MATHEMATICA. Los estudiantes adquieren los conocimientos previos del uso del programa por medio de los talleres de Análisis Matemático I, Álgebra y Geometría Analítica, y Análisis Matemático II que se dictan en la Facultad en primer y segundo en todas las carreras de Ingeniería.

4.6 Sexta fase: Momento de refuerzo y transferencia

Se proponen en esta fase algunas actividades que permiten dar soporte y sedimentar los contenidos que se pusieron en juego en el ejemplo motivador, y que sería posible y estimable, resolver en virtud de haber aprendido el tema.

Afianzar lo aprendido y transferir las recientes adquisiciones mentales es parte del proceso de la estrategia de cambio conceptual; y en consecuencia deben presentarse a los alumnos actividades que los fuercen a aplicar las nuevas estructuras adquiridas [11].

Se desarrollan dos actividades para afianzar lo aprendido. La primera actividad está relacionada con el flujo de calor alrededor de una tubería y la segunda con la función de corriente de un sistema de transmisión de calor.

Se pretende que los alumnos puedan resolver estos casos de manera autónoma e independiente con el uso de los recursos computacionales disponibles en el Laboratorio.

1º Caso: Análisis del flujo de calor alrededor de un cilindro de sección transersal circular
Se propone analizar el flujo de calor alrededor de un cilindro de paredes adiabáticas, para una temperatura compleja cuya la ley es:

$$F(z) = A\left(z + \frac{k}{z}\right)$$

donde A es una constante positiva, y se considera la constante $k > 0$.

Se plantearán los siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación existe entre el potencial de temperatura y la función de corriente?
b) ¿Cuáles son las ecuaciones de las isotermas y las líneas de flujo de calor?
c) ¿Cuál es la representación gráfica de las trayectorias anteriores?
d) ¿Cómo es el perfil de temperaturas en los distintos puntos de su trayectoria?
e) ¿Cuáles son los puntos estacionarios?
f) ¿Cuál es la ecuación que mide la cantidad de calor en todos los puntos del plano?
g) Simular que sucedería si el flujo de calor dado
   g1) estuviera circulando por un cilindro que tuviera sección transversal elíptica
   g2) no se enfrenta con el cilindro de paredes adiabáticas, y tuviera un sumidero en el origen.

2º Caso. Análisis del flujo de calor conocida la función de corriente
La función de corriente, en un sistema de transmisión de calor, es:

$$w(x,y) = -A\ arctg\ \frac{2ky}{x^2 + y^2 + k^2}$$

donde A es una constante positiva, y se considera la constante $k > 0$.

Se plantearán los siguientes interrogantes:

a) ¿Cuál es el potencial de temperatura?
b) ¿Cuáles son las ecuaciones de las isotermas y las líneas de flujo de calor?
c) ¿Cuál es la representación gráfica de las trayectorias anteriores?
d) ¿Cómo es el perfil de temperaturas en los distintos puntos de su trayectoria?
e) ¿Cuáles son los puntos estacionarios?
f) ¿Cuál es la ecuación que mide la cantidad de calor en todos los puntos del plano?

4.7 Sexta fase: Momento de evaluación

Esta es la última fase del proceso e incluye la programación de las actividades que se les presenta a los alumnos para evaluar el contenido apropiado.

A modo de ejemplo, se citan a continuación propuestas de ejercicios de evaluación

Evaluación
Dados los siguientes los siguientes potenciales de flujo de velocidad. Realizar un análisis de cada sistema para cada uno de los casos

1) $F(z) = a\ z$
2) $F(z) = a\ z^2$ (para valores de $x > 0$ y $y > 0$)
3) $F(z) = j\ a\ lnz$
4) $F(z) = a\ z^4$
5) $F(z) = a\frac{1+z}{1-z}$

5 Conclusiones y trabajos futuros

A través de la tarea docente, se pretende que el alumno que aprende adquiera una sólida formación en cuestiones de Matemática aplicada, herramienta imprescindible en las cuestiones de ingeniería. Sin embargo, se tiene conciencia de las limitaciones para lograr que el aprendizaje sea, en muchos casos, significativo, es decir, lograr que el alumno internalice los conocimientos. En un intento de aproximarse a dicho logro se trata de situar y reflexionar sobre la práctica educativa. El escenario es el aula y el instrumento dominante el discurso curricular [17].

Cada profesional lleva la marca de los profesores que lo formaron [18]. Así, distintos profesionales se reconocen, por ejemplo, por la forma de expresarse. Es notoria la diferencia entre el lenguaje de un matemático y la de un profesional de las ciencias sociales. Cuando los especialistas en matemática hablan parecería que resuelven teoremas pues no pueden escapar del razonamiento deductivo, o sea se expresan con implicancias.

Para aplicar la teoría del Cambio conceptual se requiere que el estudiante sienta una insatisfacción respecto a sus concepciones existentes, un deseo de ir más allá de cumplir la tarea. Es por esto que la nueva concepción a enseñar debe ser mínimamente entendida, planteada en forma clara y precisa.

En cuanto a las etapas necesarias para que se produzca el cambio conceptual, y aplicándolo al caso de la clase que se expuso en este trabajo, se puede decir que el problema motivador produce una insatisfacción en los estudiantes, si bien ellos saben que en muchas oportunidades tendrán que estudiar la velocidad de un fluido, no lo podrán abordar desde el dato inicial que es potencial complejo de velocidad.

En cuanto a la nueva concepción que se pretende enseñar, que es aprender la teoría a partir de la modelización de un sistema, las etapas que se proponen deben ser paulatinas y se estima que permitan la construcción del nuevo conocimiento mediante la resolución del problema motivador.

La nueva concepción además, debe ser atractiva para los alumnos de Ingeniería Mecánica ya que el modelo propuesto se asemeja a interrogantes que les pueden aparecer en su futura vida profesional.

La ejercitación que se propone luego del desarrollo del ejemplo motivador, corresponde a un sistema hidráulico, puede ser beneficiosa, ya que les puede resultar útil para resolver los problemas que tratan sobre el análisis del flujo de calor.

Los programas de matemática contribuyen, a través de su linealidad a la no integración de los temas. Los mismos se constituyen así en compartimentos estancos a pesar de la relación que guardan entre sí y que no son debidamente destacados. De esta manera, el alumno no incorpora dicho programa como una totalidad.

Sin embargo, si surge la necesidad de la utilización de matemática en un problema, ¿Qué teoría matemática está a disposición de los docentes para que los nuevos conocimientos se incorporen de manera significativamente utilizando el valioso instrumento de la resolución de modelos que sean motivadores?

Tal vez, la teoría del Cambio conceptual no sea el camino para concretar la tarea, o a lo mejor sí lo sea, pero lo importante es intentar experimentar la aplicación de los recursos pedagógicos disponibles de los procesos de investigación.

En el futuro se estima aplicar al mismo tema otras teorías del aprendizaje y comparar cuál es la más apropiada para optimizar el proceso de enseñanza que redunde en nuevos modos de razonar y pensar por parte de los alumnos.

Referencias

1. Bello, S.: Ideas previas y cambio conceptual. *Revista De Aniversario*. Vol 15, Nº 3, pp. 210-217 (2004).
2. Vega, F.; Gallegos, C.; Herrera, M.; Flores, F.: Dificultades conceptuales para la comprensión de la ecuación de Bernoulli. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*. Vol. 14, Nº 2, pp. 339-352. (2017).
3. Mortimer, E.: Conceptual change or conceptual profile change? *Science & Education*, Nº 4, pp. 267-285 (1995).
4. Mulford, D.; Robinson, W.: An inventory for alternate conceptions among first semester General Chemistry students, *Journal of Chemical Education*, Vol. 79 Nº 6, 739-744 (2002).
5. Campanario, J.; Otero J.: Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: Las pautas de pensamiento, las concepciones espistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias, *Enseñanza de las ciencias*, pp. 155-169 (2000).
6. Posner, G.; Strike, K.; Hewson, P.; Gertzog, W.: Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change, *Science Education*, pp. 221-227 (1982).
7. Kuhn, T. (2006). La Estructura de las Revoluciones Científicas. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
8. Del Puerto, S.; Seminara, S.: Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la Geometría Analítica. *Proceedings de las Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería* (JEIN 2011), Vol. 1, pp. 60-70 (2011).
9. Vosniadou, S.; Vamvakoussi, X.: Examining Mathematics Learning from Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments, en: Instructional Psychology: Past, Present and Future Trends. Sixteen Essays in honour of Erik De Conte, Oxford: *Elseivier Ltd*., pp. 26-54 (2006).
10. Tinnirello A.; Gago E.; Szekieta, P. et al: Cambios metodológicos en la enseñanza en Ingeniería: Afianzamiento de la calidad del proceso en Ciencias Básicas. *Proceedings del Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería* (CAEDI 2006), Vol 1, pp. 532-538 (2006).
11. Mahmud, M.; Gutiérrez, O.: Estrategia de enseñanza basada en el Cambio Conceptual para la transformación de Ideas Previas en el aprendizaje de las ciencias*. Revista Formación Universitaria*. Vol. 3, Nº 1, pp. 11-20 (2010)
12. Fairstein, G.; Gyssels, S.: ¿Cómo se aprende? Colección Programa Internacional de Formación de Educadores Populares. Federación Internacional Fe y Alegría y Fundación Santa María, en: www. scientificcommons.org/francisco_javier_garcía tapia, pp. 38 (2004).
13. Brown, J; Churchill, R.: Variable compleja y aplicaciones, McGraw-Hill, pp. 17-27 (2004).
14. Fernández González, J.; González González, B..; Moreno Jiménez, T.: la modelización con analogías en los textos de ciencias de secundaria, *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, pp. 430-439 (2005).
15. James, G.: Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Prentice Hall, pp. 26-32 (2002).
16. Spiegel, M.; Lipschutz, S.; Schiller, J.; Spellman, D.: Variable Compleja, McGraw-Hill, pp. 235-255 (2009).
17. Strike, K.; Posner, G.: A conceptual change view of learning and understanding. En: West, L. & Pines, L. (eds). *Cognitive structure and conceptual change. Academic Press*, Vol. 2, Nº 3, pp. 211-231 (1985).
18. Ageno, M.: La problemática del aprendizaje: del tiempo cronológico al tiempo lógico. UNR Editora (1991).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Preguntas Calculadas en Moodle. Caso de Máximos y Mínimos en Funciones Polinómicas

Carlos Berejnoi
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Avda. Bolivia 5150 (4400, Salta)
berejnoi@gmail.com

Resumen. Debido a la pandemia del COVID-19, en el año 2021 se continuó con el cursado virtual de las carreras de la Universidad Nacional de Salta, incluyéndose la evaluación de los estudiantes. En la cátedra de Análisis Matemático I (Facultad de Ingeniería) los exámenes se realizaron en Moodle usando la actividad Cuestionario. Para desalentar el plagio en las respuestas, pero sin perder la ventaja de la velocidad en la corrección que brindan los reactivos de corrección automática, se utilizaron preguntas del tipo Calculadas: Moodle genera valores al azar que serán utilizados para calcular la respuesta, siendo posible disponer de un gran número de preguntas de un mismo tema. En este trabajo se describe el diseño y programación de una Pregunta Calculada sobre la determinación de extremos de una función polinómica de grado 3, concluyendo sobre la conveniencia del uso de este tipo de reactivos en exámenes de la asignatura.

Palabras Clave: Polinomios, Evaluación, Moodle, Preguntas calculadas.

1 Introducción

Durante el período lectivo 2021, debido a la suspensión de las actividades académicas impuesta en la Universidad Nacional de Salta —al igual que en otras instituciones educativas— se continuó con el cursado virtual de las carreras dictadas en la institución. En la cátedra de Análisis Matemático I (AMI), de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería, se utilizó Moodle (como plataforma educativa) y los softwares Zoom y Google Meet (para las salas de videoconferencias para los encuentros sincrónicos). La experiencia en el uso de esta plataforma en tiempos de pandemia, sumada a la acumulada previamente durante más de una década por la cátedra, indica que Moodle —con sus actividades y recursos— es una excelente alternativa para la mediación pedagógica usando TIC [1-3].

Una parte fundamental del proceso enseñanza-aprendizaje es la evaluación del estudiante, no sólo para saber cuánto aprendió, sino también para corregir o reforzar aspectos concernientes al accionar educativo [4]. Debido a la condición externa impuesta (virtualidad) en este proceso, los instrumentos evaluativos se presentaron con la actividad Cuestionario de la plataforma elegida (Moodle).

Esta actividad se construye usando diferentes tipos de preguntas [5], las utilizadas en AMI fueron: Calculada, Cloze (con respuestas incrustadas), Opción Múltiple, Numérica, Verdadero/Falso y Ensayo. De todas ellas, sólo la última permite revisar el procedimiento realizado por el alumno; en todas las demás, el sistema corrige en forma automática según la respuesta indicada como correcta por el docente.

Es decir, en los instrumentos evaluativos virtuales se utilizaron preguntas (reactivos) para las cuales los alumnos debían realizar el desarrollo en papel (subiendo la producción escrita a la plataforma) y otras que eran corregidas por la plataforma. Se diseñaron de manera de atender los diferentes factores que pueden influir en la evaluación y el resultado obtenido por el estudiante:

- Desalentar el plagio en las respuestas. Usando las preguntas del tipo Calculada se puede disponer de un gran número de reactivos, del mismo grado de dificultad, con diferentes respuestas.
- Para evaluar procedimientos, algunas preguntas fueron del tipo Ensayo.
- Por la limitación en los recursos (cantidad de docentes y tiempo), algunas preguntas debían ser de corrección automática. Todos los tipos de pregunta mencionados anteriormente, excepto Ensayo, dan solución a este punto.

Si bien los reactivos de corrección automática son cuestionadas por no proveer la mejor información sobre los procedimientos empleados y los errores cometidos por los alumnos, los exámenes que los incluyen tienen muchas ventajas, además de la rapidez en la corrección: se pueden reutilizar los reactivos e incorporarse a un banco de preguntas, se puede incrementar la confiabilidad del examen aumentando el número de ítems, el muestreo de contenidos examinados suele ser superior al logrado con otros instrumentos, y —principalmente— la objetividad en la corrección [4].

En este trabajo se presenta la descripción del diseño de una Pregunta Calculada en un ejercicio de determinación de extremos de una función polinómica de grado 3. Se explica la formulación de la respuesta que calcula el software, y se analiza la conveniencia del uso de este tipo de preguntas en el futuro.

2 Problema a resolver: extremos de una función

2.1 Descripción de la pregunta

La pregunta presentada a los alumnos (Fig. 1) se refiere a la determinación de extremos en una función polinómica de grado tres. Involucra el cálculo de derivadas, la factorización de una expresión polinómica de grado dos y la igualación de coeficientes en este tipo de expresiones para determinar la igualdad entre dos funciones.

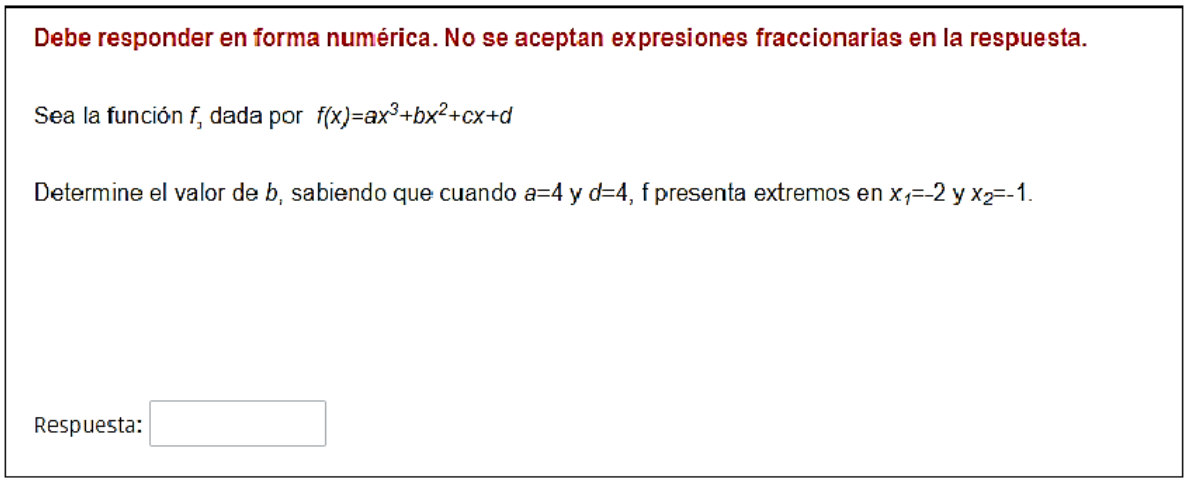


Fig. 1. Enunciado de la pregunta calculada. Caso de determinación del coeficiente del término cuadrático de una función polinómica de grado 3.

La función bajo análisis es una polinómica de grado 3 (ecuación (1)).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \textbf{(1)}$$

La pregunta presenta el caso con los coeficientes a y d, además de especificar los valores de la variable independiente (x_1 y x_2) en los que la función f presenta extremos. Los cuatro valores son generados por Moodle (los denomina comodines), según lo especificado por el docente al crear el reactivo. Para que el sistema pueda evaluar la respuesta del alumno, se debe escribir una fórmula para el valor de b (el ejemplo dado corresponde a este caso,

podría preguntarse el valor de *c*) en función de los datos dados en el enunciado. En ella, en este caso, intervienen todos excepto *d*.

2.2 Cálculo de los coeficientes a partir de a, x_1 y x_2

En este apartado se explica un proceso para resolver el problema, llegando a las fórmulas que relacionan los parámetros pedidos con los valores (comodines) definidos en el enunciado. Es decir, se realizará el proceso de resolución que podría seguir un alumno para encontrar la solución, excepto que se lleva a cabo usando comodines y no los valores numéricos que tienen los reactivos al momento de ser usados.

Para encontrar los extremos de cualquier función calculamos su derivada —ecuación (2)— y obtenemos los puntos críticos, que corresponden a aquellos valores de la variable independiente —en nuestro caso *x*— para los cuales la derivada vale cero o no existe, siendo continua la función en ese punto.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad \textbf{(2)}$$

En este ejercicio queremos que la función presente dos extremos ($f(x_1)$ y $f(x_2)$). Como la función derivada resulta una función polinómica de grado dos, la única posibilidad de que *f* presente dos extremos es que su derivada tenga dos ceros reales: x_1 y x_2. Por lo tanto, podemos expresar a la función derivada como:

$$f'(x) = 3a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \qquad \textbf{(3)}$$

Por lo que resulta:

$$f'(x) = 3ax^2 - 3a(x_1 + x_2)x + 3ax_1x_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Igualando los coeficientes de las ecuaciones (2) y (4), se llega a:

$$c = 3ax_1x_2 \qquad \textbf{(5)}$$

$$2b = -3a(x_1 + x_2) \qquad \textbf{(6)}$$

$$b = -1{,}5a(x_1 + x_2) \qquad \textbf{(7)}$$

Con las ecuaciones (6) y (7) se pueden calcular los coeficientes de la función original, conocidos los ceros de la derivada. Se asigna el valor del coeficiente *a* sin relacionarlo con los ceros de la derivada.

Es decir, se fijan los valores reales x_1, x_2 y a, y se obtiene la función polinómica de grado 3 con x_1 y x_2 como puntos críticos. Pero, ¿cómo sabemos que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son extremos de la función *f*?

Aplicando el criterio de la derivada segunda se puede probar que la función, bajo las condiciones impuestas, presenta un máximo y un mínimo. Bastará que la derivada segunda tenga diferentes signos en los valores críticos impuestos, es decir:

$$f''(x_1)\,f''(x_2) < 0 \qquad \textbf{(8)}$$

La expresión de la función derivada segunda es:

$$f''(x) = 6ax + 2b \qquad \textbf{(9)}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6) se llega a:

$$f''(x) = 6ax - 3a(x_1 + x_2) \quad \textbf{(10)}$$

Evaluando la derivada segunda en x_1 resulta:

$$f''(x_1) = 6ax_1 - 3a(x_1 + x_2) \quad \textbf{(11)}$$

$$f''(x_1) = 3ax_1 - 3a\,x_2 \quad \textbf{(12)}$$

$$f''(x_1) = 3a(x_1 - x_2) \quad \textbf{(13)}$$

Evaluando la derivada segunda en x_2 resulta:

$$f''(x_2) = 6ax_2 - 3a(x_1 + x_2) \quad \textbf{(14)}$$

$$f''(x_2) = 3ax_2 - 3a\,x_1 \quad \textbf{(15)}$$

$$f''(x_2) = 3a(x_2 - x_1) \quad \textbf{(16)}$$

Por lo que

$$f''(x_2) = -f''(x_1) \quad \textbf{(17)}$$

Verificándose la ecuación (8).

3 Preguntas calculadas en Moodle

En las preguntas de tipo Calculada Moodle genera al azar valores de comodines, que se encuentran en un intervalo definido por el docente, y calcula la respuesta en base a fórmulas que se indican en el momento de crear el reactivo.

En la Fig. 1 se observa la consigna de la pregunta que se describe en este trabajo, y la Fig. 2 muestra el inicio del diseño de la pregunta, donde se ve cómo se especifica el nombre de los comodines (entre llaves) y la fórmula que permite al sistema calcular la respuesta correcta (obtenida por ecuación (7)).

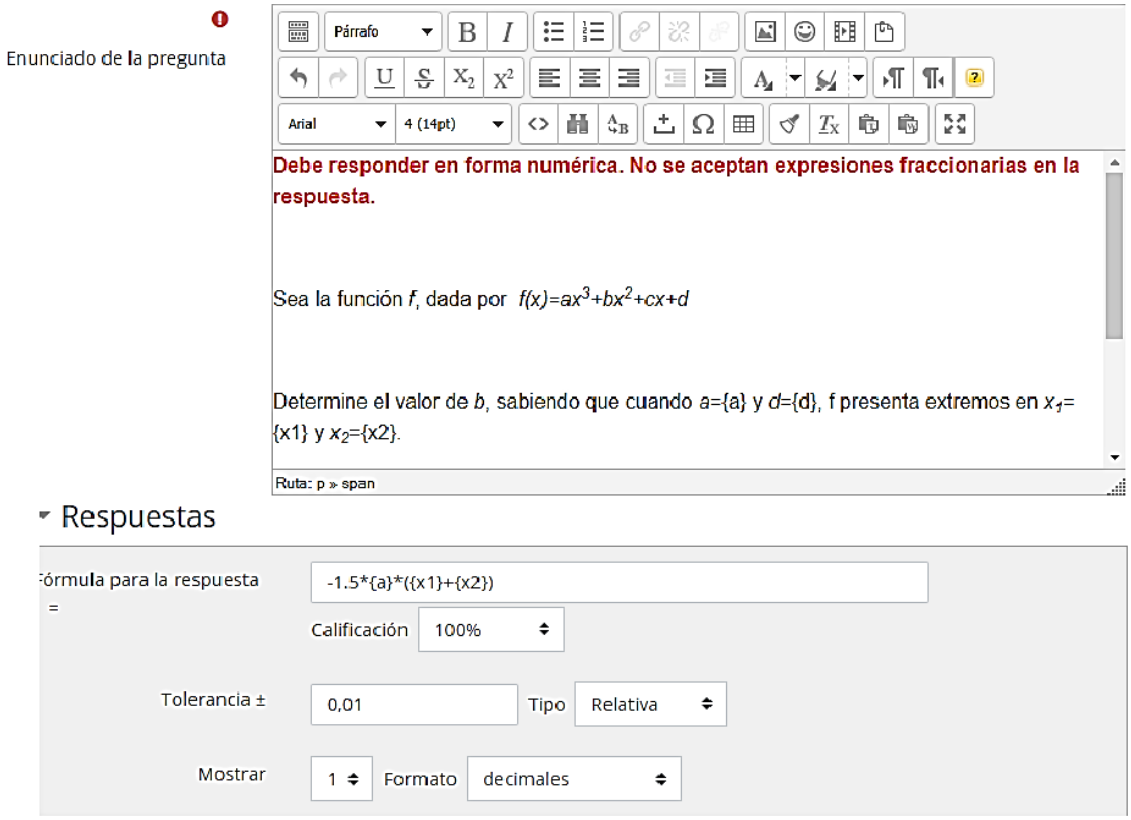


Fig. 2. Enunciado de la pregunta calculada vista por el docente.

3.1 Generación de preguntas

Para generar la pregunta es necesario definir los valores a, d, x_1 y x_2. Para que no se obtengan preguntas que presenten inconvenientes o errores, se debe tener cuidado en los valores de los comodines permitidos que se especifican al sistema. Por ejemplo, si permitimos que a valga cero, tendremos una función de grado 2. También, hay que tener recaudos con los valores x_1 y x_2: en el apartado anterior se verificó que si son diferentes entre sí, f presentará un mínimo y un máximo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se indica a Moodle que genere los valores de los comodines. En la Fig. 3 se muestran los elegidos en nuestro caso, que permiten obtener 3024 reactivos diferentes (cada vez se pueden generar hasta 100, pero se puede repetir el procedimiento para incrementar el número). El total de *reactivos* posibles surge de considerar 4 valores para a, 6 para x_1, 6 para x_2 y 21 para d. El número de *respuestas* diferentes posibles para ese conjunto de reactivos se reduce a 126 porque el valor de d no influye en el resultado, sólo sirve para calcular $f(x_1)$ y $f(x_2)$ (pero que no se piden en la respuesta). Se restringen los comodines al conjunto de números enteros (Decimales =0) con el objetivo de facilitar los cálculos.

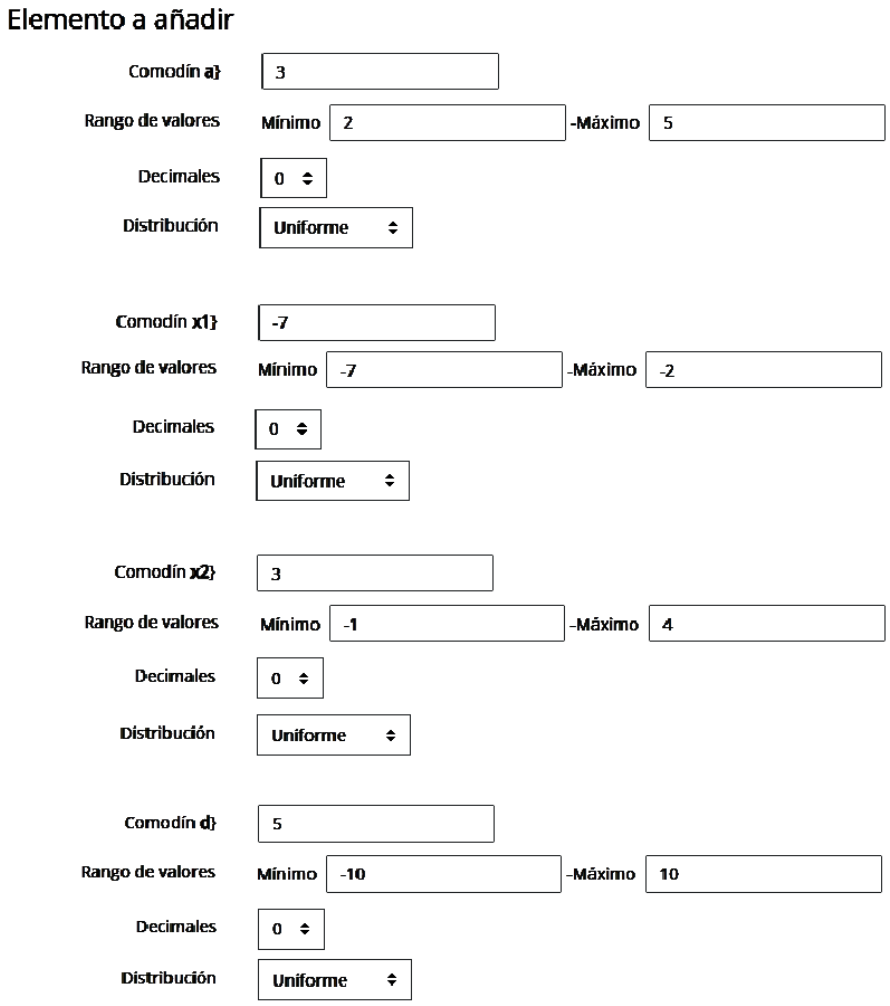


Fig. 3. Especificación de los valores de los comodines de la pregunta calculada usada en este trabajo.

4 Discusión

Como se mencionó anteriormente, en los exámenes de AMI se utilizaron reactivos de dos tipos:

- De desarrollo, en los cuales los alumnos deben resolver y subir la producción a Moodle
- De corrección automática, en los cuales el sistema arroja el resultado y corrige en base a las indicaciones del docente.

Diferentes factores impulsaron a los responsables de diseñar los instrumentos evaluativos a utilizar ambos tipos de reactivos. Las Preguntas Calculadas, correspondientes a los últimos, permitieron principalmente cumplir con los siguientes objetivos:

- Desanimar el plagio en las respuestas. La cantidad de ejercicios generados aleatoriamente para un mismo tema es mayor que el número de preguntas diferentes creadas en forma manual.
- Evitar demoras en la corrección y en posibles errores de los docentes al revisar una gran cantidad de exámenes.
- Lograr objetividad en la asignación de los puntajes obtenidos por los alumnos.

El uso de Preguntas Calculadas implica un mejor diseño de los reactivos, debido a que:

- El docente debe resolver el ejercicio para llegar a la fórmula que usa Moodle para evaluar el resultado del alumno. Esto permite analizar con mayor profundidad las competencias puestas en juego, y las diferentes formas de resolver el mismo ejercicio. En la sección *2 Problema a resolver: extremos de una función* se presenta el detalle del procedimiento seguido para llegar a la fórmula para el cálculo del parámetro pedido en el enunciado de la pregunta.
- Los comodines deben estar acotados en intervalos para los cuales tienen sentido los cálculos. Nuevamente, esto implica una revisión muy profunda del ejercicio.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Con el uso de Preguntas Calculadas se incrementó el banco de reactivos disponible en la cátedra, sin necesidad de escribir muchos enunciados: la variación de los comodines en cierto rango permite disponer de un número alto de preguntas.

Hay que ser muy cuidadoso al escribir los reactivos, y programar la respuesta. Cualquier error en la fórmula de cálculo, o una mala elección del intervalo donde varía un comodín, llevaría a obtener un reactivo inútil en el cuestionario.

En este trabajo se muestra un reactivo referido a la determinación de extremos de una función polinómica de grado 3, que involucra diferentes conceptos (propios del cálculo diferencial y de matemáticas previas a él) y estrategias de resolución. Se muestra la pregunta diseñada en Moodle, y un procedimiento —con su justificación— para el cálculo de la respuesta.

Este tipo de reactivos seguirán siendo usados en los exámenes de la cátedra, a pesar del regreso a las clases presenciales. Se diseñarán las preguntas en Moodle, y serán trasladados a papel algunos de los reactivos generados por la plataforma, variándose la consigna para pedir la justificación de la respuesta. El proceso de diseño y revisión de estos reactivos implica un alto grado de confiabilidad del ejercicio.

Referencias

1. Berejnoi, C.; Ornass, V.O.: Uso de MOODLE como plataforma educativa en la modalidad b-learning: experiencia en la cátedra de Análisis Matemático I de las Carreras de Ingeniería de la U.N.Sa. *Jornada: Aula Virtual en la Universidad ¿Un espacio para todos?*, Salta-Argentina (2009).
2. Berejnoi, C.; Barros, M.A.; Ornass, V.O.: La modalidad b-learning como alternativa en el proceso enseñanza-aprendizaje en primer año de carreras científico-tecnológicas. *II Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas*, Salta-Argentina (2010).
3. Berejnoi, C.; Vidoni, C.M., Copa, B.E.: Uso de la plataforma educativa Moodle en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática en el primer año de carreras de Ingeniería. *XXII Encuentro Nacional - XIV Encuentro Internacional, Educación Matemática en Carreras de Ingeniería, EMCI 2021*, Montevideo-Uruguay (2021).
4. Berejnoi, C.; Tapia, C.M., Galarza, C.V.: Análisis de evaluaciones por medio de la teoría clásica del test y de la teoría de respuesta al ítem. *X Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA*, Salta (2015).
5. https://docs.moodle.org/all/es/Tipos_de_preguntas. Accedido el 2 de mayo de 2022

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Una Aproximación al Estilo de Aprendizaje de los Estudiantes de Ingeniería en Análisis Matemático I, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (UNSa)

Borré, Claudia
Análisis Matemático I, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Dirección postal
cmborre@ing.unsa.edu.ar

Resumen. Dada la recurrente dificultad de los estudiantes que ingresan a carreras de Ingeniería en esta Facultad, se busca mejorar las estrategias y herramientas de enseñanza para lograr un aprendizaje más significativo. Con tal fin, en el presente trabajo se analizan los estilos de aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería Civil, Electromecánica, Industrial y Química en la asignatura Análisis Matemático I, a través del modelo de Felder-Silverman. Se comparan los resultados obtenidos del test de Felder-Soloman aplicado a participantes de la cohorte 2021, con dictado en modalidad estrictamente virtual por la pandemia, y a la cohorte 2022, con modalidad predominantemente presencial.

Palabras Clave: Estilos de Aprendizaje, Felder-Silverman, Análisis Matemático.

1 Introducción

El presente trabajo da continuidad al ya presentado en el Congreso Argentino de Ingeniería Química X CAIQ 2019[1], enfocado ahora en la asignatura Análisis Matemático I.

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (UNSa) el cursado es cuatrimestral. Dentro del Área Básica, común a las cuatro carreras de Ingeniería que se imparten (Civil, Electromecánica, Industrial y Química), Análisis Matemático I (AMI) se cursa en el primer cuatrimestre de primer año, con redictado en el segundo. En todas las asignaturas de las carreras rige el sistema promocional, y la promoción se define mediante un promedio ponderado donde se valoran distintas actividades. El Curso de Ingreso Universitario (CIU), organizado en tres fases o "momentos", incluye un período de cinco o seis semanas, donde se revisan contenidos de matemática y comprensión de textos.

En el dictado de AMI, cuatrimestre a cuatrimestre se vienen analizando y modificando las metodologías empleadas, con el fin de mejorar la enseñanza-aprendizaje. El tamaño de las cohortes en relación a la planta docente, así como la nueva generación "centennial", sumados al efecto disruptivo de la pandemia los últimos dos años y a la no obligatoriedad del CIU, constituyen desafíos que se deben paliar.

En tal sentido, parece propicio buscar otras maneras de conocer cómo aprenden nuestros estudiantes, para así adecuar nuestro modo de enseñar.

Entre los diferentes Modelos de Estilos de Aprendizaje (Modelo de los cuadrantes cerebrales de Herrmann, Modelo de Kolb, Modelo de Programación Neurolingüística de Bandler y Grinder, Modelo de los Hemisferios Cerebrales, Modelo de las Inteligencias Múltiples de Gardner,etc.), escogimos el de Felder-Silverman [2],[3], que concentra nuestro interés y posibilidades de implementación, ya frecuentemente usado en carreras de ingeniería [4].

Como todo modelo, y sin entrar entre las múltiples definiciones, el de Felder- Silverman es una representación simplificada de una parte de nuestro universo de interés.

Según estos autores los estudiantes aprenden de diferentes formas (viendo, escuchando, razonando, memorizando, experimentando, esquematizando, modelando matemáticamente, etc.), y del mismo modo, los métodos de enseñanza varían (demostrando, discutiendo, exponiendo, etc.). La "cantidad y calidad" del aprendizaje del estudiante depende de sus características propias, pero también de la compatibilidad entre su Estilo de Aprendizaje y el Estilo de Enseñanza del Profesor.

Para "empatizar" ambos estilos, Felder y Silverman se preguntan:

1. ¿Qué aspectos del estilo de aprendizaje son particularmente importantes en la educación de ingeniería?
2. ¿Qué estilos de aprendizaje prefieren la mayoría de los estudiantes y cuáles son los preferidos por los estilos de enseñanza de la mayoría de los profesores?
3. ¿Qué se puede hacer para llegar a los estudiantes cuyos estilos de aprendizaje no son abordados por los métodos tradicionales de la educación de ingeniería?

De esta forma, según Felder [3]las dimensiones dicotómicas de los estilos de aprendizaje son un continuo y no categorías excluyentes, pueden cambiar con el tiempo, así como pueden variar con el contenido que se está aprendiendo, o con el entorno de aprendizaje [4].

En su modelo revisado, Felder propone cuatro dimensiones:

1.La dimensión activo-reflexiva aborda la forma en que la mente procesa la información, a través de la cual ésta es convertida en conocimiento. Surgen entonces los Estilos de Aprendizaje Activo y Reflexivo.
2.La dimensión sensitivo-intuitivo aborda la forma en que los sentidos y la mente perciben el mundo, de lo cual surgen los Estilos de Aprendizaje Sensitivo e Intuitivo.
3.La dimensión visual-verbal aborda la forma en que los individuos reciben la información a través de los sentidos, de lo cual surgen los Estilos de Aprendizaje Visual y Verbal.
4.La dimensión secuencial-global aborda la forma en que los individuos entienden y procesan la información, de lo cual surgen los Estilos de Aprendizaje Secuencial y Global.

La Tabla 1 resume las características tipificadas para estudiantes de cada categoría.

Tabla 1. Características del estudiante de cada categoría o estilo de aprendizaje. Fuente: Kowalski [4]

Categoría	*Características*	*Categoría*	*Características*
Activo	Fija y entiende mejor la nueva información cuando hace algo activo con ella. Prefiere aprender colaborativamente.	Reflexivo	Fija y entiende la nueva información pensando sobre ella. Prefiere aprender individualmente.
Sensorial	Concreto y práctico. Orientado hacia los hechos y procedimientos. Le gusta resolver problemas siguiendo procedimientos establecidos. Paciente con los detalles. Le agrada el trabajo práctico (trabajo de laboratorio, por ejemplo). Memoriza hechos con facilidad. No le agradan los cursos en los que no hallan conexiones inmediatas con el mundo real.	Intuitivo	Conceptual e innovador. Orientado hacia las teorías y los significados. Le agrada innovar y le disgusta la repetición. Prefiere descubrir posibilidades y relaciones. Comprende rápidamente nuevos conceptos, abstracciones y formulaciones matemáticas. No le agradan los cursos que requieren mucha memorización o cálculos rutinarios.
Visual	Prefiere obtener la información mediante las representaciones visuales. Recuerda mejor lo que ve.	Verbal	Prefiere obtener la información en forma escrita o hablada. Recuerda mejor lo que lee o lo que oye.
Secuencial	Ordenado y Lineal. Aprende paso a paso, siempre que exista una secuencia lógica. Cuando resuelve un problema tiende a seguir pequeños pasos lógicos.	Global	Aprende por saltos, tomando el nuevo material casi al azar y repentinamente visualiza la totalidad. Resuelve problemas complejos rápidamente y con un enfoque original.

2 Metodología

Para evaluar las preferencias en las cuatro escalas del modelo de Felder y Silverman, Richard Felder y Barbara Soloman desarrollaron un instrumento de encuesta online llamado Índice de Estilos de Aprendizaje (Index of Learning Styles- ILS) actualizado posteriormente [5]. Los usuarios responden 44 preguntas (de elección forzada), envían la encuesta, y sus cuatro preferencias se informan inmediatamente para que sean copiadas o impresas. Los resultados no se almacenan.

También se puede, como en nuestro caso, recolectar la información mediante un Formulario de Google, al que el estudiante accede mediante un link desde la Plataforma Moodle de cada asignatura. El formulario, disponible para todos los estudiantes de ingeniería, contiene el cuestionario y consigna además carrera y asignatura, y si el alumno es ingresante o recursante. Los datos se recogen en una planilla Excel donde se procesa la información. Se puede filtrar la información por asignatura, por carrera, por docentes, por alumnos, por año de cursado, por fecha. El instrumento así resultante es lo suficientemente versátil para organizar la información [1]. Desde 2019, esto se ha implementado progresivamente en buena parte de las asignaturas de las carreras de ingeniería de esta Facultad; asimismo, los datos de las nuevas cohortes se van incorporando a la planilla general, de modo que se va armando una amplia base de datos para las cuatro carreras de ingeniería.

Como ya dijimos, el cuestionario consta de 44 preguntas con opciones de respuesta dicotómicas (tipo A o B). La escala para cada dimensión va entre 11 y -11, es decir, hay once preguntas para cada una de las cuatro dimensiones. La prevalencia en uno u otro estilo o categoría surge de considerar el mayor, en valor absoluto, de ambos estilos extremos en cada una. Según el modelo de Felder y Silverman:

- un puntaje para una dimensión de entre 1 y 3, en valor absoluto, indica equilibro entre las dos categorías de esa dimensión, pudiendo existir una *preferencia leve* por una u otra.
- un puntaje para una dimensión de entre 5 y 7, en valor absoluto, hacia una categoría, indica *preferencia moderada*; el estudiante podría aprender con menos facilidad bajo un estilo de enseñanza que no responda a su preferencia.

- un puntaje para una dimensión de entre 9 y 11, en valor absoluto, señala una *fuerte preferencia*; el estudiante podría tener mayores dificultades para aprender en un entorno que no responda a su preferencia.

Un estudiante que, por ejemplo, sea más intuitivo que sensorial, respondería mejor a una clase donde el docente enfatice en conceptos (contenido abstracto) en lugar de hechos (contenido concreto). Los estilos de enseñanza entonces deberían definirse en función al estilo de aprendizaje del estudiante [2].

3 Resultados

En el segundo cuatrimestre de 2021 (2C2021), 164 alumnos de AMI respondieron la encuesta, mientras que 356 en el primer cuatrimestre de 2022 (1C2022).

En la Figura 1 desde (a) a (d), se representan los resultados de cada estudiante encuestado de 1C2022, para las respectivas dimensiones.

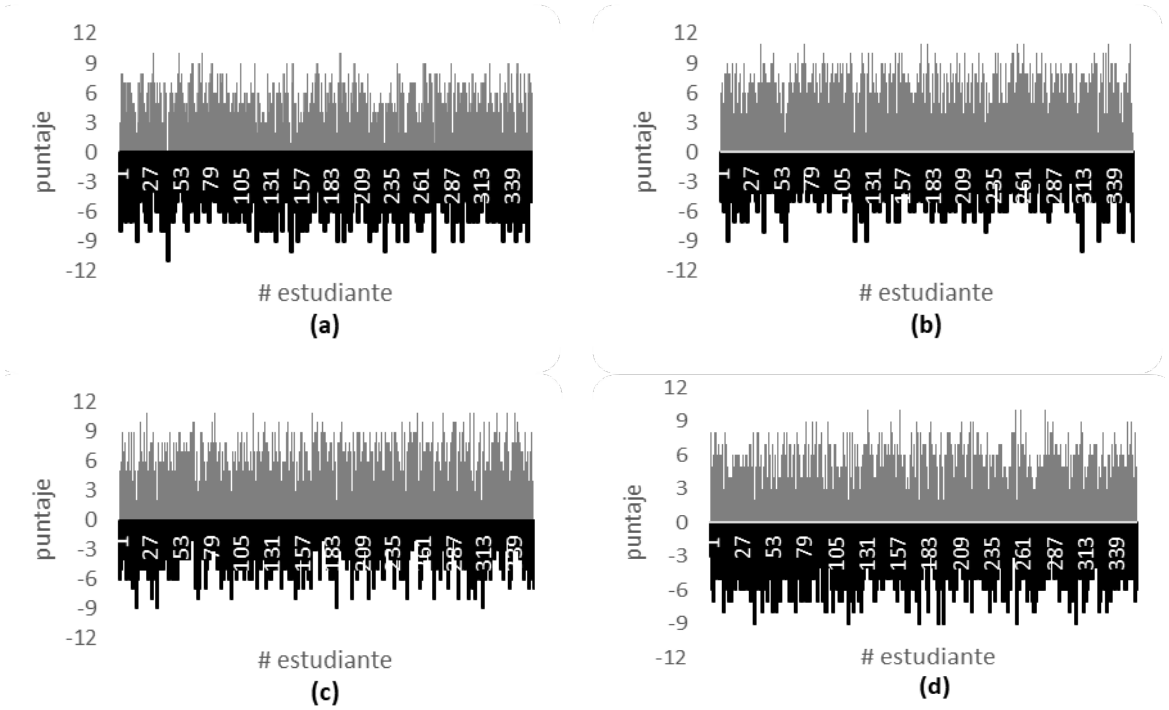


Fig. 1. Puntaje obtenido en el test para cada estudiante, cohorte 2022: (a) dimensión activo-reflexivo (b) dimensión sensorial-intuitivo (c) dimensión verbal-visual (d) dimensión secuencial-global.

Los resultados del procesamiento de datos se resumen en las Tablas 2 y 3.

Tabla 2. Valores promedio de cada estilo de aprendizaje de alumnos en los cuatrimestres estudiados. Elaboración propia.

Cuatrimestre	Promedio de Activo	Promedio de Reflexivo	Promedio de Sensorial	Promedio de Intuitivo	Promedio de Visual	Promedio de Verbal	Promedio de Secuencial	Promedio de Global
2C2021	3,20	-3,22	5,15	-2,90	4,54	-2,24	3,04	-3,06
1C2022	3,19	-3,06	4,67	-2,47	4,79	-2,36	3,05	-2.63

Tabla 3. Porcentaje de alumnos prevalente en cada estilo de aprendizaje en los cuatrimestres estudiados. Elaboración propia.

Cuatrimestre	Porcentaje de Activo	Porcentaje de Reflexivo	Porcentaje de Sensorial	Porcentaje de Intuitivo	Porcentaje de Visual	Porcentaje de Verbal	Porcentaje de Secuencial	Porcentaje de Global
2C2021	50,61	49,39	79,88	20,12	78,05	21,95	62,20	37,80
1C2022	54,78	45,22	80,90	19,10	78,09	21,91	62,36	37,64

El mismo test fue realizado también por los docentes, en la suposición de que se tiende a enseñar según el propio estilo de aprender, pero obviamente no necesariamente debería serlo, en pos del buscado aprendizaje centrado en el estudiante. Los resultados se indican en Tablas 4 y 5.

Tabla 4. Valores promedio de cada estilo de aprendizaje de docentes de AMI. Elaboración propia.

Promedio de Activo	Promedio de Reflexivo	Promedio de Sensorial	Promedio de Intuitivo	Promedio de Visual	Promedio de Verbal	Promedio de Secuencial	Promedio de Global
4,00	-3,5	5	-5,67	5,29	-1,00	3,67	-3,80

Tabla 5. Porcentaje de docentes prevalente en cada estilo de aprendizaje. Elaboración propia.

Porcentaje de Activo	Porcentaje de Reflexivo	Porcentaje de Sensorial	Porcentaje de Intuitivo	Porcentaje de Visual	Porcentaje de Verbal	Porcentaje de Secuencial	Porcentaje de Global
50,00	50,00	62,50	37,5	87,50	12,50	37,50	62,50

4 Análisis y discusión

Como puede verse en las figuras 1. (a) a (d), en AMI la disparidad de los resultados individuales de los alumnos es amplia, dada la cantidad de alumnos de cada cohorte, y quizás al mayor desconocimiento de sus propios procesos cognitivos, por ser ingresantes.

Conocidos los perfiles individuales, se plantea cómo interpretar los perfiles de aprendizaje de todos ellos en conjunto, y cómo diseñar un plan de mejora grupal según los resultados del diagnóstico para adecuar nuestras clases con esta información.

Respecto a la primera cuestión, y para tener una visión más global, se analizaron los valores promedios en cada categoría, así también como los porcentajes de los alumnos encuestados.

Existen diferencias marcadas entre ambas cohortes: mientras la primera es del 2C2021, donde predominan alumnos recursantes, la segunda es del 1C2022, donde predominan los ingresantes; además, la cantidad de encuestados es muy distinta. Pese a ello, podemos observar que mayoritariamente las tendencias se mantienen:

- dimensión activa/reflexiva: preferencia moderada (ligeramente) entre ambos estilos, pero las tendencias en proporción semejante (no dominante);
- dimensión sensorial/intuitivo: preferencia moderada y con mayor proporción (marcado predominio) del estilo sensorial frente al intuitivo;
- dimensión visual/verbal: preferencia moderada del estilo visual y con elevada proporción (dominante) sobre el verbal;
- dimensión secuencial/global: preferencia leve (casi), con mayor proporción de secuencial frente a global, la brecha entre ambos aumenta para el 1C2022.

Observamos también la semejanza relativa de los valores promedio, indicados en Tabla 2, entre ambos cuatrimestres, como también entre los porcentajes de cada estilo, condensados en la Tabla 3. La mayor diferencia aparece en la dimensión secuencial-global, donde para ambas tablas, disminuyen los valores en la dimensión global

para 1C2022 respecto a 2C2021, aumentando consecuentemente la secuencial. Tal variación resulta esperable por cuanto en 2C2021, como ya se dijo, predominan los alumnos recursantes.

Así, nuestros estudiantes son moderadamente sensoriales y visuales en su mayoría; con preferencia leve por activo frente a reflexivo, en casi igual proporción. En la dimensión secuencial/global, se invierten ligeramente las preferencias según el cuatrimestre, aunque en ambos predomina el perfil secuencial.

Respecto a los alumnos encuestados de todas las asignaturas de las carreras, predominantemente ingeniería química e industrial, las tendencias de levemente activo, moderadamente sensoriales y visuales y levemente secuenciales, se mantienen [1].

Respecto a los docentes de la cátedra, tenemos preferencia moderada por activo frente a reflexivo en igual proporción; preferencia moderada intuitiva frente a sensorial, aunque con mayoría de estos últimos; preferencia moderada visual frente a verbal mayoritariamente, y preferencia moderada leve global frente a secuencial, con mayor proporción del primero. Observemos que las preferencias son moderadas, y que las diferencias entre preferencias dicotómicas son pequeñas; la excepción es el perfil verbal, con preferencia leve y en baja proporción.

Redondeando valores, las preferencias y extensión se resumen en la Tabla 6.

Tabla 6. Nivel de preferencia y extensión en alumnos y docentes. Elaboración propia.

		Alumnos 2C2021	***Alumnos 1C2022***	***Docentes AMI***
Dimensión Visual/ verbal	*Preferencia*	visual (moderada)	visual (moderada)	visual (moderada)
	Extensión	78%	78%	88%
Dimensión Sensorial/intuitivo	*Preferencia*	sensorial (moderada)	sensorial (moderada)	intuitiva (moderada)
	Extensión	80%	81%	63%
Dimensión Activo/ reflexivo	*Preferencia*	activa (leve)	activa (leve)	activa (moderada)
	Extensión	51%	55%	50%
Dimensión Secuencial/ global	*Preferencia*	global/sec. (leve)	secuencial (leve)	global/sec. (moderada)
	Extensión	sec. 62%	sec. 62%	global 63%

Respecto a cómo diseñar un plan de mejora grupal según los resultados del diagnóstico para adecuar nuestras clases con esta información y acorde a nuestras posibilidades, encontramos opiniones expertas diversas. La combinación de las categorías extremas en cada dimensión nos conduciría a 16 perfiles, habiendo además estudiantes con tendencias intermedias en cada una de ellas, de modo que tratar de acomodar todos los estilos de aprendizaje en un aula no es una opción práctica, ni obviamente, personalizar cada uno; además, no es posible determinar todos los factores que afectan el aprendizaje de un estudiante (que superan los alcances de cualquier modelo), y mucho menos abordarlos a todos [6].

Algunos investigadores realizan un análisis más pormenorizado; por ejemplo el análisis por clusters de los datos, segmentándolos [7], [8], [9].

5 Conclusiones y trabajos futuros

Como sucede con muchas teorías, modelos, instrumentos, este modelo ha recibido muchas críticas: falta de marco teórico sólido, falta de suficiente evidencia estadística confiable que lo valide, correlación con resultados, etc. Sin embargo, aunque controversial y con varios detractores, es aplicable en carreras de ingeniería [2].

Por otra parte, dado el tamaño de las cohortes (800 a 1200 o más ingresantes por año, organizados en 12 comisiones por la disponibilidad de docentes), y la dispersión de los resultados obtenidos en el test, no es viable implementar el diseño de las clases por estilos de aprendizaje o clusters.

Así, los estilos de aprendizaje en el diseño de un curso deben usarse con ciertos recaudos, inherentes a la naturaleza misma de los modelos. Sin embargo, si tratar de adaptar la instrucción a cada estudiante es inútil, adoptar un enfoque que no se adapte a nadie es aún peor.

Una de las mayores potencialidades del uso de modelos de los estilos de aprendizaje es que los docentes dispongamos de cierta información que permita establecer estrategias de enseñanza cuando los aprendizajes de los estudiantes no siguen el curso esperado.

Acorde a ello, nos proponemos equilibrar las diferentes necesidades y preferencias de los estudiantes; a veces se les enseña con su estilo de preferencia (para que estén cómodos) y otras veces en otra forma (para que desarrollen otras habilidades importantes que de otro modo no adquirirían, favoreciendo así su crecimiento evolutivo). [10] Continuando con las conclusiones de [1], muchas de ellas ya implementadas (realización del Test de Felder en el inicio del ciclo lectivo, incremento del material gráfico y audiovisual, etc.), postulamos ciertos lineamientos que contemplen los estilos de aprendizaje de AMI, capitalizando la experiencia virtual durante la pandemia [11]:

- indagar rápidamente los conocimientos centrales previos y posteriores cada clase o tema, mediante Socrative o Mentimeter (activos);
- correlacionar lo estudiado con ejemplos de la vida cotidiana, o como adelanto de temas a ver en asignaturas posteriores (sensoriales y activos);
- implementar otros recursos híbridos: gamificación, aula invertida, mini-experiencias en aula, etc. (todos los estilos, según el recurso);
- equilibrar la información concreta que se presenta (hechos, datos, experimentos, etc.) (sensoriales), con conceptos abstractos (principios, teorías, modelos matemáticos, etc.) (intuitivos);
- equilibrar métodos prácticos de resolución de problemas (sensoriales y activos) con énfasis en la comprensión de fundamentos (intuitivos y reflexivos);
- utilizar material gráfico (imágenes, diagramas, bocetos, etc.), también videos y demostraciones (sensoriales y visuales), si es posible hechas a mano (activos);
- dejar intervalos, aunque sea breves, para que los estudiantes piensen en lo que se ha expuesto en la clase (reflexivos);
- alentar a los estudiantes para que trabajen cooperativamente (activos);
- elogiar las soluciones creativas, inclusive las incorrectas (intuitivos y globales);
- explicar a los estudiantes los estilos de aprendizaje, y como cada cual puede aprender más eficientemente. Los estudiantes pueden sentirse más seguros, si comprenden que sus dificultades en realidad no se deben a deficiencias personales (dirigido a todos los estilos).

Nos proponemos seguir avanzando en la validez del modelo para nuestros estudiantes, correlacionándolo con los resultados de promoción obtenidos por cada alumno, comparando los datos en cursados homólogos, i.e. en la misma modalidad y del mismo cuatrimestre.

Agradecimientos. A todos los miembros de la Cátedra, al grupo de docentes de Ingeniería de la 1er. Cohorte del curso "Experto en Formación por Competencias" ("Las salteñas"), con quienes empezamos a trabajar colectivamente en "aprender a enseñar en ingeniería", y a la Facultad de Ingeniería de la UNSa.

Referencias

1. Zamora, S.; Villanueva, B.; Ramírez, N.; Acosta, D.; Borré, C.; Villegas, M.; Vivas, L.; Martínez, J.: Aplicación del Test de Felder-Silverman en alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. ¿Quiénes enseñan y quiénes aprenden? *Abstracts del X CAIQ 2019*, pág. 127/153 y J.7.70, (2019).
2. Felder, R. M., Silverman, L. K.: Learning and teaching styles in engineering education. *Engineering education*, No.78, Vol. 7, pp. 674-681. (1988).
3. Felder, R. M.: Reaching the second tier: Learning and teaching styles in College Science Education. *Journal of College Science Teaching*. Vol. 23, No. 5, pp. 86-290. http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/Secondtier.html (1993). Accedido el 05 de Octubre de 2018 y 11/06/2022.
4. Kowalski, V.; Morano, D., Erck, M., Enríquez, H.: ¿A Quién Enseño Yo, Entonces? -*Programa de Formación Docente para orientar su práctica hacia la Formación por Competencias -Módulo 2: Mediación Pedagógica para la Formación de Competencias*, Vol. 2. (2018).

5. Felder, R.; Soloman,B.: Index for Learning Styles. *North Carolina State University*. https://www.webtools.ncsu.edu/learningstyles/ Accedido el 05 de Octubre de 2018.
6. Felder, R. M., Brent, R.: Teaching and learning STEM: a practical guide. *Sitio Web del Legado de Richard Felder, North Carolina University* https://www.engr.ncsu.edu/stem-resources/ (2016). Accedido el 11 de Junio de 2022.
7. Morrison, M., Sweeney, A., Heffernan, T.: Learning styles of on-campus and off-campus marketing students: the challenge for marketing educators. *Journal of Marketing Education*, Vol. 25, No. 3, pp. 208-217 (2003).
8. Durán, E., Costaguta, R.: Minería de datos para descubrir estilos de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, No. 42, Vol. 2, pp. 1-10 (2007).
9. Ramírez León D. V.; Ortega Carrillo, J. A.: Diagnóstico del estilo de aprendizaje predominante basado en minería de datos y el modelo de Felder: aplicaciones al E-learnig 3.0. *V Congreso Mundial de Estilos de Aprendizaje*, pp. 1-10. (2012)
10. Karns, G. L.: Learning style differences in the perceived effectiveness of learning activities. *Journal of Marketing Education*, *28*(1), pp. 56-63 (2006).
11. Borré, C.; Galarza, C.; Experiencia virtual en la enseñanza de Análisis Matemático I durante la pandemia. *5° Congreso Argentino de Ingeniería y 11° Congreso Argentino de Educación de Ingeniería* (2021).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Pragmatismo Inclusivo en la Educación Matemática

Pedro M. A. Santucho[1], Claudia A. Roitman[2]
[1] Grupo: Ecuaciones diferenciales en geometría afín, teoría de cascaras, y la enseñanza de la matemática, la física y la economía en carreras de ingeniería y ciencias naturales. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. psantucho@hotmail.com,
[2] Grupo: Sistema de confiabilidad para auditar la calidad de los hormigones; enseñanza en las carreras de ingeniería de la calidad mediante herramientas virtuales, problemas abiertos y trabajo en equipo. Universidad Nacional de Córdoba. roitmanclaudia@gmail.com

Resumen. En la actualidad la inclusión social se ha convertido en un derecho inalienable de todos los sectores e individualidades de la sociedad y en nuestro país, donde la educación universitaria es también un derecho, creemos que nuestra experiencia grupal como docentes es un aporte al proceso, en el que nuestras universidades intentan revertir las tendencias educativas exclusivas. El presente trabajo de experiencia de cátedra es la exposición de casos clínicos y nuestra actuación basada en actitudes pedagógicas e ideológicas inclusivas respecto a la educación. En ellas discurrimos sobre algunos aspectos específicos a considerar en el ámbito universitario y más puntualmente aun, en el matemático. También consideramos una necesidad el llegar por parte de los profesionales expertos a quienes tenemos el contacto diario con la actividad educativa, puesto que la inclusión se considera como algo despegado del quehacer corriente del estudiante, a lo que se debe atender paralelamente y conjuntamente.

Palabras Clave: Experiencias de Cátedra, Inclusión educativa, Inclusión social universitaria, Universidad e inclusión, Inclusión social

1 Introducción

La inclusión es un concepto, suficientemente amplio, como para permitir pretender ser inclusivo y seguir excluyendo a muchos alumnos, como ocurre corrientemente. Nos referimos a que podemos hablar de inclusión describiendo aquellos casos en los que las personas poseen problemas de visión, audición, oralidad o locomoción, como únicos casos posibles. Es nuestro interés ocuparnos no sólo de aquellas personas con capacidades diferentes a la generalidad, sino también de aquellos que son de alguna manera excluidos o autoexcluidos. Sabemos que no somos los profesionales indicados para esta actividad, pero la realidad nos conduce a tener que enfrentar situaciones para las cuales no hemos sido específicamente adiestrados y en muchos casos sólo nuestra actitud y experiencia ha respaldado nuestra resolución de problemas., al menos de una manera aceptable. No es suficiente la recomendación hecha por los docentes a los estudiantes excluidos para acudir al Gabinete Psicopedagógico o la Dirección de Inclusión Social de la Universidad, esto sería simplemente excluirlos en la mayoría de los casos. Nuestra actuación como docentes es la de una atención primaria, que no podemos eludir.

1.1 Sujetos y concepto de inclusión que emplearemos

Nos referiremos a los estudiantes como sujetos por ser quienes en el proceso de enseñanza aprendizaje requieren de ser incluidos puesto que ingresan a un ámbito que desconocen y que por lo tanto les es hostil y es necesaria la

adaptación de una manera gradual y natural, sufriendo algunos de ellos, por causas muy diversas, con más fragilidad este proceso.

El concepto de inclusión que emplearemos tendrá relación directa con la consecución de la fortaleza necesaria para la asimilación del medio universitario que mencionamos y a las acciones necesarias para lograr esa apropiación. Todo proceso orientado a la inclusión del estudiante lleva aparejada la intención de lograr la mayor autonomía posible del mismo en el medio universitario.

La Dirección de Inclusión Social de la Secretaría de Asuntos Estudiantiles de la UNC expresa en su página Web: "El paso por la Universidad implica dificultades que van más allá de lo académico. Los conflictos para elegir una carrera, afrontar una nueva forma de vida, aprender a estudiar cómo se estudia en la Universidad, manejarse en una institución que nos exige autonomía y responsabilidad, las dificultades económicas, son problemáticas sobre las que la Secretaría de Asuntos Estudiantiles interviene a través de la Dirección de Inclusión Social" [1].

Esta expresión de intenciones está en consonancia con las ideas que expresamos en el presente artículo.

El concepto de inclusión lleva aparejado como su contrario el de exclusión por lo que es imprescindible la acción que impida la exclusión, ya que de no actuar se cae en ella, que concluye con la expulsión del alumno, en última instancia, del sistema universitario. Esta inacción de hecho es una discriminación de estudiantes individuales o grupos de estudiantes. Un tema que no tocaremos y que está relacionada a políticas universitarias, es la inclusión en otros claustros, como docentes y no docentes, puesto que nuestra investigación se centra en nuestra práctica habitual como docentes de Matemáticas en carreras de ingeniería.

1.2 La virtualidad en la pandemia y en la postpandemia

Si bien existía un apoyo pedagógico basado en las herramientas computacionales y las redes, la pandemia obligó al uso como única manera de proceder a la enseñanza aprendizaje, las clases virtuales y con ello el obligado conocimiento de la totalidad de los docentes y alumnos de herramientas que eran muy limitadamente usadas por quienes las conocían, sin transponer masivamente esas fronteras estabilizadas.

La generalización de la virtualidad en la enseñanza ha sido un elemento que ha cambiado radicalmente muchos conceptos, cerrando puertas y abriendo otras, lo que nos da la posibilidad de usarla selectivamente en nuevos sistemas, que ya no podrán dejar de ser mixtos, de enseñanza aprendizaje. No trataremos en esta ponencia la crisis de la escuela secundaria que en "ciertos casos" envía al mundo laboral y al universitario egresados con graves falencias en su formación básica y en la autonomía que debería tener el joven bachiller.

1.3 Marco Teórico

1.3.1. La inclusión en la educación

Para el presente trabajo nos hemos basado en conceptos elaborados por la UNESCO, que establece: "La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, centrada en que nadie se quede atrás, brinda una oportunidad única para crear sociedades más inclusivas y equitativas. Esto debería comenzar por sistemas de educación inclusiva…. Esto incluye tomar medidas para prevenir y abordar todas las formas de exclusión y marginación, disparidad, vulnerabilidad y desigualdad en el acceso, participación y finalización de la educación, así como en los procesos y los resultados de aprendizaje. También requiere considerar la diversidad entre los estudiantes como una oportunidad para mejorar y democratizar el aprendizaje para todos los estudiantes. "[2].

Los documentos elaborados por la Secretaria de Inclusión social de la Universidad Nacional de Córdoba. [3].

Los documentos elaborados por la Universidad Tecnológica Nacional a través de Secretaría de Extensión, Inclusión Universitaria. [4]. La Universidad Tecnológica Nacional, como modelo de inclusión social [5].

1.3.2 Aspectos metodológicos de la investigación.

Es de destacar que el presente trabajo ha tenido como base teórica metodológica del psicólogo de la educación Robert E. Stake,. Universidad de Illinois en Urbana-Champaign y Director del *Center for Instructional Research and Currículo Evaluation* – CIRCE. Esta metodología es congruente con el estudio de casos en medicina y más todavía en la psicología, donde realiza su fundamentación el autor. El desarrollo en extensión de la metodología escapa al presente trabajo. Pero debido a las características singulares de los casos inclusivos es aplicable, según los parámetros de Stake.[6].

2 Grupos que requieren acciones inclusivas

2.1 Intenciones de la enunciación

La enunciación no pretende ser un exhaustivo listado de todos los posibles grupos con fragilidades especiales si no que es una expresión de nuestra experiencia a través de la muestra que representamos sin un estudio estadísticamente refrendado. Los casos analizados son para aulas presenciales.

2.2 Grupos detectados

- Con dificultades motrices permanentes.
- Con dificultades motrices transitorias.
- Con enfermedades.
- Con problemas económicos.
- Con dificultades de inserción cultural.
- Con adicciones.
- Estudiantes que trabajan.
- Estudiantes deportistas.
- Con dificultades especiales de aprendizaje.
- Con trastornos psicológicos.
- Con enfermedades crónicas.
- Con dificultades auditivas y de visión.
- Con problemas de idioma.
- Con otras dificultades.
- Discriminaciones socialmente habituales.

3 Especificidades de los Grupos a Incluir

3.1 Dificultades motrices

Se trata, en los casos más severos, de jóvenes con problemas para desplazarse y llegar al aula y requieren sillas de ruedas, o muletas, bastones. En otros casos tienen dificultades en la escritura, en el tránsito por escaleras. Los temblores de manos son frecuentes. Las dificultades motrices son transitorias cuando se refieren a accidentes o concluyen por intervenciones quirúrgicas efectivas. Suele haber alumnos con hemiplejias, paraplejias y hasta con cuadriplejias.[7]

3.2 Con enfermedades

Pueden ser crónicas o transitorias de largo tratamiento.

3.3 Problemas económicos

Se trata de abrir la puerta a todos los sectores sociales. Aún aquellos económicamente privados de la posibilidad de estudiar por carecer de recursos deben ser insertados, lo cual es contemplado en las políticas institucionales universitarias. Esta situación se evidencia en numerosos hechos, tales como la imposibilidad de acceder a material didáctico o la preocupación por acceder a la certificación que les permita obtener el boleto estudiantil gratuito [8].

3.4 Inserción Cultural

A veces muy ligada al grupo anteriormente descripto hay jóvenes provenientes de sectores marginales, que con gran esfuerzo intentan ingresar al sistema universitario, sin antecedentes familiares ni del medio social en el que están insertos.

3.5 Adicciones

En la actualidad hay muchos jóvenes con adicciones. Nos referiremos especialmente al uso sistemático de drogas peligrosas o alcohol. Estas provocan un aislamiento social muy característico, con las consiguientes consecuencias en el estudio y en todos los aspectos, con notables trastornos de conducta.

3.6 Estudiantes que trabajan

Habitualmente requieren horarios especiales adecuados a su trabajo y tienen mucho menos tiempo para dedicarse al estudio y presentan dificultades para el trabajo en equipo fuera del espacio áulico. Los trabajos a los que aceden los estudiantes por necesidad económica, al menos en los primeros años, son de muy baja remuneración, no registrados y por lo tanto sin certificación.

3.7 Estudiantes deportistas

Las dificultades con que se encuentran son similares a los que trabajan, aunque es habitual que presenten horarios cambiantes y ausencias prolongadas. La licencia por prácticas deportivas facilita y permite dicha práctica, aunque lleva a dificultar el estudio a los jóvenes.

3.8 Con dificultades especiales de aprendizaje

Se trata de jóvenes que no poseen problemas sicológicos evidentes y que con voluntarismo tratan de quedar incluidos en el sistema, con un transcurso jalonado de fracasos repetidos. En muchos casos la causa es por provenir de escuelas secundarias con enseñanza muy deficiente.

3.9 Con trastornos psicológicos

Alumnos ya diagnosticados y en tratamiento, o con la aparente necesidad de tratamiento. Detectados habitualmente por las características de sociabilización con los compañeros y docentes.

3.10 Con dificultades auditivas y de visión

A veces comunican al docente sus dificultades y otras son detectadas por el docente. En ningún caso se trabajó con discapacidades totales en estos aspectos.

3.11 Con problemas de idioma

Existe un examen obligatorio de suficiencia de idioma castellano llamado CELU, aunque los docentes con mucha frecuencia y aun las instituciones los discriminan aun cuando el desempeño del estudiante sea muy superior en el discurso escrito que el de los alumnos de lengua materna castellana.

3.12 Con otras dificultades

Podemos aquí casos tales como alumnos demasiado adelantados, precoces que deben ser tratados con especial cuidado, alumnos con problemas familiares, etc.

3.13 Discriminaciones socialmente habituales

Se producen con frecuencia y es la tendencia a la exclusión de individuos o grupos minoritarios de manera irracional y sencillamente por ser diferentes. Muy poco frecuentes o no detectados los episodios de discriminación por parte de los compañeros y si y en raras oportunidades por parte de algunos docentes [9].

4 Inclusión y capacidades efectivas

Con inclusión nos referimos a no expulsar a quien es capaz de estar en este segmento específico de la educación: estudiar ingeniería y más específicamente en este trabajo, matemáticas. Las evaluaciones finales son del mismo nivel para todos los alumnos con las especificidades, aunque el proceso y las modalidades son específicas y cambiantes para cada alumno o grupo. El proceso consiste en lograr una evolución a las conductas del alumno para lograr la mayor autonomía posible, consiguiendo la total autonomía en la mayor cantidad de casos dependiendo de la problemática [9].

4.1 Especificidad de la inclusión Educativa para las Matemáticas

Es muy diferente la inclusión en las matemáticas y no requieren en general cambios normativos como sucede en el caso de materias que requieren trabajo de campo como por ejemplo en Topografía, ni destrezas psicomotrices como por ejemplo en Dibujo Técnico para el caso de dibujo en tablero. En dichas materias se requieren modificaciones en las normativas de la cátedra y hasta en el currículo de la carrera.

Lo importante es destacar que las matemáticas son la herramienta fundamental del ingeniero y son inevitablemente exigibles, por lo cual no es factible prescindir de ellas y esto sí es una especificidad no salvable con modificaciones normativas para las carreras de ingeniería.

5 Casos testigo

A continuación, se describirán una serie de experiencias en las cuales se evidencian estrategias de inclusión a partir de la práctica áulica por parte de docentes [10]. Las intervenciones se dieron sin un respaldo teórico que actuara como soporte ni a partir de diseños o planificaciones, aunque sí con una actitud favorable a la inclusión como respaldo ideológico. Han sido experiencias pragmáticas que luego fueron reflexionadas teóricamente y se pudo evidenciar el efecto positivo con respecto tanto a la inclusión social como a la permanencia y avance académico de los alumnos. Se realizaron entrevistas a docentes.

5.1 Caso Alumno A

La primera experiencia que se eligió para desarrollar consta del abordaje que se llevó a cabo con un estudiante diagnosticado de una discapacidad motriz del tipo cuadripléjica. A los fines prácticos lo llamaremos Alumno A.
Alumno A ingresó a la carrera de Ingeniería Civil rondando los 30 años de edad. La docente tomó contacto con él durante el cursado de la materia semestral Introducción a la Ingeniería. La modalidad de enseñanza-aprendizaje prevalente en la misma es la participación y debate de los estudiantes en pos de la construcción de conocimientos referentes en especial a la tecnología.

Durante las primeras clases Alumno A solía concurrir hasta 15 minutos tarde, por lo general acompañado por un familiar que desempeñaba la función de tomar nota de lo que se desarrollaba conforme avanzaba la clase. Por tratarse de cursos de dimensiones pequeñas en relación a la cantidad de concurrentes, se necesitaban varios minutos para posicionar la silla de ruedas la que ocupaba más lugar que el habitual debido a que su respaldar estaba muy inclinado. Como se puede suponer con facilidad, este hecho insumía tiempo de dictado perjudicando a sus compañeros.

A pesar de su dificultad motriz para hablar, la docente insistió en la importancia de que Alumno A participe y comparta su opinión sobre los temas que se desarrollaban. A medida que pasaban los días intervenía con mayor frecuencia y cada vez con mejores aportes, evidenciando un real entusiasmo y dedicación al estudio.

La concurrencia al curso era numerosa, rondando los 70 estudiantes, hecho por el cual dificultaba el orden de los debates. Al mes de comenzadas las clases la frecuencia de los aportes de Alumno A demostraba una desinhibición positiva con respecto al deseo de la docente pero que había pasado a ser tan demandante que no daba lugar equitativo a sus compañeros.

Es menester aclarar un fenómeno común cuando en el ejercicio docente se presentan esta clase de escenarios que se constituye por el difícil equilibrio que se debe conseguir entre la atención singular que demandan los sujetos con capacidades diferentes y el desarrollo de la clase en conjunto con todos los estudiantes. Esto se aclara debido a que para apoyar a estos alumnos no sólo hay que hacerles notar que tienen la capacidad en ellos mismos de formarse en una vocación sino también que forman parte de un grupo de compañeros, de "iguales". El desafío es fomentar la empatía.

En este punto, la docente comenzó a mediar en que Alumno A debía esperar su turno respetando el de sus compañeros y logró una integración satisfactoria.

En una ocasión, al llegar el alumno hizo un aporte que dejó en evidencia su desconexión con la presentación de la clase debido a su llegada tarde. En ese momento, la docente aprovechó para destacarle que por su retraso no era oportuno porque perdía las consignas. A partir de ese día comenzó a llegar a tiempo.

Al aproximarse el primer examen parcial se le consultó a la madre de Alumno A si era posible que le dictara las preguntas, a lo cual respondió que no estaba capacitada. Por ende, se decidió tomarle examen personalmente en el mismo horario que sus compañeros. Las consignas se impartieron con total normalidad, en un tono de voz bajo evitando molestar al resto. Se le realizaba las preguntas y él respondía mientras la docente dejaba constancia escribiendo. Se notaba que Alumno A había estudiado y aprobó con buena calificación.

A la semana siguiente tuvo lugar el parcial de la asignatura "Introducción a la Matemática". En esta oportunidad la docente encargada manifestó no poder tomárselo, entonces, vista la situación, la profesora (quien se encontraba encargada de otra comisión de la misma materia) se ofreció a tomarle, incluyéndolo en la fecha estipulada para su curso. Se consultó con Alumno A, quien estuvo de acuerdo y se coordinó el proceso. A su vez se les comentó al resto de los estudiantes no habiendo ningún indicio de conflicto.

En cuanto a la prueba costó más tomarle el práctico que el teórico debido a la dificultad de plasmar en papel su razonamiento. Aprobó con un nivel medio.

Al comienzo de dicho examen la docente notó que varios estudiantes que habitualmente ocupaban los primeros asientos, al ver entrar a Alumno A se cambiaron al último del aula. La clase siguiente manifestaron públicamente que se cambiaron porque al verlo en silla de ruedas "les dio impresión". Se puede afirmar que fue positivo que hayan sentido la libertad de expresar lo que les sucedió a pesar de que generara una situación incómoda. Ello habilitó a que la docente les explicara su punto de vista: sin pretender perjudicarlos, Alumno A tenía el derecho de ser incluido en el aula para rendir. Además, se les había consultado antes del parcial y habían estado de acuerdo. Pero, es entendible que no es lo mismo una situación en la teoría, hipotética, que en la práctica, ya que a cada persona le afecta de un modo diferente compartir espacios con personas diferentes, por ser sujetos de una sociedad excluyente. Fue por eso que la docente manifestó que para el próximo examen iba a tener en cuenta todas las opiniones.

Volviendo al dictado de la asignatura "Introducción a la Ingeniería", Alumno A realizó en grupo el trabajo que es requisito para promocionarla y aprobó el segundo parcial con una muy buena calificación.

En el caso de la materia "Introducción a la Matemática" quedaban por tomar dos parciales, de los cuales aprobó uno y el otro no, por consiguiente, tuvo que recuperar este último. La sorpresa fue que los alumnos que habían manifestado su incomodidad ya no volvieron a cambiarse de lugar en la sala. Al preguntarles el por qué, los estudiantes respondieron que cayeron en la cuenta de que Alumno A era uno más, con los mismos derechos, y le agradecieron el haberles hecho ver esa realidad.

Como afirmó una vez Stephen W. Hawking, *"La discapacidad no debería ser un obstáculo para el éxito. Yo mismo he sufrido una neuropatía motora durante la práctica totalidad de mi vida adulta, y no por ello he dejado de desarrollar una destacada carrera profesional como astrofísico y de tener una feliz vida familiar"*.

5.2 Caso Alumna B

La segunda experiencia que se escogió para describir aconteció con una joven que sufría de severos problemas relacionados con la adicción a las drogas mientras cursaba la asignatura "Introducción a la Matemática".

La aproximación de esta muchacha, a quien llamaremos Alumna B, comenzó un día en el que se acercó a la docente para extenderle una petición de autorización para ausentarse a clases debido a que viajaría a otra provincia por un severo tema relacionado con su salud. Se le respondió que no existía ningún inconveniente y, con suma delicadeza para que no sienta que invadía su privacidad, se le preguntó qué le estaba sucediendo.

Estando a solas en el aula Alumna B le comenta a la docente que desde hacía alrededor de 6 años consumía diferentes tipos de drogas y que, en consecuencia, le había afectado seriamente a la sangre, motivo por el cual viajaba alrededor de 4 veces al año para hacerse un tratamiento específico. La confesión, si se puede llamar así, causó extrema sorpresa por tratarse de una problemática desconocida en cuanto al proceder por parte de una docente ingeniera. En ese momento escuchó con atención y sin poder realizar comentario alguno.

Alumna B siempre se había desempeñado académicamente muy bien, seguía la materia, realizaba varias consultas y transcurrido el cuatrimestre promocionó.

Cada clase ella buscaba la oportunidad de conversar. Hacía unos meses que estaba en rehabilitación y era notorio que el apoyo en la escucha y contención de la docente tenía buenos frutos. Tanto fue así que luego de finalizadas las clases seguían compartiendo charlas en la Facultad.

Al cumplirse el año de no consumir sustancia alguna, quedaron de acuerdo de hacer un festejo las dos en la Facultad con una merienda. Ese día fue muy lindo y emotivo, una situación inolvidable por ver a una persona superando su problema.

5.3 Caso Alumna C

La tercera experiencia que se escogió tuvo lugar con una joven deportista federada a quien llamaremos Alumna C. Cuando un estudiante se dedica en forma paralela a un deporte, el cual le insume más tiempo que el habitual, muchas veces coinciden los días de exámenes con las fechas de competencias y a pesar de que son casos que están contemplados en la legislación vigente, es una realidad que no es fácil que puedan seguir el normal desarrollo de la carrera (más aún carreras tan demandantes como Ingeniería).

Alumna C concurría a las clases de la asignatura "Análisis Matemático II", materia del segundo año del ciclo básico. A su vez, practicaba deporte de remos y debía viajar bastante seguido. Este hecho le dificultaba seguir correctamente el cursado de la materia. La docente respetó las normativas pero intuyó que iba a ser posible que no promocionara la materia por una cuestión humana de tiempos.

Considerando su compromiso de realizar las dos actividades se la ayudó con especiales consideraciones para la comprensión de la materia siendo conscientes de que se trata de una de las materias con más complejidad del ciclo básico. Por ejemplo, los exámenes parciales los rendía en horarios de otras comisiones a cargo de la misma docente. De este modo, finaliza el cuatrimestre promocionando la materia.

Hace unas semanas se encontraron en el bar estudiantil de la Facultad. La docente se acercó a saludarla y con mucha emoción Alumna C le agradeció el apoyo ofrecido y le comunicó que estaba por recibirse de Ingeniera Civil.

5.4 Caso Alumno D

El próximo caso que se desarrollará es el de un estudiante que estaba pasando por una situación compleja de problemas familiares.

Durante el dictado del curso de "Análisis Matemático II", Alumno D (habiendo aprobado dos de tres parciales) se acerca a la docente para comentarle su situación: debía acompañar a su padre a quien le realizarían una operación complicada y urgente, con riesgo de vida. El estudiante había nacido en otra provincia.

Sin dudar, la docente le aconsejó que en sus prioridades primero estaba el acompañar a su padre y que lo demás pasaba a segundo plano. A los pocos días avisó que el estado de su padre había agravado y la intervención quirúrgica era inmediata. Debido a la proximidad del último examen parcial, viajó para acompañar a su padre con la garantía de parte de la docente de que después se vería cómo retomaba el cursado.

Alumno D regresó a las semanas con la buena noticia de que su padre había sobrepasado la operación de forma satisfactoria y le entregó a la docente un regalo en forma de agradecimiento al apoyo y comprensión. El presente era un libro del Papa.

El estudiante finalmente promocionó la materia.

5.5 Otros casos brevemente expuestos

1. El Alumno E en su primer año de universidad sufrió una lesión de la columna vertebral a nivel cervical, en un partido de rugby, al año siguiente reinició su carrera de ingeniería civil, ya cuadripléjico. El alumno era muy aplicado y con la dedicación específica de los docentes aprobó las materias de matemáticas con notas excelentes, con exámenes orales. El alumno adquirió gran autonomía en todos los aspectos, ya que, debido a su buena posición económica familiar, consiguió apoyo tecnológico hasta para su traslado vehicular y en silla de ruedas. Hoy es un destacado profesional del medio.

2. El Alumno F era estudiante deportista, del seleccionado argentino de rugby sub 20. Con la licencia deportiva muy extendida ya que ese año era el campeonato mundial de su disciplina deportiva, consiguió aprobar por promoción con muy buenas notas Introducción a la Matemática y Álgebra Lineal (8 en ambas). El apoyo docente consistió en diálogos indicativos y cronogramas para el estudio de manera autónoma y clases de consulta. El alumno contaba con tiempo libre en sus lugares de concentración deportiva, que fueron aprovechados para estudiar. El alumno no acudió al auxilio de instituciones particulares de apoyo. Ese año el seleccionado argentino sub 20 salió tercero a nivel mundial. Valga mencionar que a la cátedra de Introducción a la Matemática y de Álgebra asistieron y aprobaron jugadores profesionales de básquetbol y fútbol y quien era el campeón argentino de kick boxing, mientras estudiaba matemáticas.

3. El alumno G era un niño prodigio, ingresó a estudiar ingeniería los 13 años de edad. Simultáneamente estudiaba tres carreras, las otras dos eran Economía en la Facultad de Ciencias Económicas y la Licenciatura en Computación en la FAMAF de la U.N.C. El jovencito tenía 6 años menos que sus compañeros, el riesgo era el aislamiento, se trabajaba con consignas generales de integración en grupos. El docente no mostraba dedicación orientada al jovencito en ningún momento. Lu madurez afectiva del jovencito era la de un niño de 13 años, sin embargo, sus intereses en el estudio coincidían con los de sus compañeros, que frecuentemente acudían a él. Un elemento fundamental era su humildad y su naturalidad actitudinal. La integración fue total y el éxito de sus planes formativos actualmente van tornándose realidad. Es frecuente que el sistema educativo tienda a expulsar a quienes son diferentes, aún tratándose de alumnos superdotados.

6 Estrategias utilizadas y recomendadas

Nuestras estrategias inclusivas son en última instancia pragmáticas, aunque enmarcadas por paradigmas humanistas contemporáneos actuales reflejados por las Naciones Unidas y más cercanamente por protocolos de la Universidad Nacional de Córdoba y la ley de Educación Superior [11].

6.1 Dificultades motrices

Como institución la Universidad tiene protocolos ineludibles de diseño para permitir el acceso y sanitarios adecuados. Como docentes debemos solicitar las aulas adecuadas al tipo de dificultad de los estudiantes [12].

6.2 Con enfermedades o adicciones

Más allá de la normativa, respetar naturalmente las exigencias de las posibilidades del alumno, admitiendo horarios especiales, facilitando el cursado.

6.3 Problemas económicos

Ya existen en nuestro medio elementos inclusivos como las becas de estudio y el boleto educativo. Es necesario profundizar este camino, con seguimientos serios del rendimiento académico de los becarios. Tampoco se debe confundir con becas que convierten al estudiante en mano de obra barata para empresas. Existen organizaciones que se ocupan del tratamiento de jóvenes adictos dentro y fuera de la Universidad, pero es el docente en el aula quien debe, de acuerdo a la autoaceptación del estudiante de su problemática, indicar que se dirija al gabinete psicopedagógico o medicina estudiantil para ser ayudado en sus dificultades.

6.4 Inserción Cultural

Esta inserción tiene que ver en la actividad áulica con la aceptación y la no discriminación. Aunque el aprovechamiento de las capacidades individuales y la motivación para convertirlas en efectivos estudios universitarios dependen de políticas educativas y sociales globales, que exceden a la Universidad.

6.5 Estudiantes que trabajan y deportistas

Deben respetarse los horarios que permitan al joven trabajar, ya que en los primeros años es por razones económicas. La mayor dificultad es establecer la veracidad del trabajo del estudiante ya que en gran parte de los casos es trabajo en negro, sin certificación posible. En cuanto al deporte se trata de una actividad legislada y permitida al alumno, por lo cual cabe al profesor la facilitación del estudio y el momento de evaluación al estudiante.

6.6 Con dificultades especiales de aprendizaje o con trastornos psicológicos

Se trata de jóvenes que poseen o no problemas sicológicos evidentes. El docente debe o bien intentar motivar la asistencia a las clases de consulta. Frecuentemente debe aconsejarse con toda prudencia dirigirse al gabinete psicopedagógico. Los alumnos que deben ser tratados con especial prudencia.

6.7 Con dificultades auditivas y de visión y otras dificultades

Permitirles ubicaciones adecuadas, al frente del aula y al centro. Estimularlos a concurrir al centro de atención médica estudiantil. Debemos investigar como docentes las problemáticas adicionales, recomendando la concurrencia médica si estimamos pertinente. Las clases de consulta siempre son una opción a ofrecer.

6.8 Con problemas de idioma

Se debe estimular al alumno a incrementar los estudios en español, si se detectan dificultades especiales. Con frecuencia hay alumnos haitianos cuya lengua madre es el creole y la de escolarización el francés o estudiantes árabes de lengua madre árabe y como lengua adicional el francés. Debe el docente ser tolerante en los aprendizajes iniciales.

6.9 Discriminaciones socialmente habituales

Formación en todos los ámbitos universitarios en contra de la discriminación, exhibiendo la debilidad del discriminador como un mal social del que no es ajena la Universidad. Se producen discriminaciones por parte de docentes como lo es en todos los grupos de la sociedad.

7 Recomendaciones generales

El docente no es necesariamente médico, ni psicólogo, ni trabajador social para diagnosticar a un alumno en las dificultades que no le permiten incluirse en el Sistema Educativo Universitario, por ello las acciones del docente como tal son facilitadoras de la inclusión y deben contener necesariamente la indicación de dirigirse a las dependencias universitarias que se ocupan de su dificultad, donde están los profesionales que diagnosticarán y conducirán al joven en su camino inclusivo [13].

Es recomendable incentivar a los estudiantes en la inclusión de sus compañeros, en la solidaridad basada en la comprensión de la problemática concreta. Esto exige criterios de privacidad y prudencia cuando correspondieren.

Es imprescindible motivar a los alumnos en riesgo de exclusión, en la seguridad de la posibilidad de continuar en el sistema educativo exitosamente, con las particularidades que tuvieren [14]

Se deberá solicitar a las instituciones educativas la inversión tecnológica necesaria para lograr la inclusión. Ya que en la actualidad existen medios poderosos brindados por la informática, las comunicaciones y la ingeniería biomédica como facilitadores de la inclusividad. Es importantísima la accesibilidad informática.

Se deberá institucionalmente realizar un seguimiento racional y científicamente respaldado de los casos de discriminación, apuntando a revertirlos hasta su desaparición.

8 Conclusión y continuidad

El trabajo docente inclusivo en las materias de enseñanza de matemáticas en las Facultades de Ingeniería, por la masividad de la concurrencia a las mismas exige un esfuerzo muy grande y del docente. Consiste en un seguimiento personal de cada uno de los alumnos para detectar dificultades. Esto requiere para una correcta realización del mismo de: 1º) Conocimiento, para lo cual hay que formar al docente en la Inclusión Social Educativa. 2º) Una relación docente alumno mayor que la actual, donde las comisiones promedian en la mayoría de las materias de matemática los 80 alumnos. 3º) La estructuración de un sistema mixto de educación inclusiva: presencial y virtual, más allá de la pandemia.

Es nuestra intención continuar con el presente realizando un trabajo respaldado científicamente con el uso de estadísticas ya que contamos con un universo de estudio de 20 docentes y más de 2000 alumnos anuales, suficiente para proceder a encuestas representativas. Por otra parte, será importante realizar un curso multidisciplinario con la temática inclusiva, que deberá ser multidisciplinario con docentes médicos, sicólogos, trabajadores sociales, abogados, etc.

Es nuestra intención realizar posteriormente un trabajo teórico pedagógico que involucre la investigación de casos, como metodología [15].

Agradecimientos. Agradecemos la generosa disposición de nuestras asesoras: la Licenciada en Psicología Débora Rodríguez, Universidad Nacional de Córdoba y la Licenciada en Pedagogía Sandra Ramos de la Facultad Educacional de Lapa, Paraná, Brasil.

Referencias

1. Dirección de Inclusión Social de la Universidad Nacional de Córdoba. https://www.unc.edu.ar/vida-estudiantil/dirección-de-inclusión-social.-Ingreso 18 de Abril de 2022.
2. UNESCO -Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación. Publicado en 2017 por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura 7, place de Fontenoy75352 París 07 SP, Francia.
3. Idem 1.
4. Secretaría de Extensión de la U.T.N. Inclusión Universitaria. http://www.seu.utn.edu.ar/extension/inclusion-universitaria.php .- Ingreso 17 de Abril de 2022.
5. Silva, Enrique D. La Universidad Tecnológica Nacional como modelo de inclusión social. 2012. Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional.

6. Stake, Robert .E. Investigación con estudio de casos, Roc Filella (trad.) 3ª ed. , Ediciones Morata, 1998, ISBN 978-84-7112-422-7 – España.
7. Booth T. y Ainskow M. Guía para la Educación Inclusiva. FUHEM. c/ Duque de Sesto, nº 40. 28009 Madrid. 2015. OEI. Ed. Grafilia. ISBN: 978-84-95801-34-0
8. Ley 27204. Modificación de la Ley N° 24.521. Sancionada: Octubre 28 de 2015. Promulgada: Noviembre 09 de 2015.
9. Urbina C., Simón C. y Echeita G. Fundación Infancia y Aprendizaje, ISSN: 0210-3702 *Infancia y Aprendizaje,* 2011*, 34* (2), 000-000 España.
10. Idem 6.
11. Lovari C. y equipo. Ministerio de Educación de la Nación. R, Argentina. Educación inclusiva. Fundamentos y prácticas para la inclusión. Argentina 2019. ISBN: 978-987-47076-5-9
12. Bausela Herreras E. Atención a la diversidad en educación superior. 2002. Universidad de Granada. España. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado. ISSN: 1138-414X.
13. Echeita G. Inclusión y exclusión educativa. De nuevo "voz y quebranto". ISSN: 1696-4713 Revista Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación. 2013 - Volumen 11, Número 2. España.
14. Echeita G.y Sandoval M. Educación inclusiva o educación sin exclusiones. *Revista de Educación,* núm. 327 (2002), p. 31-48.
15. UNESCO. La educación inclusiva: el camino hacia e l futuro. Ginebra, 30 de abril de 2008. Presentación General de la 48ª reunión de la CIE. Consultada el 10 de mayo 2022. http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Policy_Dialogue/48th_ICE/General_Presentation-48CIE-4__Spanish_.pdf

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Actividades de investigación para el estudio del Método de Mínimos Cuadrados en un curso de Algebra Lineal en Carreras de Ingeniería

Viviana Angélica Costa[1]
[1] IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
Calle 1 y 47, La Plata, Buenos Aires, CP 1900
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presentan actividades de investigación implementadas en un curso de Álgebra Lineal con estudiantes para Ingeniería. Estas se basan la Teoría Antropológica de lo Didáctico que propone acercarse hacia el Paradigma del Cuestionamiento del Mundo con el objetivo de enfrentar el problema de la desarticulación de contenidos, del monumentalismo de los saberes y de la ausencia de la modelización matemática. Mediante una metodología de investigación con enfoque interpretativo se muestra que las actividades resultan ser una alternativa al paradigma tradicional de enseñanza posibilitando a los estudiantes construir objetos matemáticos realizando tareas vinculadas con: el método científico, el registro de datos experimentales, la construcción de un modelo matemático, el uso del software GeoGebra y la re significación de resultados para un problema real.

Palabras Clave: Actividad de investigación, Método de Mínimos Cuadrados, Algebra Lineal.

1 Introducción

Las praxeologías relativas al Algebra Lineal son fundamentales en la formación del ingeniero, por su utilidad en la resolución de múltiples problemas en esa disciplina. Aunque, muchas de las veces, su nivel de abstracción, su enseñanza descontextualizada de situaciones problémicas reales, y los diferentes tipos de lenguajes que utiliza, provocan en el estudiante un sinfín de problemáticas vinculadas con su aprendizaje. Esto ha sido mencionado, desde hace algunas décadas por varios investigadores [1-2-3-4].

Con el objetivo de realizar aportes para dar soluciones a esta problemática, se diseñan e implementan *actividades de investigación* basadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico que pretenden avanzar hacia el Paradigma del Cuestionamiento del Mundo (PCM), de modo que los estudiantes construyan los objetos matemáticos a partir de investigar cuestiones a preguntas vivas de las cuales no hay una respuesta inmediata. Además, tales actividades proponen fomentar un pensamiento crítico, favorecer una actitud activa en el alumno que construya los conocimientos por sí mismo, aprendiendo a organizarse, a buscar y seleccionar información [5].

Esta propuesta daría respuesta a la problemática docente de la "enseñanza tradicional universitaria" ligada a la pérdida de sentido y a la desarticulación de los contenidos matemáticos escolares, preguntándose en este caso, en forma similar a como se postula en [6], ¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en un curso de Algebra Lineal en carreras de ingeniería no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido, sino que aparezcan de manera funcional como herramientas para dar respuesta a cuestiones problemáticas?

En este sentido, en este escrito se describen brevemente las *actividades de investigación* que se desarrollan, en forma experimental, en un curso de modalidad presencial de Algebra Lineal y que se continuaron realizando al pasar a la virtualidad, ocurrida en marzo del año 2020 a raíz de que se anunciara el Aislamiento Social, Preventivo y Obligatorio (ASPO) con el objetivo de prevenir la propagación del COVID-19 en el territorio de la República Argentina.

A continuación, se presenta el marco teórico, las condiciones de la experimentación, las actividades propuestas junto con alguno de los resultados obtenidos y finalmente se presentan las conclusiones.

2 Marco teórico

La investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard [7]. Esta teoría entiende a la matemática como una actividad humana antropológica y propone avanzar con el denominado Paradigma del Cuestionamiento del Mundo (PCM), en el cual la actividad de indagación, de cuestionamientos y de investigación, sean el motor de los procesos de estudio, tal como lo pueden llevar a cabo un grupo de científicos. Este cuestionamiento se generaría siempre en torno a una situación problemática que no pueda resolverse directamente o bien buscando en un libro, en la web, por ejemplo. Es decir que se requiere para dar respuesta de la creación de diferentes tipos de modelos: conceptuales, analógicos, gráficos, físicos o matemáticos, del sistema en cuestión (o de una parte de este) con el objetivo de reformular y simplificar la cuestión problemática inicial y avanzar hacia una posible respuesta.

3 Proyección ortogonal y aproximación de cuadrados mínimos

Las praxeologías matemáticas relativas al Algebra Lineal que quedan dentro de la realización de las actividades de investigación y que estudian los estudiantes para dar respuesta a las preguntas de investigación son las de proyección ortogonal y el Método de Mínimos Cuadrados.

La proyección ortogonal de un vector v de R^n sobre un subespacio vectorial S de R^n puede entenderse como la mejor aproximación al vector v basada en un vector de S. Si se desea aproximar v mediante un vector w en S, la mejor aproximación se logra eligiendo w como el vector de S más cercano a v, y tal vector es entonces la *proyección ortogonal* de v sobre el subespacio S.

Un ejemplo de utilidad de esto, es buscar la mejor solución a un sistema de ecuaciones lineales $A.c=v$ de n ecuaciones y m incógnitas, con A matriz de nxm, c de $mx1$ y v de $nx1$, donde el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas. Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces la solución, si existe, es única, pero típicamente el sistema será incompatible, ya que las columnas de A generan sólo un subespacio de dimensión $m < n$ de R^n.

En estos casos, se elige en general la "solución" de cuadrados mínimos, que es la que minimiza la cantidad al cuadrado de la distancia de v a un vector $A.c$ de S, y por lo tanto la distancia mínima se logra para c tal que $A.c$ sea la proyección ortogonal de v sobre S. Esto se obtiene luego de algunos cálculos resolviendo el denominado sistema de ecuaciones normales: $(A^T.A).c=A^T.v$ donde $A^T.A$ es de orden mxm y no singular. Esto último es conocido con el nombre de Método de Mínimos Cuadrados.

4 Condiciones de la experimentación

La investigación con enfoque interpretativo [8] se desarrolla en un curso de matemática denomino Matemática C, asignatura del tercer semestre en los planes de estudio, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata en Argentina. La metodología de trabajo en estos cursos era, hasta antes de declararse el ASPO, del estilo teórico-práctico, 100% con actividad presencial en las aulas de la facultad, con estudiantes trabajando en grupos, y los docentes siendo guías del aprendizaje en torno a un material de cátedra editado que comprende los temas curriculares. Estos son: Series de potencias y Taylor, Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, matriz inversa, determinante, rango, Espacios vectoriales, bases, dimensión, Transformaciones lineales, Proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial, Autovalores y autovectores de una transformación lineal, Diagonalización de matrices, Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y sistemas de ecuaciones diferenciales, Series de Fourier y resolución de ecuaciones en derivadas parciales [9 – 10].

A partir del decreto que estableció el ASPO, durante la segunda semana de marzo de 2020, las clases que habían comenzado presenciales, tuvieron rápidamente que adaptarse a la virtualidad, manteniendo el esquema planificado de exámenes y del estudio de los contenidos curriculares. Esto se convirtió en un verdadero reto para todos los docentes ante el cambio abrupto de pedagogía y de cómo se iba a gestionar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos. En este caso, el curso para adaptarse a la modalidad virtual utilizó la plataforma Zoom para el dictado de las clases sincrónicas y el Google Classroom como herramienta, para publicar el contenido educativo, hacer anuncios, evaluar y recibir-responder consultas.

Las actividades de investigación experimentadas en estos cursos se desarrollaron en la presencialidad, y con el paso a la virtualidad, se decidió darles continuidad, en una tarea en el Classroom. Estas actividades son tres, y parten de una pregunta o desafío distinto. Para buscarle respuesta, es necesario registrar un conjunto de pares de datos, que con la ayuda del software GeoGebra, pueden ser visualizados en la Vista Grafica, y proceder a buscar y hallar un modelo funcional que mejor los ajuste, dando lugar al estudio del Método de Mínimos Cuadrados. Para ello, utilizan técnicas del Algebra Lineal: matrices, operaciones y proyección ortogonal de un vector sobre un espacio vectorial [11]. Este método es un procedimiento de gran utilidad en diversas disciplinas ya que permite determinar una función o modelo (lineal, polinómica, exponencial, entre otros) que mejor se aproxime a un conjunto de datos (pares ordenados) en el sentido que minimice la suma de cuadrados de las diferencias de las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función y los correspondientes datos. Los modelos de ajuste en estos problemas son no lineales (exponencial y potencial), con lo cual previamente deben linealizar antes de poder aplicar el método mencionado. La actividad 1 y la 2, se implementan tanto en modalidad presencial y virtual, y la actividad 3 que parte de una pregunta que surgió por la propagación del COVID-19 se realiza solamente en modalidad virtual durante el año 2020.

Las actividades se desarrollan en cursos con aproximadamente 60 estudiantes (sujetos de estudio) de distintas carreras de ingeniería (civil, hidráulica, electrónica, química, mecánica, industrial, aeronáutica, entre otras), que se distribuyen en grupos de hasta tres integrantes. Esto último, se propone para el desarrollo de la competencia de "trabajo en equipo", establecida como competencia genérica necesaria para un ingeniero, en el Libro Rojo del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI, asociación civil sin fines de lucro de carácter educativo cultural, conformada por los decanos de las facultades de ingeniería de las universidades públicas y privadas de Argentina) [12].

Para realizar la actividad, cada grupo selecciona una, de las tres propuestas. El tiempo estipulado de desarrollo, es de aproximadamente tres clases que se intercalan con trabajo fuera y dentro del aula/clase sincrónica, con ayudas del profesor de ser necesario. Al finalizar, cada grupo presenta un informe con lo realizado y se hace un cierre con la presentación en clase de cada una de las actividades. Esto sirve de insumo para describir e interpretar lo realizado por los sujetos de estudio, que se describe a continuación.

5 Actividades de investigación

5.1 Actividad 1: Problema luz-distancia

Las preguntas que orientaron esta investigación son: *¿Qué entendemos por intensidad luminosa y cómo se mide? ¿Cuáles son las unidades más usuales en las que se mide? La intensidad luminosa varía en función de la distancia al foco. ¿Conoces de qué forma varía? ¿Podrían dar un ejemplo del uso de conocer la intensidad luminosa? ¿Qué es un sensor? ¿Conoces por qué algunos celulares tienen incorporado un sensor de luz? ¿Sabes cómo funciona el flash incorporado en el celular? ¿Cuándo se activa automáticamente? Se propone responder al desafío: Supongamos que sacas una fotografía con la cámara de tu celular. Imagina que estás con el flash y situado a un metro de tu objetivo. Si desplazas la luz hasta doblar la distancia con éste (2 metros), ¿Cuánta luz le llegará?*

El desarrollo de la actividad, realizada en la presencialidad, se describe en [13 - 14]. La realizada en virtualidad (años 2020 y 2021) tuvo características similares, con la diferencia que los estudiantes realizaron los experimentos, toma de datos (lux recibidos por el emisor y distancia al foco) (Tabla 1) y uso de software GeoGebra, en sus casas, y no en los laboratorios de la facultad (Figura 1).

Realizan un experimento utilizando los materiales siguientes: dos smartphones (uno hace de emisor y el otro es utilizado como luxómetro), cinta métrica, la aplicación *Physics Toolbox Sensor Suite* [15] (para el celular que hace de luxómetro), oscurecer una habitación, papel y lápiz para registrar datos. Registran los pares de datos, que a modo de ejemplo se muestra lo obtenido por un grupo en la Tabla 1, que luego ajustan mediante el Método de

Mínimos Cuadrados por un modelo funcional del tipo potencial $f(x)= k.x^m$.

Luego de hallar los parámetros del modelo funcional, es decir dar los valores de k y m, les permite validar los resultados encontrados con la Ley Física de la Inversa del Cuadrado a la Distancia: $I=C/d^2$ (intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), dando un significado para m que resulta ser aproximadamente *-2* para este caso.

Tabla 1. Datos lux recibidos a una distancia en metros del emisor.

Distancia (metros)	0,10	0,20	0,30	0,4	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10	1,30	1,50
Lux	3051	1041	570	398	301	256	217	179	163	127	107	92

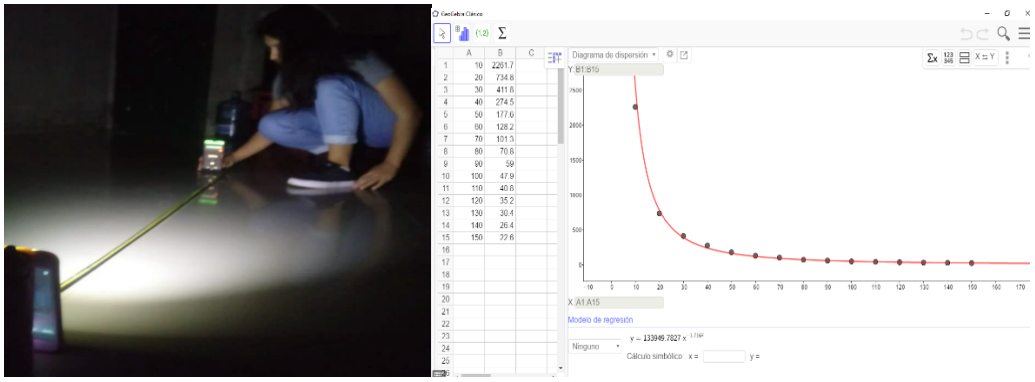


Fig. 1. Luz-distancia: actividad de investigación realizada por los estudiantes en virtualidad.

5.2 Actividad 2: Problema de la espuma de la cerveza-tiempo

Las preguntas que orientaron esta investigación son: *¿Qué entiendes por desintegración? ¿Cuáles tipos de desintegración conoces? La desintegración de una cierta materia varía en función del tiempo: ¿Conoces de qué forma varía? ¿Qué entiendes por decrecimiento exponencial? ¿Podrían dar un ejemplo del uso de conocer la desintegración de cierta materia? ¿Podrá servir conocer el proceso de desintegración para analizar la calidad de una cerveza? ¿Sabes cómo se llama a la espuma de la cerveza*? *Investiga sobre la espuma de la cerveza. Los catadores la consideran un parámetro de calidad. Desafío: Seleccionar dos marcas de cerveza que se encuentren a la venta en Argentina. ¿Cuál recomendarías y por qué?*

Para el desarrollo de la actividad los estudiantes realizan un experimento, que consiste en colocar, en un vaso con una regla pegada a él, una buena cantidad de cerveza la cual tendrá una considerable cantidad de espuma. A medida que pase el tiempo se mide el decrecimiento de la altura de la espuma cada 15 segundos, los primeros 2 minutos, y cada 30 segundos el tiempo restante (se mide la altura para un vaso o recipiente de diámetro homogéneo, tal que el volumen de espuma sea proporcional a la altura).

Cada grupo, registra los pares de datos para dos tipos de cervezas seleccionadas, en sus casas. Luego los modelan mediante un modelo funcional de decaimiento exponencial del tipo $f(x)=k.e^{ax}$. Linealizando, usando GeoGebra, y mediante el estudio y aplicación del Método de Mínimos Cuadrados, dan una respuesta al problema (Figura 2).

A modo de ejemplo, un grupo registra los siguientes datos para dos cervezas de venta en Argentina: (1) Marca Quilmes tipo Lager clásica con 4,9% de alcohol, compuesta por malta, cebada, lúpulo, cereales y levadura, (2) Marca Schneider, cerveza roja con 5% de alcohol, compuesta por agua, malta, cebada, lúpulo, cereales y levadura (Tabla 2).

Este grupo, a partir de los resultados que obtienen concluyen que, de las cervezas usadas, la Schneider es de mayor calidad debido a que forma mayor cantidad de espuma y dicha espuma decae más lento que la cerveza Quilmes, esto lo responden a partir de investigar que la espuma de la cerveza es un factor de mucha importancia a la hora de definir la calidad de la misma; y de la obtención de los parámetros k y a del modelo funcional, que

obtienen de aplicar el método de Mínimos Cuadrados a cada conjunto de datos.

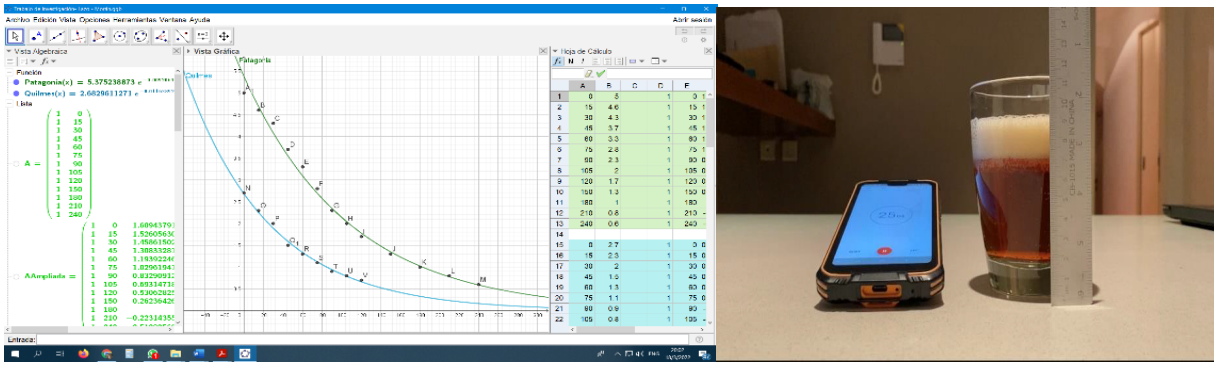


Fig. 2. Espuma de la cerveza: actividad de investigación realizada por un grupo de estudiantes.

Tabla 2. Datos registrados de tiempo y altura de la cerveza.

Tiempo [Segundos](x)	Cerveza (1) Quilmes Altura [centímetros](y)	Cerveza (2) Schneider Altura [centímetros](y)
0	10	9,8
15	8,3	9,7
30	7,3	8,5
45	6,8	7,8
60	6	7
75	5,8	6,1
90	5,5	5,6
105	4,9	5,5
120	4	5
150	3,6	4,5
180	3	3,9
210	2,5	3,6
240	2,2	3
270	1,8	1,8
300	1,6	0,9
330	1,4	0,2
360	1	x
390	0,2	x

5.3 Actividad 3: Propagación del COVID-19

Esta actividad fue realizada en virtualidad, subida en una Tarea creada en el Classroom. Las preguntas son: ¿Qué significa que un crecimiento sea exponencial? ¿Qué significado tienen cada uno de los parámetros del modelo exponencial? ¿Conoces que propiedades tiene la función exponencial? ¿Cuáles fenómenos conoces que tengan un crecimiento exponencial? ¿A qué se llama en el crecimiento exponencial, tiempo de duplicación? ¿Cómo se calcula? ¿Por qué conocer el tiempo de duplicación sería importante? ¿Podrá servir conocer el proceso de crecimiento exponencial y el tiempo de duplicación de cantidad de infectados en una población para analizar la propagación de enfermedades infectocontagiosas? ¿Y en particular para la propagación del COVID-19?

La actividad consiste en estudiar, usando información obtenida de internet, la propagación de la cantidad de

infectados causada por el COVID-19, a partir de calcular el "tiempo de duplicación" para dos ciudades o dos países a elección por cada uno de los grupos de estudiantes que la realizan, e inferir según sean los resultados obtenidos acerca de las medidas gubernamentales adoptadas por los distintos estados.

Investigan sobre estas preguntas, re-significan el concepto de función exponencial $f(x)=b.e^{ax}$ con a y b constantes, como modelo de procesos que evolucionan en el tiempo donde la variación de la cantidad existente de materia es proporcional a esa cantidad. Mencionan que la constante a se denomina tasa de crecimiento (o decrecimiento) y la constante b se denomina cantidad inicial dado que $f(0)=a$. En relación a las propiedades de la función exponencial enumeran propiedades algebraicas y funcionales y dan la expresión para calcular el *tiempo de duplicación* ($T=ln(2)/a$). Mencionan la importancia de estimar este dato para conocer en una población la propagación del COVID-19. En epidemiología, en general, la tasa a, se halla considerando la cantidad de infectados en una "ventana" de cinco, siete u ocho días, que se ajustan por una función exponencial (Infobae, 2020). Conocer ese valor permitiría dar respuesta a la efectividad (o no) de las medidas impuestas de aislamiento social en una población para controlar la propagación de un virus.

Cada grupo de estudiantes busca información en la web sobre la cantidad de infectados de dos países o ciudades a elección en una "ventana" de 8 días, para comparar con qué cantidad de contagiados los gobiernos toman medidas para detener la propagación del virus. Luego, utilizan GeoGebra para analizar los datos. Utilizan las Vistas Algebraica, Vista Hoja de Cálculo y Vista Gráfica. Con los datos de cada uno de los dos países o ciudades elegidas, crean una lista de puntos con el comando ListaPuntos, que grafican en la Vista Gráfica. Para cada par de datos (xi,yi) con i=1,..8, escriben las relaciones $f(xi)=b.e^{axi}=yi$, obteniendo un sistema no lineal que posteriormente linealizan aplicando logaritmo a ambos miembros, teniendo así un sistema lineal que escriben en forma matricial A.X=B. Con ayuda del comando EscalonadaReducida encuentran que el sistema es incompatible. Esto significa que el vector B no pertenece al Espacio Columna de A, dando esto lugar al estudio del cálculo de la Proyección Ortogonal de un vector sobre un Subespacio Vectorial, para obtener la solución por Mínimos Cuadrados. Encontrados los valores de a y b, arman la función de ajuste $f(x)=b.e^{ax}$ y con el dato de a calculan los tiempos de duplicación.

A modo de ejemplo se muestra lo realizado por un grupo que seleccionó comparar dos países: Argentina y Brasil, en un mismo período de tiempo, obteniendo los datos que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Cantidad de infectados por COVID-19 del año 2020.

Fecha	Argentina	Brasil
27-marzo	690	3417
28-marzo	745	3904
29-marzo	820	4256
30-marzo	966	4579
31-marzo	1054	5717
01-abril	1133	6836
02-abril	1265	8044
03-abril	1353	9056

Tal grupo menciona que eligen esos países porque actuaron de manera diferente contra el coronavirus. Además, eligen los datos de esos días ya que cuenta desde la semana siguiente a la que se aplicara la cuarentena en Argentina para poder observar los primeros efectos de la medida aplicada. Los datos fueron tomados de: https://www.argentina.gob.ar/coronavirus/informe-diario y de https://coronavirus.jhu.edu/map.html. Obtuvieron luego de realizar el ajuste de los datos por el Método de Mínimos Cuadrados lo observado en la Figura 3.

Responden que, según la investigación realizada, para ese período, Argentina tenía mayor tiempo de duplicación que Brasil. Lo que apoya las medidas de aislamiento social que tomo el gobierno argentino, ya que a pesar de que tomamos los datos entre una y dos semanas después de que se decretara la cuarentena, ya se empezaba a estirar el tiempo de duplicación de los casos, lo que significa una desaceleración del crecimiento exponencial. En cambio, el gobierno de Brasil decidió no tomar medidas de aislamiento social y darle prioridad a la economía. Pero ante un fallo del Supremo Tribunal Federal que permite a los estados y municipios tener la autonomía para tomar medidas para contener la propagación del coronavirus, algunos estados aplicaron cuarentenas. Sao Paulo que es el epicentro del coronavirus en Brasil comenzó una cuarentena decretada por su gobernador a partir del 24 de marzo. Esta cuarentena en comparación con la de Argentina fue menos rígida ya que no afectó el funcionamiento de las

industrias y se permitieron más servicios. También hay que tener en cuenta que el primer caso de COVID en Brasil fue el 26 de febrero y en Argentina el 3 de marzo.

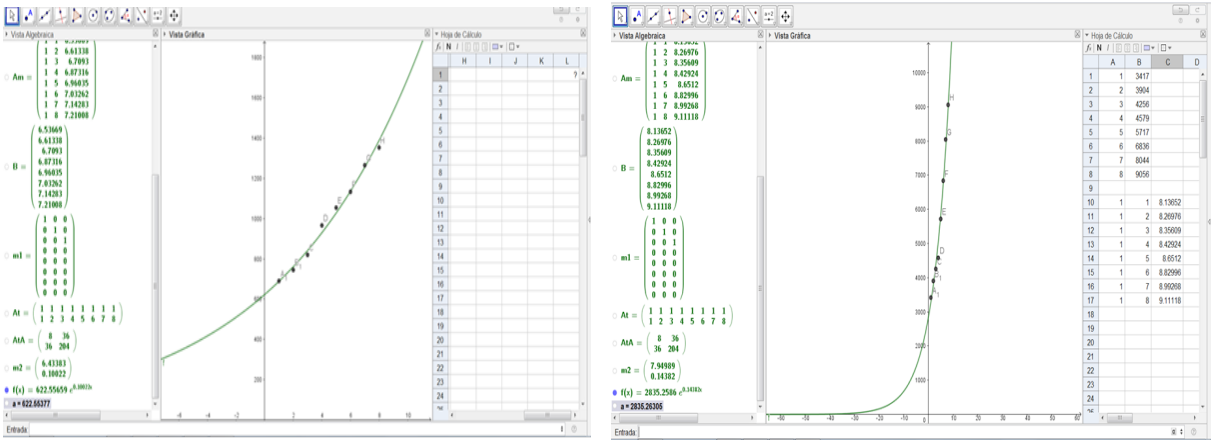


Fig. 3. Ajuste exponencial de la cantidad de infectados por COVID-19. Argentina (Izquierda) y Brasil (derecha). Para Argentina el tiempo de duplicación es de aproximadamente 7 días y para Brasil es de 5 días.

6 Conclusiones

En este trabajo se presentaron tres *actividades de investigación* implementadas en curso de Algebra Lineal en carreras de ingeniería, tanto en presencialidad como en virtualidad, a cargo del docente/investigador. Las mismas, posibilitaron acercar a los estudiantes a la tarea investigativa a partir de buscar respuestas a los problemas presentados. Realizaron tareas, tales como: trabajar en grupo, involucrarse con una situación real, experimentar un laboratorio (para las actividades 1 y 2), registrar datos, seleccionar modelos funcionales (no lineales) que los ajustaran, usar tecnología y construir objetos matemáticos relativos al algebra lineal, en especial el Método de Mínimos Cuadrados.

Estas tareas no se hubiesen realizado si el proceso de enseñanza hubiese sido el "tradicional" en la institución de contexto, ya que, si bien la asignatura dispone de clases del tipo teórico-prácticas con bibliografía y material educativo [10], que sigue las recomendaciones dadas por [2], para una mejor comprensión de los contenidos, estos aún no promueven realizar varias de las tareas mencionadas.

Por otro lado, el uso software GeoGebra les permitió a los estudiantes realizar tareas de cálculo algebraico y matricial, de un modo sencillo mediante las diferentes Vistas (Algebraica, Gráfica, Hoja de Cálculo). Además, al finalizar las actividades, los grupos, verificaron que los parámetros encontrados para los modelos funcionales propuestos para los ajustes y encontrados luego de los cálculos realizados matricialmente mediante la aplicación del Método de Mínimos Cuadrados, son los mismos que arroja GeoGebra por el comando AjusteExponencial en unos casos y AjustePotencial en el otro. Esto le otorga un significado a esas herramientas de GeoGebra, que de otro modo son como "cajas negras" en el sentido que dan respuesta a una entrada, sin conocer su funcionamiento interno.

Lo presentado, colaboraría en avanzar a dar respuesta a la problemática docente de la "enseñanza tradicional universitaria" ligada a la pérdida de sentido y a la desarticulación de los contenidos matemáticos escolares. Finalmente mencionar que a futuro se pretende ahondar en varios aspectos, aquí no mencionados, que contribuyan con la comunidad de investigación en didáctica de las matemáticas, como es identificar las condiciones que facilitaron el desarrollo de las actividades de investigación y cómo éstas provocan la realización de tareas auténticas de modelización matemática, entre otras.

Referencias

1. Dorier, J.; Robert, A.; Robinet, J.; Rogalski, M.: The Obstacle of Formalism in Linear Álgebra. En J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Álgebra,* pp. 85-124 (2000).
2. Dorier, J. Sierpinska, A.: Research into the teaching and Learning of Linear Algebra. *The teaching and learning of mathematics at university level*: An ICMI study, pp. 255-273. (2001).
3. Oktaç, A.; Gaisman, M. T.: ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Vol. 13, Nro. 4, pp. 373-385, (2010).
4. Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.: The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, Vol. 24, Nro. 1, pp. 41-46 (1993).
5. Carrillo, M. V. La investigación en los procesos de enseñanza aprendizaje. Universidad autónoma del estado de Hidalgo. *Profesor de la Escuela Preparatoria, 4*. Vol. 9, Nro. 18, pp. 9-12 (2015).
6. Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J.: Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. *En Investigación en educación matemática XIV*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, pp. 235-244 (2010).
7. Chevallard, Y.: Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. REDIMAT–*Jounal of Research in Mathematics Education*, Vol. 2, Nro. 2, pp. 161–182 (2013).
8. Vain, P. D. : El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de educación*, Vol. 4, Nro. 4, pp. 37-45 (2012).
9. Costa, V. A.; Rossignoli, R.: Enseñanza del algebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, Vol. 12 (2017).
10. Costa, V.; Rossignoli, R.; Sorichetti, C.; Vampa, V.: *Algebra Lineal con Aplicaciones Parte I*. Universidad Nacional de La Plata, La Plata: EDULP (2018).
11. Lay, D. C.: *Álgebra lineal*. México: Prentice Hall. (2001).
12. Lerena, G.; Cirimelo, S.: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina* - "Libro Rojo de CONFEDI". (2018).
13. Costa, V. A.; Rizzo, K. A.; Gallego Sagastume, J. I.: Educación STEM: integrar conceptos de fotometría a la clase de matemática usando tecnología. *Revista Enseñanza de la Física*, Vol. 31 (2019).
14. Costa, V. A.: Uso de dispositivos móviles y de software matemático en la enseñanza por investigación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias REEC*, Vol. 17, Nro. 3, pp. 625-640 (2018).
15. *Vieyra Software*. Physics Toolbox Sensor Suite. [Aplicación móvil]. Google Play. https://play.google.com/store/apps/details?id=com.chrystianvieyra.physicstoolboxsuite&hl=es_419&gl=US (2018). (17 de mayo de 2020).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Enseñanza híbrida post-pandemia: amalgamar la virtualidad y la presencialidad

Araceli E. Hernandez[1], Federico D. Kovac[1]
[1] Departamento de Cs. Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa
Calle 7 (O) Nro. 479, General Pico, La Pampa
hernandezara@ing.unlpam.edu.ar; kovacf@ing.unlpam.edu.ar

Resumen. El contexto generado por la pandemia COVID-19 ha puesto de manifiesto debilidades, fortalezas, y oportunidades en la enseñanza a nivel universitario, en particular en asignaturas de matemática en carreras de Ingeniería. Después de transitar casi dos años en modalidad virtual, ha quedado claro que pocos piensan que se debe (o se puede) volver a las prácticas pre-pandemia. Pero entonces surge la pregunta: ¿ahora qué hacemos? En este trabajo se presenta un breve análisis de esta situación, y una propuesta de enseñanza "híbrida" (combinación de actividades presenciales con técnicas y recursos de clases virtuales) como pasaje de la virtualidad a la "nueva normalidad", puesta en práctica en la FI de la UNLPam.

Palabras Clave: Enseñanza híbrida. Análisis Matemático. Estrategias de enseñanza. Competencias. Enseñanza mediada por TIC

1 Introducción

La llegada de la pandemia COVID-19 en marzo de 2020 a Argentina encontró una sociedad, y en particular un sistema universitario no preparado para enfrentar el desafío. Instituciones y docentes debieron (¡debimos!) adaptar su propuesta de enseñanza en tiempo récord, sin detener la marcha, y sin un horizonte de previsibilidad, por cuanto las condiciones cambiaban permanentemente. Sin embargo, la respuesta (en la mayoría de los casos) fue notablemente buena. Las instituciones y los docentes adaptaron rápidamente la propuesta de enseñanza en función de las limitaciones impuestas, tanto por la legislación vigente (decretos presidenciales que restringían la circulación y las actividades educativas) como las tecnológicas (deficiencias de conectividad y equipamiento) [1].

Una de las cuestiones que puso en relevancia este proceso de adaptación es la ineficiente y sub-utilización que se hacía de las tecnologías disponibles, ya que la mayoría de las herramientas y soluciones informáticas utilizadas para adaptar los procesos de enseñanza a las condiciones de restricción de circulación impuestas, existían mucho antes del advenimiento de la pandemia.

Finalizado el proceso de aislamiento estricto y de cara a retomar la presencialidad, se puso en marcha un nuevo eje de discusión, respecto de cómo sería encarado por los docentes (y las instituciones) tal retorno. Independientemente de las opciones consideradas, predominaba un denominador común: el retorno no sería simplemente volver a las prácticas pre-pandemia. Tanto docentes como estudiantes dejaron plasmado de manera mayoritaria en diferentes sondeos que no se consideraba como una opción la mera vuelta a las aulas, a los entornos tradicionales. En reunión plenaria de rectores/as, el CIN (Consejo Interuniversitario Nacional) declara "*Las universidades no vamos (a) volver a funcionar de la misma manera que antes*" [2]. Toda la experiencia recabada, el aprendizaje obtenido, y los recursos generados en la virtualidad debían jugar un rol en esta "nueva normalidad".

En este trabajo se analiza una primera aproximación en esta dirección, sobre una propuesta implementada (de

manera parcial) en un curso de Análisis Matemático de diferentes carreras de ingeniería de la UNLPam (Universidad Nacional de La Pampa). Se parte de la premisa de que las carreras de ingeniería, acreditadas por CONEAU (Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria) bajo el formato de clases presenciales, deben mantener dicho formato. Por tanto, la acepción de hibridación adoptada es aquella que propende a reducir la cantidad de horas presenciales, y aprovechar las mismas en actividades en las que el contacto humano y los medios físicos sean relevante (consultas grupales, laboratorios), relegando otras que no requieran necesariamente de la presencialidad para que, mediadas por TIC's, (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) sean realizadas de manera autónoma y asincrónica por los estudiantes.

2 Enseñanza híbrida de la matemática

En esta sección analizamos cuestiones generales sobre la enseñanza híbrida, siempre pensando en un modelo aplicado a asignaturas de matemática en carreras de ingeniería (aunque muchas de estas cuestiones resulten comunes a diversas áreas del conocimiento). No se pretende ser exhaustivo ni dar una enumeración técnica de recursos, sino presentar los conceptos necesarios para contextualizar sucintamente la propuesta. Mucho de lo expuesto proviene o fue motivado por del trabajo monográfico [3] (2018, pre-pandemia), y del más reciente artículo de Lorenzo García Aretio [4] (2021, pos-pandemia). Para una referencia que considere las cuestiones institucionales, se puede recurrir a [5].

2.1 La unión de dos mundos

Existen diferentes acepciones para el concepto de enseñanza híbrida, desde las más básicas que proponen la interacción por algún sistema de videoconferencias de un grupo de estudiantes (remotos) asociado a una actividad presencial, hasta los más sofisticados que requieren una cuidadosa interacción entre actividades presenciales y virtuales, que son realizadas de igual manera por todos los estudiantes. Este concepto no es nuevo en el nivel universitario, y tiene su origen en la evolución/variante del *blended learning*, sistemas que combinan la educación presencial con la educación a distancia.

En esta propuesta, entendemos como *hibridizar* a tomar lo mejor de los dos modelos (virtual/presencial) para integrar un curso presencial donde se saca provecho de las fortalezas de cada método. Esto requiere no utilizar los encuentros presenciales para actividades anacrónicas que han sido totalmente superadas por variantes tecnológicas, ni asignar actividades virtuales a aquellas que, por su naturaleza, resultan efectivas de manera presencial, pero son irrealizables o notoriamente artificiales en un entorno virtual. Por ejemplo, no debería utilizarse el tiempo presencial para una clase "clásica", que consiste en poco más que transcribir un apunte en el pizarrón para que, a su vez, los estudiantes lo copien, ni forzar una actividad grupal o laboratorio a un entorno virtual.

Para lograr este cometido, se requiere mucho más que distribuir las diferentes tareas entre una modalidad y otra. Es necesario repensar el diseño curricular y pensar en metodologías de enseñanza/aprendizaje que lleven a docentes y estudiantes a involucrarse con ambas modalidades y sacar el mejor provecho de ellas. No se trata de hacer lo mismo que uno hacía antes, pero ahora hacerlo usando tecnología, sino crear contenido y métodos adecuados para potenciar las posibilidades que da la tecnología. Las diferentes tecnologías deberían utilizarse para optimizar los procesos de aprendizaje, y no como un medio para transmitir contenido. Si se va a reducir la carga horaria presencial, es fundamental que esta se use eficientemente, entre otras, para desarrollar las competencias sociales de los estudiantes.

Como propuesta inicial, se plantea un diseño de cursada donde los estudiantes dispongan de suficiente material (digital/audiovisual) convenientemente preparado y organizado, de forma tal de prescindir de largas exposiciones magistrales, y reemplazar estas por encuentros presenciales donde su desarrollo y contenido esté direccionado por las necesidades inmediatas de los estudiantes. La adquisición de muchos contenidos puede encomendarse a los propios estudiantes, mediante la utilización de videos o asignaciones de tareas, es decir, de manera asincrónica y mediada por la tecnología. Esta metodología permite desembarazarse de clases largas, tediosas, monotemáticas y sobre todo lineales, porque se puede incluir diferentes temas y en cualquier orden: uno puede dar un pantallazo o una idea, o concentrarse en una cuenta o detalle según la demanda. Además, el docente dispone de un público convenientemente informado, con conocimientos previos, y con demandas específicas. Es como convertir la teoría en algo más parecido a lo que usualmente es una clase práctica o de consulta. Algo similar a lo que está pasando

con la televisión hoy: las nuevas generaciones no ven la televisión convencional, sino que utilizan sitios para elegir contenido "on demand": estamos en la generación del estudiante *Netflix*[1].

La formulación de una propuesta de este tipo debe ser extremadamente consistente, articulando con precisión las actividades virtuales o autónomas con las grupales o presenciales. Por ejemplo, debe estar elaborada de forma tal que la respuesta a un obstáculo sea mirar un video propio de la cátedra y no buscar uno en Internet. La inclusión de tareas asincrónicas le da la posibilidad de administrar mejor los horarios y el ritmo, e incentivan el desarrollo de competencias clave como el autoaprendizaje. Además, les da tiempo a los estudiantes a reflexionar sobre los contenidos, y así presentarse a las clases con una actitud activa. Por otro lado, se considera que las actividades de aula son indispensables en un curso de matemática. La enseñanza de la matemática es un proceso dinámico donde la creatividad y capacidad de adaptación instantánea del docente es esencial. En la clase presencial el docente puede hacer un ajuste fino del avance en sus explicaciones, en función de cómo percibe que sus estudiantes comprenden sus explicaciones (tanto por sus preguntas como por actitudes físicas como posturas o expresiones faciales). Como consideración adicional a tener en cuenta, la enseñanza híbrida (y más aún la virtual) de la matemática conlleva una dificultad particular, ya que el teclado no incluye símbolos matemáticos específicos. Los entornos digitales como Moodle[2] tienen una muy limitada capacidad para incluir contenidos de matemática, y si bien en cierta medida permiten la utilización de comandos LaTeX[3], su inclusión es altamente dificultosa y tediosa (algunos campos ni siquiera permiten comandos LaTeX). La digitalización es prácticamente unidireccional (del docente al estudiante).

Una cuestión a considerar a la hora de elaborar la propuesta, es tener claros los objetivos que se persiguen. En particular, se puede tomar la oportunidad para orientar el curso, más allá de su contenido específico, al desarrollo de otras competencias y capacidades. Al respecto, CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería) establece en su "libro rojo" [6] las competencias genéricas de egreso de carreras de Ingeniería. Entre las *Competencias sociales, políticas y actitudinales* se incluyen las siguientes:

- Aprender en forma continua y autónoma.
- Actuar con espíritu emprendedor.

Un diseño de curso orientado al autoaprendizaje, donde la participación activa de los estudiantes sea parte del diseño, claramente redundaría en aportes a estas competencias. Esto puede propiciarse encomendando a los estudiantes la responsabilidad de realizar una cantidad sustantiva de actividades asincrónicas no presenciales, muchas de las cuales pueden estar mediadas por TIC's para facilitar su ejecución. Esta visión implica un cambio (¿cambio?) de paradigma: los estudiantes son sujetos que *van al curso a aprender*, son la parte activa, no son un público pasivo al que el docente les va a enseñar. Más allá de que se propicie el autoaprendizaje, es importante ayudar a los estudiantes con la motivación, y en esto el rol del docente y la forma en encarar los diferentes temas es fundamental (independientemente de la modalidad en que se dicta el curso). Como se cita en K. Bain [7] sobre la actitud de un docente enseñando Cálculo: "*Cuando termino este proceso quiero que los estudiantes se sientan como si hubieran inventado el cálculo y que solo un accidente de nacimiento sea lo que les impidió ganar a Newton por la mano*". Como una referencia tal vez no tan conocida, indicamos a S. Krantz [8], como fuente de ideas para encarar este proceso de motivación (y de la enseñanza de la matemática en general).

Por último, queremos destacar una cuestión que resulta esencial al planificar este tipo de diseño, que es el acceso y disponibilidad de los estudiantes de los recursos necesarios. Se debería asegurar institucionalmente (por la Facultad, la Universidad, u otro medio) que los estudiantes dispongan de un lugar razonablemente cómodo y equipado para encarar las actividades asincrónicas incluidas en el curso, sobre todo si estas van a representar una cantidad sustantiva del mismo. Misma precaución debe tomarse si el planteo incluye actividades presenciales que requieran el uso de tecnologías (por ejemplo, teléfono celular con determinadas características).

2.2 El material digital y su presentación

Si debemos tomar lo mejor de los dos mundos, uno de los pilares para el éxito de una propuesta híbrida será el material digital a preparar (textos, videos, aplicaciones, etc.), y el entorno y la forma en que este se presenta (en general, Campus).

Respecto de la documentación digital, es primordial que esté apropiadamente escalonada. Un *libro* contiene (en general) muchísimo más material del que se puede abarcar en un curso, incluso libros específicos. Probablemente, eso es una necesidad, para ser publicados: los autores intentan abarcar con el libro un rango extremadamente amplio, y tal vez esto sea necesario porque se supone que en el libro uno va a encontrar todas las respuestas a las dudas que puedan surgir. El problema es que de esa forma se enfrenta al estudiante a respuestas ¡sobre dudas que todavía

1 Plataforma de streaming. Para más información acceder a https://www.netflix.com/ar-en/

2 Moodle es un sistema de administración de cursos (LMS). Para más información acceder a https://moodle.org/?lang=es

3 LaTeX es un procesador de textos. Para mayor información acceder a https://www.latex-project.org/

no surgieron! (y eso es inútil y pernicioso). Detalles técnicos, o ideas secundarias, o hasta ideas principales, pero cuya principalidad se comprende recién después de trabajar cierto tiempo un contenido.

Un *apunte de cátedra* es más acotado en temas y en detalles, y ajustado a la materia. Pero de no mediar clases teóricas donde se exponga el contenido, podría resultar inadecuado para una primera lectura, o para enfrentarse por primera vez a un tema. Si se pretende generar cierta autonomía en el aprendizaje, es necesario contar con un escalón inferior, con material más accesible. Una alternativa es confeccionar *filminas resumen o fichas* (documentos tipo Powerpoint de Microsoft® o Beamer[4]), que a su vez pueden ser utilizadas como base para hacer videos con explicaciones. Combinados de esta manera, parecen un material más adecuado para un primer contacto con la materia, quedando el material escalonad en filminas/apuntes de cátedra/libro, para cada uno de los estadios del aprendizaje. Si se utilizan guías de trabajos prácticos, estas deberían estar perfectamente concatenadas con el resto de los documentos, y diseñadas a fines de cumplimentar el objetivo para las cuales fueron puestas: si el objetivo del curso no es la resolución mecánica de problemas, las guías de trabajos prácticos no deberían tener solo este tipo de problema.

Un párrafo aparte merecen los videos con explicaciones (ojo, no con recetas), cuya presencia en este tipo de propuesta se cree es central. En primer lugar, se debe distinguir entre videos explicativos y clases grabadas: estas últimas son de escasa utilidad para el público general, ya que por su duración y dinámica no se adecuan para un entorno de autoaprendizaje. Su utilidad, más bien, queda acotada a aquellos estudiantes que han presenciado la clase y necesitar rever algún punto en particular, que sabrán encontrar, pues conocen previamente el contenido completo. Un video explicativo debería tener una duración no más de 20 minutos, atacar alguna cuestión concreta (evidenciada en su nombre), y estar estructurado pensando en que la audiencia (a diferencia de una clase) no tiene oportunidad de interrumpir y preguntar. Creemos además que es fundamental que se encuentre perfectamente concatenado con todos los otros elementos que componen a la asignatura, para que *sea la mejor opción* para los estudiantes a la hora de buscar información sobre un tema concreto, y así evitar que estos busquen cualquier tipo de material audiovisual en Internet. El video debe hablar el lenguaje que se habla en la asignatura. Por las mismas razones expuestas, la calidad de los mismos no es una cuestión menor: el audio debe ser claro y libre de ruidos, la imagen nítida y que permita visualizar todo lo puesto a tal fin, y se deben post-editar para asegurar una buena dinámica (por ejemplo, cortando pausas largas), y para incluir recursos de multimedia como señales, imágenes, o animaciones. Si bien puede parecer una cuestión menor, resulta recomendable que se vea la imagen del docente: en explicaciones en pizarra convencional esto resulta automático, pero cuando se utilizan recursos digitales como capturadores de pantalla, se debería superponer una grabación hecha, por ejemplo, con una cámara web.

Una de las ventajas más predominantes del mundo digital, es la posibilidad de utilizar aplicaciones o herramientas de software que permitan visualizar y/o simular diferentes situaciones. Estas pueden ser programadas en diferentes entornos para cuestiones específicas, o se puede recurrir a librerías previamente diseñadas. La lista de recursos es enorme:

- Geogebra (https://www.geogebra.org/)
- Scilab (https://www.scilab.org/)
- Desmos (https://www.desmos.com/?lang=es)
- Wolframalpha (https://www.wolframalpha.com/)
- Symbolab (https://es.symbolab.com/)

Intentar hacer una enumeración incluso de los recursos más visitados requeriría varios trabajos dedicados a ello. En https://iwant2study.org/ospsg/index.php/interactive-resources/mathematics se encuentra un listado con muchas de ellas, y en https://www.amstat.org/education/useful-websites-for-teachers se pueden encontrar aplicaciones específicas para estadística. Existen características deseables que podemos priorizar a la hora de elegir las aplicaciones a utilizar: que sean robustas, gratuitas, que no requieran gran cantidad de recursos informáticos, y si permiten que los estudiantes puedan modificarlas o hacer las propias, mejor. También se debe considerar la posibilidad de integrarlas al Campus o al entorno que se utilice para presentar el material, y si son multiplataforma, ya que muchos estudiantes acceden a los recursos digitales por medio del celular. Hoy existe una cantidad inmensa de material disponible, con lo cual el trabajo se puede limitar a seleccionar el más adecuado para cada curso.

Si se apunta a diseñar un curso que aliente las prácticas de autoaprendizaje, es importante incluir instancias de autoevaluación que permitan a los estudiantes medir (con la misma dimensión que serán evaluados) sus avances. Para un curso de matemática esto es particularmente difícil porque la evaluación suele centrarse en las construcciones lógicas de los estudiantes, y en esto entra en juego la experiencia y el "*ojo docente*" (el equivalente pedagógico al "*ojo clínico*" en medicina) del profesor a cargo. Sin embargo, es posible generar problemas no triviales de respuesta única (o sea, pasibles de ser usados para una autoevaluación) que inviten a los estudiantes a pensar, y

4 Beamer es un tipo de documento LaTeX utilizado para confeccionar presentaciones.

les permita medir en cierta medida su grado de comprensión.

Finalmente, el entorno en que se presenta el material digital a los estudiantes (en general, el Campus de la Facultad) debe ser sencillo, claro, fácil de navegar, y con un diseño que tiente e invite a los estudiantes a visitarlo. El estudiante debe sentir que ese (y no *Google*) es el lugar donde debe buscar los recursos que necesita para avanzar exitosamente en la cursada. Se debe tener presente, además, que no todos los estudiantes disponen de las mismas herramientas tecnológicas ni condiciones de conectividad, por lo tanto, ninguno de los recursos debería plantearse como un desafío para la última generación de hardware disponible.

3 Experiencia piloto

A continuación se presenta una experiencia piloto puesta en práctica en la cátedra "Análisis Matemático I-b" de la Facultad de Ingeniería de la UNLPam. Si bien se presenta la experiencia como total, fue implementada solo de manera parcial durante el ciclo 2021, ya que el semestre se comenzó de manera virtual, y a mediados del mismo se habilitaron de manera paulatina actividades presenciales.

La Facultad cuenta con 6 carreras de ingeniería (todas acreditadas por CONEAU), que comparten un tronco común de aproximadamente 3 años. El perfil de las carreras se corresponde con una fuerte formación básica, donde la matemática en particular tiene una carga horaria importante (aproximadamente el 20% de la carga total de la carrera). En cuanto a la asignatura "Análisis Matemático I-b", se dicta en el segundo semestre, y su contenido es esencialmente cálculo integral de una variable, y es común a todas las carreras de la facultad. Tiene una carga horaria de 90 hs y la inscripción promedio es de 100 estudiantes. La planta docente está formada por un Profesor y dos Jefes de Trabajos Prácticos.

En cuanto al equipamiento, el aula utilizada tiene cañón para proyecciones y pantalla (todos fijos), y equipo de videoconferencia que permite actividades sincrónicas duales (presencial/virtual). Además, la Facultad cuenta con una sala de lectura silenciosa y conectividad para que los estudiantes que no dispongan de esas comodidades en su lugar de residencia puedan realizar las actividades asincrónicas.

3.1 Diseño del material didáctico

El material utilizado puede enumerarse básicamente en: *Notas de Cátedra, Filminas Resumen, Guías de Trabajos Prácticos, Videos Explicativos, Aplicaciones, Prácticas Guiadas, y Guías de Autoevaluación*. Estos se confeccionan para cada unidad temática.

- Las *Notas de Cátedra* son un elemento clave, donde el estudiante sabe que va a encontrar la totalidad de los temas a abordar en la asignatura, con el correspondiente grado de profundidad. Es la meta final, y por tanto, contiene (en general) más detalles y consideraciones que las apropiadas para una primera lectura de cada tema. Para cursos híbridos apuntados al autoaprendizaje, es conveniente una instancia previa a la lectura de estas notas.
- Las *Guías de Trabajos Prácticos* contienen ejercicios que abarcan todos los temas, y que pueden ser resueltos a partir del contenido de las *Notas de Cátedra* (el estudiante no necesita recurrir a explicaciones externas). Su contenido está perfectamente concatenado con las *Notas de Cátedra*, y los ejercicios propuestos parten desde los rutinarios (para aprendizaje de notaciones y conceptos básicos), hasta los más profundos, que requieren mayor elaboración, y que es a lo que apunta la formación de la asignatura.
- Las *Filminas Resumen* constituyen el "esqueleto" del material teórico, y van de la mano de los *Videos Explicativos*, porque estos están confeccionados utilizándolas como base y añadiendo explicaciones escritas sobre ellos a mano alzada con una tableta digitalizadora.
- En los *Videos Explicativos* se encuentran las explicaciones teóricas detalladas de los temas centrales y más complejos de la asignatura. Esencialmente teóricos, con una duración de unos 20 minutos, y evitando que sean meras recetas.
- Los *Aplicaciones* son en general archivos Geogebra o documentos Desmos diseñados para visualizar y/o simular cuestiones particulares de cada tema. Se utilizan en los videos explicativos, en algunos ejercicios de las guías prácticas, y en actividades grupales en el aula. Permiten a los estudiantes explorar visualmente los fenómenos más significativos.

- Las *Prácticas Guiadas* consisten en material de avance secuencial (paso a paso) sobre diferentes ejercicios del práctico.
- Las *Autoevaluaciones* están realizadas como "evaluaciones" en el entorno Moodle. Tal como su nombre lo indica, pretenden que cada estudiante pueda tener cierta certeza del grado de entendimiento de cada tema. No están diseñadas para evaluar la comprensión final de un tema, sino para fijar un piso por debajo del cual se cree no existe comprensión adecuada del tema.

Uno de los principales limitantes a la hora de encarar este tipo de curso es la posibilidad de escritura de fórmulas matemáticas. Los documentos digitales (*Notas de Cátedra, Filminas Resumen, Guías de Trabajos Prácticos*) en formato PDF fueron escritos utilizando LaTeX. En particular, las *Filminas Resumen* son documentos *Beamer* que, dada la rigidez del formato, exigen al momento de su elaboración una cuidadosa selección y secuenciación de contenidos. Por otro lado, las *Prácticas Guiadas* fueron confeccionadas mediante plantillas *Genially*[5] (o en pocos casos como documentos en formato PDF) porque ofrecen la posibilidad de crear un documento "navegable", donde el estudiante elige que quiere ver y avanza a medida que comprende lo visto.

Para la confección del material audiovisual se utilizó un micrófono condensador *Blue Snowball* y una tableta digitalizadora *XP-Pen Deco 01* (la calidad del material no es una cuestión menor). Los mismos fueron realizados mediante captura de pantalla con cámara abierta, utilizando como base las *Filminas Resumen* incorporadas en la pizarra digital *Openboard*[6] (Figura 1), entorno donde se brindaban las explicaciones de manera oral, las cuales eran simultáneamente escritas con el lápiz digital. En ocasiones se incorporaron las *Aplicaciones* en los videos, así como material extra (efectos, transiciones, notas) en un proceso de pos-edición. Se confeccionaron unos 60 videos con una duración promedio de 20 minutos.

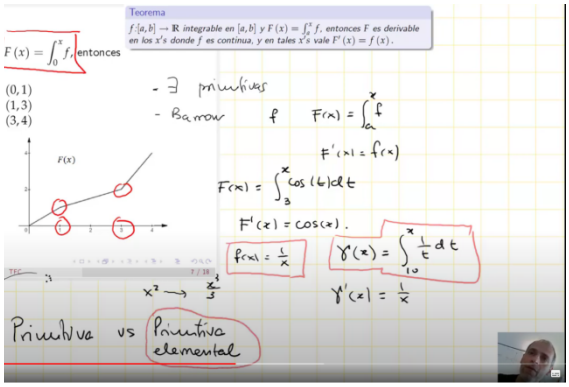


Fig. 1. Explicación sobre filmina

La confección de las *Autoevaluaciones* fue sin duda un de los escollos más importantes. Dada las limitaciones de un esquema de preguntas que se "autoevalúa", se deben crear problemas que inviten a pensar, ¡cuya respuesta debe ser escrita por el docente! A esto se debe sumar la complicación que implica que muchos de los campos de preguntas de Moodle no admiten la inclusión de comandos LaTeX o fórmulas matemáticas. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se confeccionaron guías de autoevaluación para cada tema, cuyo objetivo central fue fijar un piso de entendimiento, debajo del cual era recomendable volver a ver los contenidos de la unidad. La inclusión de estas guías fue extremadamente demandante.

3.2 Diseño del campus

Por cuestiones institucionales, la plataforma utilizada para la interacción con los estudiantes fue Moodle, donde todas las asignaturas de las diferentes carreras tienen un aula virtual. *Simpleza, claridad, pragmatismo* fueron los ejes de confección del aula virtual, priorizando la facilidad para encontrar los recursos y la navegabilidad de la misma Se tomó en general el siguiente concepto: "*En la cultura digital, menos es más"* [5]. Esta plataforma es uno de los puntos centrales de la propuesta, porque se convierte en la base para que el estudiante pueda administrar su proceso de autoaprendizaje, proveyendo un entorno controlado para ello, donde sabe que encontrará todos

5 Herramienta en línea para la creación de contenido interactivo. Para mayor información acceder a https://genial.ly/es/

6 Pizarra interactiva de código libre y abierto. Para mayor información acceder a https://openboard.ch/

los recursos necesarios, y adecuadamente ordenados. Es decir, provee un escenario de aprendizaje programado, diseñado para un primer entrenamiento, pero distante de los desafíos de aprendizaje autónomos de la vida real.

Se utilizó un formato en pestañas (Figura 2) donde puedas diferenciarse claramente dos partes: por un lado, todo lo referente a novedades, cuestiones institucionales, fechas importantes, etc., (panel "*General*") y por otro, todo lo referente al dictado de la materia (clases, videos, actividades, material, evaluaciones, etc.), estas últimas divididas por temas (pestaña anidada "*Bloques temáticos*"). Otras pestañas incluyen información anexa o formal: "*FAQ*" de preguntas frecuentes, "*Seguridad e Higiene*" por cuestiones formales de la Facultad, y "*Otros documentos*" para información anexa o links de interés.

En el panel general se encuentra:

- Encabezado con la descripción de la materia.
- Panel Genially con información breve importante (fechas, criterios de evaluación, etc.).
- Presentación (con fotografía) del equipo de trabajo.
- Forma de trabajo: descripción detallada de cómo va a funcionar la asignatura (material, tiempos, horarios, consultas, criterios de evaluación, requisitos, etc.).
- Descripción del contenido y enfoque de la asignatura (vía presentación Prezi[7]).
- Formas de comunicarnos: link de acceso al Foro, a una pizarra Conceptboard[8] , link para unirse al grupo de Whasapp[9] de la materia, y sala de Zoom[10] para eventualidades).
- Eventualmente, información sobre evaluaciones parciales.

Fig. 2. Detalle de las pestañas del campus.

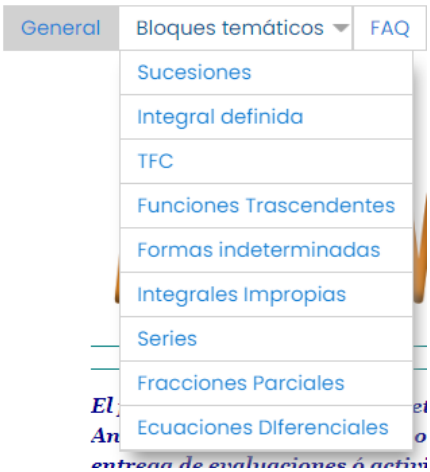


Fig. 3. Detalle de pestañas añadidas.

Una pestaña anidada (Figura 3) contiene cada uno de los bloques temáticos de la asignatura (9 en total). Todos estos bloques *replican el mismo formato* (para facilitar la navegación y comprensión), e incluyen las siguientes 5 secciones, que contienen el material descripto en la sección anterior:

- **Teoría y práctica**. Notas de Cátedra, Guía de Trabajos Prácticos, Filminas Resumen (todo en formato PDF).
- **Aplicaciones**. Geogebra/Desmos.

7 Herramienta en línea para la creación de presentaciones. Para mayor información acceder a https://prezi.com/

8 Pizarra virtual. Para mayor información acceder a https://conceptboard.com/

9 Sistema de mensajería. Para más información acceder a https://www.whatsapp.com/

10 Sistema de videoconferencias. Para mayor información acceder a https://zoom.us/

- **Videos Explicativos**. Se accede mediante link al canal Youtube[11] de la asignatura.
- **Prácticas guiadas.** Genially/PDF interactivo.
- **Autoevaluación**. Se habilita al terminar cada tema.

Estas pestañas anidadas se ponen a disposición de los estudiantes a medida que se avanza en los diferentes temas.

La asignatura cuenta con un Foro para comunicados (permiten institucionalizar comunicados importantes sobre fechas, por ejemplo), un grupo de *Whatsapp*, y una pizarra digital *Conceptboard*. La experiencia muestra que el grupo de *Whatsapp* resulta el canal de comunicación más efectivo con los estudiantes. En él, se pueden plantear dudas desde formales hasta puntuales de problemas. La pizarra virtual *Conceptboard* brinda la posibilidad de hacer preguntas de manera anónima y permite la respuesta colaborativa y "a la vista" (no hay que buscar en un foro/grupo donde quedó tal cosa, se puede poner una pizarra por tema), y que perdura en el tiempo. Una especie de borrador/machete colectivo. También se cuenta con una sala Zoom para eventualidades (necesidad de responder alguna consulta o hacer una devolución cuando hay impedimentos para una reunión presencial).

3.3 Desarrollo de la asignatura

En el primer encuentro con los estudiantes se hace una presentación general de la asignatura:

- Presentación de la materia, sus temas y nivel de dificultad de cada uno de ellos.
- Forma de trabajo: descripción de cómo serán las clases, y que se presume su participación activa (ellos quieren aprender, los docentes ayudamos en el proceso).
- Presentación del campus y su organización.
- Uso de Conceptboard/Whatsapp/Foros.
- Presentación de los recursos didácticos y de la función de cada uno de ellos.
- Formas y criterios de evaluación.

Se explica a los estudiantes que un objetivo central de la asignatura es lograr las capacidades que les permitan *darse cuenta* de cómo utilizar el material teórico para resolver los problemas de las guías (además de entender la lógica matemática y comunicarse adecuadamente). El objetivo, por el contrario, no es solo *saber resolver un problema* (una vez encontrado el camino, la resolución suele ser más bien mecánica). Se pactan uno o dos encuentros presenciales por semana, con una duración de entre 2 y 3 horas, dependiendo de la demanda de los estudiantes.

A partir de este punto, se repite el siguiente esquema con cada tema:

- Presentar el tema; que queremos crear/resolver/modelar. Motivar a la audiencia.
- Dar un pantallazo general, una descripción de las ideas en juego, las herramientas (teóricas) a desarrollar, los resultados (teoremas).

Es una clase que permite prever a los estudiantes *con que* se van a encontrar al momento de ponerse a estudiar el tema.

Una vez presentado el tema, se invita a los estudiantes a seguir el siguiente esquema: ver los *Videos Explicativos* siguiendo las *Filminas Resumen*, y a partir de ello comenzar a pensar los ejercicios de las *Guías de Trabajos Prácticos* mientras se avanza en la lectura de las *Notas de Cátedra*. Para facilitar el avance, disponen de las *Prácticas Guiadas* (que se habilitan unos días después de comenzado el tema) y las *Aplicaciones*.

Las clases subsiguientes se organizan en función de la demanda de los estudiantes, a quienes se les pregunta "¿hoy que hacemos?". Se pueden revisar partes poco claras de la teoría (o de cualquier material de la asignatura), consultar dudas sobre algunos ejercicios (que a su vez se entrelazan con la teoría), visualizar alguna situación con las aplicaciones, o todas estas acciones interactuando. La clase toma una dinámica que nada tiene que ver con la "exposición magistral" (típica clase de pizarrón), donde los estudiantes van direccionando el desarrollo en función de su demanda. Incluso algunas dudas surgen de posibles errores en el material confeccionado. El ámbito, más distendido que en una clase estándar, permite la participación activa de muchos estudiantes. No hay distinción entre "clase teórica" y "clase práctica", y todo el equipo docente participa en función de la demanda de los estudiantes. Al cerrar el tema, se habilita (por cierto período de tiempo) la *Autoevaluación* correspondiente. El resultado de la misma es, además, un insumo frecuente para estas clases abiertas, cuando los estudiantes preguntan sobre posibles respuestas erróneas, y exponen las dificultades encontradas para resolverlas.

Una cuestión importante al implementar este esquema, es tener recursos preparados para trabajar, en caso de

11 Servicio de alojamiento de videos. Para más información acceder a https://youtube.com

no obtener respuesta al planteo "¿hoy que hacemos?" por parte de los estudiantes (o hasta que estos pierdan el temor de participar). Hacer una pregunta disparadora ("¿Cómo encararon el problema…?"), comenzar exponiendo un ejemplo llamativo y no obvio para visualizar con las aplicaciones, o trabajar sobre algún planteo que algún estudiante haya dejado en la Pizarra (*Conceptboard*) o en los grupos de charla (*Whatsapp*, Foro). Otro recurso utilizado fueron actividades de exploración visual con las aplicaciones, las cuales se implementaron de manera grupal. Por ejemplo, se dividió a los estudiantes en grupos y se les asignó a cada uno de ellos un *campo de pendientes* (aplicación propia de la unidad Ecuaciones Diferenciales) para que investiguen patrones en el mismo, para después discutir de manera global los resultados obtenidos por cada grupo. En ocasiones, se abandonó el esquema centralizado, y se respondieron consultas de manera individual.

3.4 Evaluación de la propuesta

Tal como se explicó en al comienzo de esta sección, la propuesta fue implementada solo de manera parcial. Al finalizar el cuatrimestre se realizó una encuesta (administrada y resguardada por Secretaría Académica de la Facultad), con fines de evaluar el desarrollo general de la asignatura, así como para tener una primera devolución sobre la modalidad híbrida implementada. El resultado fue notablemente bueno: la totalidad de los encuestados se manifestó como "satisfecho" (54%) o "muy satisfecho" (46%) con el dictado de la materia, y estuvo "de acuerdo" o "muy de acuerdo" con las siguientes afirmaciones:

- La forma de dictado de la materia me pareció adecuada.
- El aula del Campus Virtual estaba bien organizada, y era de acceso simple y fácil.
- Se puso a disposición material elaborado y suficiente (videos, filminas, aplicaciones).

Como dato principal, el 71% de los estudiantes declaró preferir el modelo híbrido en defecto del modelo presencial (25%) o el modelo a distancia (4%). En un ítem abierto, donde los estudiantes podían hacer aportes y observaciones, destacaban cuestiones referentes al dictado, al material y a la organización en general (por ejemplo, destacando "*la posibilidad de ver el material en casa y después tener clases rápidas sobre el tema y dedicar todo el tiempo a consultas*").

En cuanto al desempeño de los estudiantes, no se notaron cambios significativos con respecto al rendimiento histórico (50% de ellos aprueba la asignatura en alguna instancia de evaluación). Pero esta medición no incluye la autonomía ganada por los estudiantes en el proceso, ni cuestiones relativas al tiempo empleado o a la libertad de organización de horarios.

Está claro que esta evaluación carece de los rigores necesarios para ser concluyente, además de provenir de una muestra sesgada de estudiantes que tuvieron solo medio semestre de presencialidad. Pero la tendencia marcada indica que la propuesta tiene un grado importante de aceptación.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La pandemia acaecida –COVID19– ha sacudido el modelo de universidad que conocemos. Creemos que todavía no está claro el alcance de los cambios que la misma ha promovido al sistema educativo, pero es evidente que no hay retorno al modelo previo. Nos ha mostrado que se hacía una evidente subutilización de los recursos tecnológicos, así como también lo insustituible del contacto humano. En este trabajo se presenta un primer ensayo piloto sobre cómo avanzar hacia esa "nueva normalidad". Si bien algunos resultados parecen promisorios, se requerirá de varias cohortes para poder ser concluyente. Esto, sin dejar de mencionar que, por la forma en que su preparación ha sido afectada por la misma pandemia, las próximas cohortes tendrán un sesgo particular (estudiantes que pasaron los últimos años de la educación media con casi nula concurrencia a la escuela). El impacto de la propuesta en lo conductual (autonomía ganada por los estudiantes, por ejemplo) solo será posible evaluar en un futuro no inmediato.

Creemos además que resultará determinante la postura institucional al respecto de las prácticas de hibridación. Probablemente, el nivel de efectividad sea notoriamente superior si se lleva a cabo en forma general (para todas las asignaturas), o por conjuntos de asignaturas, más que como una propuesta aislada e individual. Con un enfo-

que institucional y asignaturas segmentadas de acuerdo a sus posibilidades de hibridación, se podrían coordinar esfuerzos para generar una propuesta más sólida y efectiva. La unicidad de criterios y discursos, además, facilitará su implementación con los estudiantes.

Una cuestión a tener en cuenta con la propuesta presentada (y con la mayoría de las acciones de virtualización/hibridación llevadas a cabo a partir del aislamiento impuesto por la pandemia COVID19), es que se trata de adaptaciones de un modelo de enseñanza que fue concebido para la presencialidad. Aunque esto no estuviera tácitamente expresado, ninguno de los diseños curriculares de las carreras de ingeniería contemplaba la realidad impuesta por la pandemia. Con un ejemplo grotesco, lo que hemos hecho es *adaptar un automóvil para que vuele*, lo cual dista sustancialmente de *diseñar un avión*. Será interesante ver si los nuevos diseños curriculares se construyen sobre la base de una enseñanza híbrida, lo cual requerirá un enorme cambio de paradigma. La acreditación de las carreras de ingeniería por competencias, a ocurrir en los próximos años, tal vez sea la oportunidad para comenzar este cambio.

Probablemente, debamos entrenarnos para reconocer cuáles son las actividades que más provecho real tienen en el contexto presencial, y cuáles es conveniente reservarlas para el entorno virtual. En cuanto a las actividades presenciales, donde el contacto humano toma relevancia, una opción que aparece en el horizonte es el referido a las *inteligencias emocionales* (IE), concepto introducido en los años 90 y que ha ganado gran difusión a través del trabajo de Daniel Goleman [9]. El desarrollo de las mismas se ha comenzado a implementar hace más de 20 años en diferentes lugares del mundo, y de forma más reciente en Argentina. Algunos estudios sugieren que su implementación impacta de manera netamente positiva en el rendimiento académico de los estudiantes [10] [11].

El trabajo a desarrollar a futuro es enorme.

Referencias

1. Bernal, M.; Falcón, P.: La Respuestas de las Universidades Nacionales Publicas Frente al Covid 19. *1991. Revista De Estudios Internacionales*, vol. 2, n.º 2, abril de 2021, https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revesint/article/view/32623.
2. CIN. Desafíos de las universidades públicas en la etapa de la pospandemia Acta 29/06/21 https://www.cin.edu.ar/download/desafios-de-las-universidades-publicas-en-la-etapa-de-la-pospandemia/
3. García-Ruiz, R.; Aguaded, I.; Bartolomé-Pina, A. (coords.): Monográfico. La revolución del blended learning. *RIED Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*. Vol. 21 Núm. 1 (2018). DOI: https://doi.org/10.5944/ried.21.1
4. García Aretio, L.: COVID - 19 y Educación a Distancia Digital: Preconfinamiento, Confinamiento y Posconfinamiento. *RIED - Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*. Vol. 24, Nº. 1, pp. 09–32 (2021). DOI: https://doi.org/10.5944/ried.24.1.28080
5. Pardo Kuklinski, H.; Cobo, C.: *Expandir la universidad más allá de la enseñanza remota de emergencia. Ideas hacia un modelo híbrido post-pandemia.* Outliers School. Barcelona (2020).
6. CONFEDI, Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina: 'Libro rojo del CONFEDI', mayo 2018. Disponible en: https://www.ing.unlp.edu.ar/sitio/institucional/difusion/archivos/LIBRO_ROJO_DE_CONFEDI_estandares_de_segunda_generacion.pdf
7. Bain, K.: *Lo que hacen los mejores profesores universitarios.* Trad. Óscar Barberá. Valencia: Universitat de Valencia (2007).
8. Krantz, S. G.: *How to Teach Mathematics, Third Edition.* AMS Non-Series Monographs Publication Volume 89 (2015). DOI: https://doi.org/10.1090/mbk/089
9. Goleman, D.: *La Inteligencia Emocional*. Ed. Vergara (2004).
10. Parker, J. D. A.; Creque, R. E.; Sr. Bamhart, D. L.; Harris, J. I.; Majeski, S. A.; Wood, L. M.; Bond, B. J.; Jogan, M. J.: Academic achievement in high school: Does emotional intelligence matter? *Personality and Individual Differences, 37*(7), pp. 1321-1330 (2004).
11. Encinas, J.; Chauca, M.: Emotional intelligence can make a difference in Engineering Students under the Competency-based Education Model. *Procedia Computer Science*, Volume 172 pp.960-964 (2020). DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.05.139.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Aplicación de distintos métodos numéricos para la resolución de un problema de ingeniería estructural

Juan M. Franco[1], Magali S. Londero[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Almafuerte 1033, Paraná (3100), Entre Ríos
jmfranco@frp.utn.edu.ar, magalilondero@frp.utn.edu.ar

Resumen. Cálculo Avanzado es la primera asignatura dentro del orden del Plan de Estudio de la Carrera de Ingeniería Civil de U.T.N., donde los estudiantes adquieren competencias para la aplicación de métodos numéricos en la resolución de problemas ingenieriles. De esta manera, los problemas que previamente se resolvían de forma analítica pasan a resolverse de forma numérica, lo que es posible hoy día gracias al uso de la informática.En este trabajo, se presenta la experiencia de la cátedra de Cálculo Avanzado de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de métodos numéricos aplicados a la resolución de problemas específicos de ingeniería civil.A partir del planteo de un problema de ingeniería estructural, se realiza su abordaje a través de técnicas de resolución de ecuaciones no lineales, series de Fourier y el método de diferencias finitas; comparándose los resultados y analizando las razones de las diferencias encontradas y sus causas.

Palabras Clave: problemas de ingeniería, resolución de ecuaciones no lineales; diferencias finitas, series de Fourier.

1 Introducción

En la actualidad, la resolución de problemas de ingeniería debe ser abordada a partir de una conceptualización donde, partiendo de la realidad física del problema y ciertas hipótesis, y mediante la aplicación de técnicas, métodos y herramientas, se arribe a una solución determinada, válida en el contexto de dichas hipótesis.

En el marco descrito, el cálculo o análisis numérico constituye una base esencial para los métodos a utilizar, por lo que su enseñanza es central en el proceso de formación de ingenieros.

La aplicación de los métodos mencionados, utilizando la informática como soporte fundamental para su implementación efectiva y eficiente, permite que los estudiantes desarrollen una mayor compresión de los fenómenos, la incidencia de las distintas variables, etc., potenciando de esta manera el aprendizaje significativo.

En la asignatura Cálculo Avanzado, perteneciente al tercer nivel de la carrera de Ingeniería Civil de U.T.N., los estudiantes se encuentran finalizando el ciclo básico de la carrera, e iniciando el aprendizaje de tecnologías básicas y aplicadas; por lo cual, el problema de ingeniería a resolver debe seleccionarse a partir de los conocimientos que los estudiantes ya poseen o están adquiriendo. Esto, que bien podría interpretarse como una limitante, no resulta óbice para que el planteo de la asignatura tenga un fuerte basamento en la aplicación de métodos para la resolución de problemas específicos.

En este trabajo, se muestra un caso de lo expuesto, orientado al ámbito de la ingeniería estructural, donde un mismo problema se aborda para obtener soluciones útiles utilizando distintos métodos numéricos.

2 El problema de ingeniería: un pilar fundamental

Dentro de las competencias genéricas de egreso propuestas por CONFEDI en su Libro Rojo [1] la importancia dada a la competencia tecnológica sobre "Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería", permite considerar al problema de ingeniería (en adelante, PI) como un pilar fundamental dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Según el desagregado que presenta también CONFEDI [2] la implicancia de la adquisición de dicha competencia involucra –en cuanto a la resolución de los PI –, capacidades sobre evaluación de alternativas y definición de criterios de selección, sobre diseño de implementaciones tecnológicas, sobre estimación de errores y sobre evaluación crítica de la solución obtenida.

Asimismo, "Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en ingeniería" y "Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y / o innovaciones tecnológicas", poseen características en común que pueden trabajarse de forma particularmente favorable en la asignatura Cálculo Avanzado.

Siguiendo el enfoque dado por Concari [3] el proceso de resolución de problemas "[...] implica una situación de transferencia de conocimientos, ocupando un lugar relevante en el proceso educativo universitario como estrategia de enseñanza, como actividad de aprendizaje y como instrumento de evaluación".

Por otra parte, según Kowalski y otros [4], la actividad orientada a la resolución de problemas está caracterizadas por :

- Demandas cognitivas y motivacionales de los estudiantes mayores que en el caso de la simple resolución de ejercicios.
- Dirección del aprendizaje hacia contextos del trabajo profesional del futuro graduado.
- Se movilizan los tres saberes (conocer, hacer, ser) hacia nuevas situaciones.
- Desarrollar el pensamiento complejo, y estrategias de planificación, organización, gestión de tiempos y recursos.

3 Planteo del problema

3.1 Contexto respecto de los conocimientos adquiridos

En el tercer nivel de la carrera de Ingeniería Civil de U.T.N., los estudiantes han superado la etapa de conocimientos básicos de matemáticas (cálculo diferencial e integral, en una y varias variables) y física, y se encuentran adquiriendo los correspondientes a tecnologías básicas de la especialidad. Respecto del ámbito que incluye al problema planteado, los estudiantes han cursado ya las asignaturas Estabilidad, Tecnología de Materiales, y se encuentran cursando en paralelo con Cálculo Avanzado, las correspondientes a Resistencia de Materiales y Tecnología del Hormigón.

Además, desde un punto de vista integrador, ya se han cursado también Ingeniería Civil I, II y, en paralelo se cursa Tecnología de la Construcción.

Por tanto, se considera que el estudiante se encuentra en condiciones, con la mediación del docente, de examinar una situación real (o lo más real posible), identificar el problema, realizar las abstracciones correspondientes para generar un modelo de análisis, y resolverlo aplicando distintos métodos analíticos, o numéricos (para este caso).

3.2 Descripción

3.2.1 General

Los sistemas estructurales de edificación (o "estructuras de edificación") son ejemplos de sistemas típicos de ingeniería civil. En ellos interactúan distintos elementos (lineales, superficiales, volumétricos), generando una respuesta (deformación, esfuerzos, reacciones) ante la actuación de diversas causas estáticas (fuerzas) o cinemáticas (desplazamientos impuestos).

En la Fig. 1 se observa la vista en perspectiva de una estructura real para un edificio en altura, destinado a viviendas y locales comerciales. Se busca, a través de modelados 3D, que los estudiantes adquieran una aproximación lo más real posible del objeto de su trabajo, acompañando las consignas con este tipo de documentación, que es común en legajos técnicos.

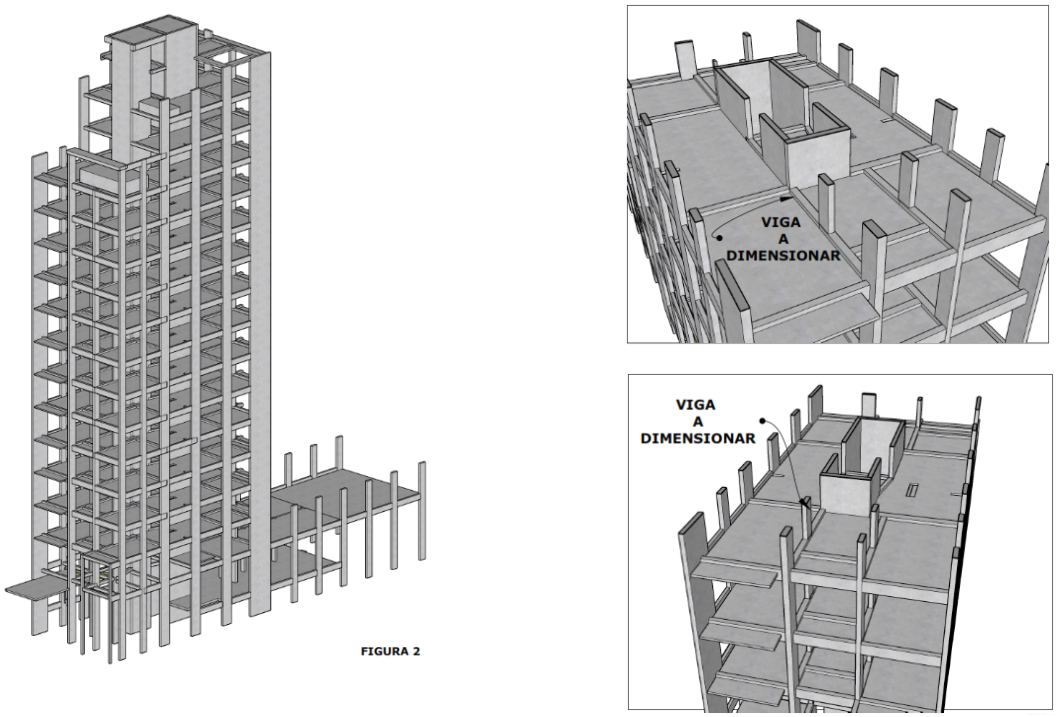


Fig. 1.- Modelo 3D de la estructura.

El problema a resolver se centra sobre una viga de sección rectangular (elemento lineal), localizada en la planta cuyo esquema estructural se muestra en la Fig. 2.

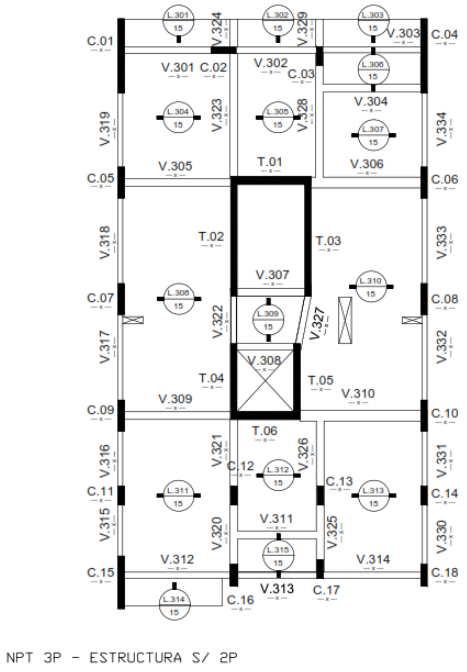


Fig. 2 . Plano de planta estrucutural.

Específicamente, se trata de resolver la obtención de la deformación de dicha viga para la verificación del estado límite de servicio.

De forma resumida, cualquier elemento estructural debe verificar, al menos, dos condiciones límites reglamentarias: estado límite último, que se relaciona con la falla o rotura del elemento; y el estado límite de servicio, que se relaciona con los aspectos de funcionalidad y uso.

Uno de los aspectos concernientes al estado límite de servicio es la verificación de la deflexión máxima del elemento estructural, para comprobar que la misma se encuentra por debajo de los límites establecidos, en consideración del destino de la construcción.

3.2.2 Datos del problema

Los datos del problema, proporcionados a los estudiantes, conciernen a la geometría del elemento (viga) y a sus características mecánicas: longitud L, dimensiones de la sección transversal (b,h), valor de la carga solicitante w_o, y módulo de deformación (E) correspondiente al material que conforma la viga. En este caso, los estudiantes deben recurrir a sus conocimientos específicos de tecnología de los materiales para determinar el valor correspondiente.

Por otra parte, se presenta también el modelo de análisis que corresponde al elemento (Fig.3), sobre el cual se realizarán todas las determinaciones posteriores.

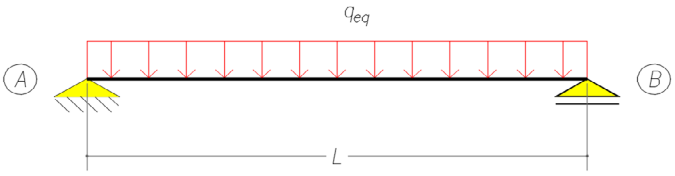


Fig. 3.- Elemento del modelo de análisis.

4 Resolución

4.1 Determinación de la máxima deflexión utilizando el método de la bisección

Partiendo de la ecuación de la deformada para la viga, se trata de encontrar un máximo de dicha función, es decir, encontrar la coordenada para la cual se encuentra dicho extremo, y cuál es su valor.

$$y = \frac{w_o}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (-x^4 + 2 \cdot L \cdot x^3 - L^3 \cdot x) \qquad \textbf{(1)}$$

En la misma x es la coordenada que recorre la longitud de la viga, desde $x = 0$ en el extremo izquierdo hasta $x = L$ en el extremo derecho, e I es el momento de inercia baricéntrico de la sección.

Como ilustración, si se reemplazan los datos del problema, se calculan sus parámetros y se dan valores a x entre sus extremos, es posible construir la gráfica de dicha función con alguna herramienta informática (Excel, ver Fig.4).

x (cm)	f(x)=y
0	0,000000
25	0,108547
50	0,212341
75	0,307217
100	0,389648
125	0,456753
150	0,506287
175	0,536648
200	0,546875
225	0,536648
250	0,506287
275	0,456753
300	0,389648
325	0,307217
350	0,212341
375	0,108547
400	0,000000

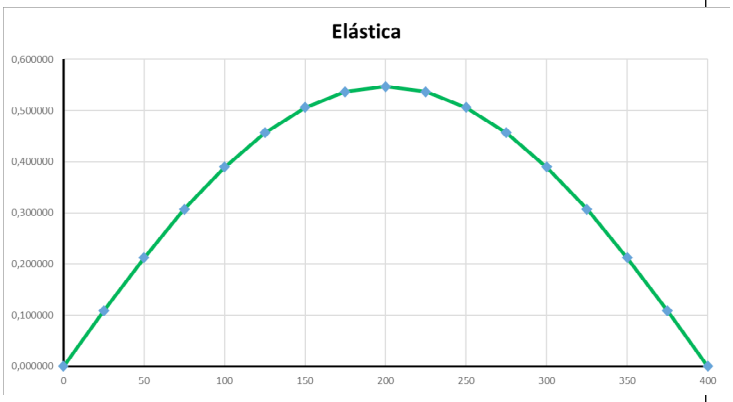


Fig.4.- Imagen de la curva de la elástica.

Para encontrar el extremo de dicha función, se calculará su derivada respecto de la variable independiente, y se buscará su raíz (o cero), utilizando para ello un método numérico para resolver dicha ecuación no lineal (polinomio cúbico), en este caso el de la bisección.

Así, se tiene:

$$y' = \frac{w_o}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (-4 \cdot x^3 + 6 \cdot L \cdot x^2 - L^3) \qquad \textbf{(2)}$$

De igual forma, es posible realizar la gráfica de la función derivada (Excel, Fig 5). De la misma, puede inferirse que la raíz se encuentra cercana a $x = 225cm$, por lo que, para la aplicación del método se debe considerar un intervalo que contenga al valor aproximado de esa raíz.

x (cm)	f'(x)
0	64000000,0
25	62562500,0
50	58500000,0
75	52187500,0
100	44000000,0
125	34312500,0
150	23500000,0
175	11937500,0
200	0,0
225	-11937500,0
250	-23500000,0
275	-34312500,0
300	-44000000,0
325	-52187500,0
350	-58500000,0
375	-62562500,0
400	-64000000,0

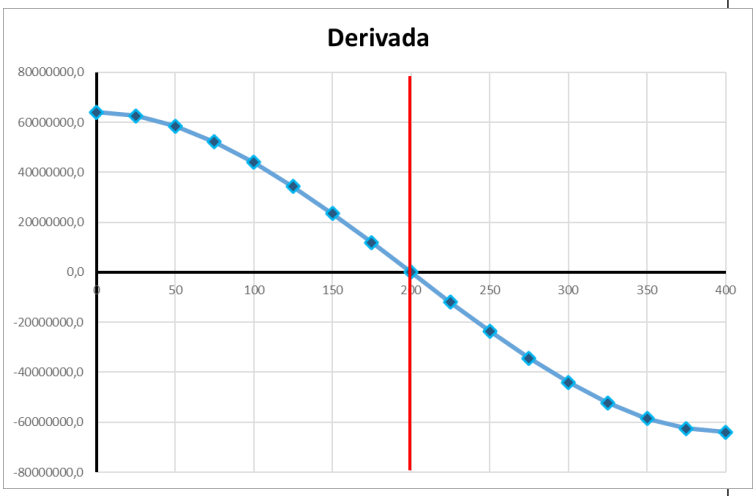


Fig.5- Imagen de la función derivada.

El método de bisección avanza iterativamente de forma convergente en la búsqueda de la raíz a través de la generación de un nuevo intervalo a partir del intervalo inicial (o anterior), utilizando para ello el punto medio de dicho intervalo, y verificando que se cumpla la condición que la raíz continúe contenida dentro del nuevo intervalo (Teorema de Bolzano).

A partir de la función indicada en (2), y tomando como intervalo inicial $x_1 = 0$ y $x_2 = 250$, se puede construir una tabla como se muestra en la Fig.6, que permite realizar la iteración hasta que se satisfaga cierto criterio de parada (error relativo, distancia entre raíces aproximadas sucesivas, cercanía al cero de la función, etc.).

x_1	0	Intervalo de							
x_2	250	Análisis							
N° iteración	x_1	x_2	x_m	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_m)$	$f(x_m) * f(x1)$	$f(x_m) * f(x2)$	e_a
1	0,0000	250,00	125,00	64000000,000	-23500000,000	34312500,000	2196000000000000,000	-806343750000000,000	
2	125,0000	250,00	187,50	34312500,000	-23500000,000	5992187,500	205606933593750,000	-140816406250000,000	33,3333%
3	187,5000	250,00	218,75	5992187,500	-23500000,000	-8973632,813	-53771690368652,300	210880371093750,000	14,2857%
4	187,5000	218,75	203,13	5992187,500	-8973632,813	-1499877,930	-8987549781799,320	13459353804588,300	7,6923%
5	187,5000	203,13	195,31	5992187,500	-1499877,930	2249588,013	13479953169822,700	-3374107411131,260	4,0000%
6	195,3125	203,13	199,22	2249588,013	-1499877,930	374998,093	843591214012,122	-562451362842,694	1,9608%
7	199,2188	203,13	201,17	374998,093	-1499877,930	-562493,563	-210934013140,559	843671680282,569	0,9709%
8	199,2188	201,17	200,20	374998,093	-562493,563	-93749,970	-35156060010,252	52733754739,357	0,4878%
9	199,2188	200,20	199,71	374998,093	-93749,970	140624,899	52734069060,726	-13183580129,410	0,2445%
10	199,7070	200,20	199,95	140624,899	-93749,970	23437,500	3295896014,606	-2197264882,852	0,1221%
11	199,9512	200,20	200,07	23437,500	-93749,970	-35156,248	-823974556,169	3295897242,424	0,0610%
12	199,9512	200,07	200,01	23437,500	-35156,248	-5859,375	-137329098,664	205993642,879	0,0305%
13	199,9512	200,01	199,98	23437,500	-5859,375	8789,062	205993647,675	-51498412,878	0,0153%
14	199,9817	200,01	200,00	8789,062	-5859,375	1464,844	12874603,234	-8583068,836	0,0076%
15	199,9969	200,01	200,00	1464,844	-5859,375	-2197,266	-3218650,817	12874603,253	0,0038%
16	199,9969	200,00	200,00	1464,844	-2197,266	-366,211	-536441,803	804662,704	0,0019%
17	199,9969	200,00	200,00	1464,844	-366,211	549,316	804662,704	-201165,676	0,0010%
18	199,9989	200,00	200,00	549,316	-366,211	91,553	50291,419	-33527,613	0,0005%
19	199,9998	200,00	200,00	91,553	-366,211	-137,329	-12572,855	50291,419	0,0002%

Fig. 6.- Imagen de la tabla del método de la bisección.

Surge entonces que el punto de máxima deflexión se encuentra en $x = 200cm$ por lo que, para obtener la máxima deflexión, se reemplaza dicho valor en (1), en conjunto con los demás datos y parámetros, obteniéndose:

$$y_{max} = 0.547cm \qquad \textbf{(3)}$$

Si se observa la gráfica de la F7, surge con claridad el valor obtenido y la ubicación del mismo.

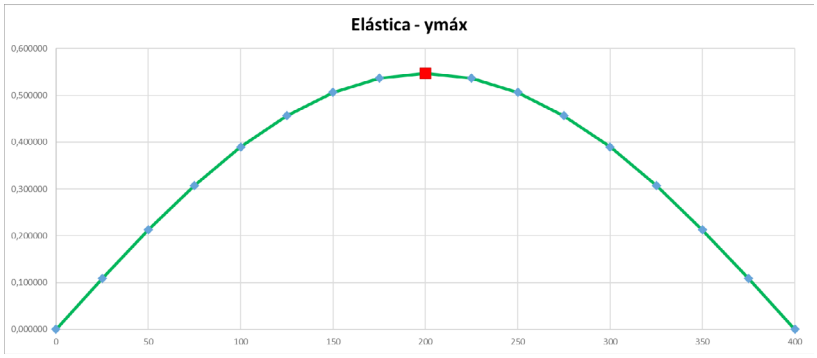


Fig.7.- Imagen de la curva elástica con el punto de deflexión máxima.

4.2 Determinación de la máxima deflexión utilizando un desarrollo en series de Fourier

Se resuelve el problema a partir de un desarrollo en series de medio rango de Fourier. La función a utilizar tiene un período $T = 2 \cdot L$, por lo que siendo $T = 2 \cdot P$, se tiene $P = L$.

Para expresar la carga, se utiliza la expansión de la función seno:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{P}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Integrando para obtener b_n, se tiene:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L w(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad \textbf{(5)}$$

Por lo que, reemplazando en **(4)**:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L w(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Se propone como solución la serie siguiente, también de senos, en virtud de las condiciones de borde que presenta el problema:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Previamente calcular el valor del parámetro B_n, se verifican condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,0}{L}\right) = 0 \\ y(L) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,L}{L}\right) = 0 \end{aligned}\right\} OK \qquad \textbf{(8)}$$

Efectuando la derivada, e igualando en la ecuación diferencial que rige el problema:

$$y^{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{w(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(9)}$$

Se despeja B_n:

$$B_n = \frac{b_n}{EI}\ \frac{L^4}{n^4\pi^4} \quad \textbf{(10)}$$

Aplicando al problema en particular, y considerando $w(x) = w_o$, de **(5)**

$$b_n = \frac{4w_o}{n\pi};\quad n = 1,3,5,7,9,\dots,\infty \quad \textbf{(11)}$$

Y de **(10)**

$$B_n = \frac{4w_o}{EI}\ \frac{L^4}{n^5\pi^5} \quad \textbf{(12)}$$

Reemplazando en **(7)**

$$y(x) = \frac{4w_o}{EI}\frac{L^4}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(13)}$$

El desarrollo en forma de serie infinita indicado en (13) representa la aproximación a la función de la deformada que se ha deducido a partir de proponer una forma particular, de tipo trigonométrica.

Particularizando para el centro de la viga $x = \frac{L}{2}$ y tomando sólo el primer término de dicha serie (por prevalecer sobre los demás), es decir *n = 1* , resulta:

$$y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} * \frac{w_o L^4}{EI} \quad \textbf{(14)}$$

Reemplazando para los datos y parámetros:

$$y_{max} = 0.549cm \quad \textbf{(15)}$$

4.3 Determinación de la máxima deflexión utilizando diferencias finitas

Por último, se determinará la máxima deflexión (en el centro del tramo) de la viga mediante la resolución de la ecuación diferencial de flexión, utilizando un esquema de diferencias finitas.

Partiendo de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2EI}(-wx^2 + wLx) \quad \textbf{(16)}$$

Con las siguientes condiciones de contorno esenciales (Dirichlet):

$$\mathrm{y} = 0|_{x=0=L} \quad \textbf{(17)}$$

Se plantea una grilla para la discretización del dominio, utilizando $\Delta x = \frac{L}{4}$, , de lo que resultan cinco (5) puntos para el planteo de la ecuación diferencial discretizada, localizándose uno de ellos en el centro del vano de la viga.

Se utiliza la expresión en diferencias centrales para la derivada segunda:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad \textbf{(18)}$$

Resultando entonces:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2EI}(-w{x_i}^2 + wLx_i) \quad \textbf{(19)}$$

Efectuando el planteo para los puntos interiores del dominio, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(\Delta x)^2} &= \frac{1}{2EI}(-w{x_1}^2 + wLx_1) \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(\Delta x)^2} &= \frac{1}{2EI}(-w{x_2}^2 + wLx_2) \\ \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(\Delta x)^2} &= \frac{1}{2EI}(-w{x_3}^2 + wLx_3) \end{aligned} \quad \textbf{(20)}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \mathrm{y} = 0|_{x=0} \rightarrow y_0 = 0 \\ \mathrm{y} = 0|_{x=L} \rightarrow y_4 = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(21)}$$

Resultan entonces tres ecuaciones con tres incógnitas a determinar, que son los valores de la deflexión en los puntos 1, 2 y 3. Escribiendo dicho sistema de forma matricial, resulta:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2EI}(-w{x_1}^2 + wLx_1) \\ \frac{1}{2EI}(-w{x_2}^2 + wLx_2) \\ \frac{1}{2EI}(-w{x_3}^2 + wLx_3) \end{bmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

Reemplazando para los datos y parámetros, y resolviendo por cualquiera de los métodos usuales para sistemas de ecuaciones lineales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5835 \\ -0.817 \\ -0.5835 \end{bmatrix} \quad \textbf{(23)}$$

En este caso, el signo negativo corresponde por la convención de signos adoptada para la ecuación de momentos flectores, que se reemplaza luego en la ecuación diferencial.

Por tanto, la deflexión máxima en la viga corresponde al valor en y_2:

$$y_{max} = 0.817cm \quad \textbf{(24)}$$

4.4 Comparación de resultados

En la tabla siguiente se sintetizan los resultados obtenidos mediante cada uno de los métodos aplicados para la resolución del problema:

Tabla 1. Síntesis de resultados obtenidos para la deflexión máxima de la viga.

Método	y_{max} [cm]
Bisección	0.547 cm
Series de Fourier	0.549 cm
Diferencias finitas	0.817 cm

En el caso del método de bisección, si bien se ha utilizado un método numérico para hallar dónde se encuentra extremo de la función de desplazamientos, la solución para la deflexión es exacta.

Cuando se utilizan series de Fourier, dado que se propone la "forma" de la función de desplazamientos y se obtiene la función de deflexión en forma de serie infinita, el carácter de la solución es aproximado, porque deben necesariamente escogerse algunos términos de dicha serie, truncándola.

No obstante, aun tomando sólo el primer término, el valor obtenido presenta un error relativo de sólo 0.37% respecto de la deflexión exacta.

Finalmente, el uso de diferencias finitas para un $\Delta x = \frac{L}{4}$, presenta un error de 49.3% para la flecha máxima, lo que es indicativo que es necesario considerar un intervalo de grilla menor para mejorar la aproximación de la solución.

5 Resultados de la experiencia

La experiencia descrita viene realizándose en la asignatura desde el año 2020 hasta la actualidad, lo que permite extraer algunos resultados interesantes en cuanto al desempeño de los estudiantes:

- Demandas cognitivas y motivacionales de los estudiantes mayores que en el caso de la simple resolución de ejercicios.
- Dirección del aprendizaje hacia contextos del trabajo profesional del futuro graduado.
- Se movilizan los tres saberes (conocer, hacer, ser) hacia nuevas situaciones.
- Desarrollar el pensamiento complejo, y estrategias de planificación, organización, gestión de tiempos y recursos.

6 Conclusiones

Se ha presentado una experiencia de cátedra sobre la aplicación de distintos métodos numéricos a la resolución de un problema específico de ingeniería estructural. La posibilidad de abordaje por distintas metodologías permite mostrar las características y limitaciones de cada una, el grado de aproximación y como proceder para su mejora. De esta manera, los métodos numéricos no se tratan en la asignatura como compartimentos estancos, sino teniendo al problema de ingeniería como eje e hilo conductor, lo que promueve el aprendizaje significativo y permite acercar al estudiante a problemáticas similares a las del quehacer profesional.

Referencias

1. CONFEDI: Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro Rojo de CONFEDI". *Libros de CONFEDI*. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf (2018). Accedido el 01 de Junio de 2022.
2. CONFEDI: Competencias en ingeniería. *Libros de CONFEDI*. https://confedi.org.ar/wp-content/uploads/2020/04/Cuadernillo-de-Competencias-del-CONFEDI.pdf (2014). Accedido el 01 de junio de 2022.
3. Concari, S.: El modelado y la resolución de problemas: ejes para la enseñanza de la física para ingenieros. https://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Concari.htm (2000). Accedido el 01 de mayo de 2022.
4. Kowalski, V.; Erck, M.; Enríquez, H.; Morano, D.; Carreño, T.; Colasanto, C.: ¿Cómo formar competencias? *Laboratorio Mecek. Curso de posgrado: Formación y evaluación de competencias en ingeniería dentro de un modelo híbrido y centrado en el estudiante*, Guía de Lectura Parte 3, pp. 80-99 (2021)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

La inclusión de apps en el aula de Estadística para el desarrollo de competencias en estudiantes de Ingeniería

Lorena V. Belfiori[1], María C. Kanobel[1] , Mariana S. García[2]
[1] Grupo UTN InTecEn, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050- Villa Domínico
{lbelfiori,mkanobel}@fra.utn.edu.ar,
[2] Grupo UTN InTecEn, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050- Villa Domínico
mgarcia@fra.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo describe una experiencia sobre la inclusión de aplicaciones para dispositivos móviles en el aula de Probabilidad y Estadística del nivel universitario. La intervención didáctica viene desarrollándose desde 2018 en cursos de segundo año de carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda. La mediación de estos recursos permite reducir los tiempos que el estudiantado dedica a la algoritmia, en favor de espacios de reflexión, discusión y análisis. Además, estas herramientas brindan innumerables posibilidades para generar actividades que propicien la motivación del estudiantado y la innovación en la enseñanza. Del relevamiento de las percepciones del alumnado sobre la inclusión de estas herramientas digitales, se concluye que un alto porcentaje las considera de mucha utilidad tanto en 2028 y 2019 donde se realizó la experiencia en espacios presenciales, como en 2020 y 2021 donde la intervención fue implementada en contextos de virtualidad.

Palabras Clave: Aplicaciones móviles, Enseñanza por competencias, Estadística, Estrategias de enseñanza

1 Introducción

En la actualidad, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) permiten otras formas de enseñar y de aprender. [1]. En ese sentido, la inclusión de TIC en las aulas puede convertirse en un apoyo o complemento para la enseñanza [2] . En el área Matemática, en particular, posibilita acortar el tiempo dedicado a la algoritmia fomentando espacios para la reflexión, la discusión y el análisis para la resolución de problemas. Las apps para dispositivos móviles en las prácticas pedagógicas pueden brindar innumerables posibilidades para la motivación del estudiantado y la innovación en la enseñanza.

De esta forma se busca que el alumnado desarrolle competencias digitales que les permita utilizar de forma eficiente recursos y herramientas para propiciar el pensamiento reflexivo, la creatividad y la innovación. Así, se espera también que mejoren la flexibilidad y la capacidad de reacción y anticipación.

La adquisición de estas competencias posibilita hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente, así como evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas, a medida que van apareciendo, en función de su utilidad para resolver tareas o cumplir objetivos específicos. Por otra parte,el desarrollo de competencias digitales implica la participación y el trabajo colaborativo, así como la motivación y la curiosidad por el aprendizaje y la mejora en el uso de las tecnologías.

En este trabajo se relata la experiencia desarrollada en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional

Avellaneda (Argentina) en los ciclos 2018, 2019, 2020 y 2021 sobre el uso de aplicaciones móviles para la enseñanza de distintos contenidos de la asignatura Probabilidad y Estadística. Se realizó también un estudio descriptivo sobre las percepciones del estudiantado en los años nombrados, comparando las dos modalidades de cursado: presencial durante 2018 y 2019 y en modalidad remota, en 2020 y 2021.

2 Marco teórico

Vaill enfatiza que "el aprendizaje debe constituir una forma de ser –un conjunto permanente de actitudes y acciones que los individuos y grupos emplean para tratar de mantenerse al corriente de eventos sorpresivos, novedosos, caóticos, inevitables, recurrentes…"[3]. Por otro lado, según explican García Fraile y Sabán Vera [4], el modelo de competencias posibilita otras maneras de mediar el aprendizaje del estudiantado, para que logre identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas dentro de un contexto. Así, argumenta Tobón [5] que este modelo guarda relación con el constructivismo. Además, apoya el acercamiento y entrelazamiento de las instituciones educativas con la sociedad y sus dinámicas de cambio, con el fin de que estén en condiciones de contribuir tanto al desarrollo social y económico como al equilibrio ambiental y ecológico.

En este sentido, el trabajo por competencias exige que se produzcan cambios en la manera de enseñar y aprender [6]: esto incluye la mediación genuina de TIC [7] en las prácticas pedagógicas, ya sea presenciales o remotas, que permite que el alumnado adquiera competencias haciendo uso de la tecnología [5].

Por otro lado, la UNESCO [8] afirma que el aprovechamiento del potencial de las tecnologías móviles en el nivel universitario favorece el desarrollo del pensamiento crítico alcanzando madurez en el proceso de consumo de la información, a la cual se puede acceder muy fácilmente en la actualidad. En particular, sobre la competencia digital, se hace necesario generar cambios que incluyen, entre ellos, el uso de dispositivos móviles en las actividades del aula. Así, el alumnado, al resolver actividades y problemas, adquiere el dominio de diversos recursos tecnológicos y desarrolla nuevas habilidades [9].

Según afirma Duval [10], aprender matemática propicia la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Estas actividades requieren del uso de distintos registros de representación y de expresión. Dichos registros potencian la comprensión del objeto matemático que es vital para la actividad cognitiva del pensamiento debido a que la alternancia entre ellos exige conocimiento, tratamiento y conversión. Bajo este enfoque, Gruszycki et al [11] destacan además que, actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas.

En el área de Probabilidad y Estadística, el uso de algunas herramientas digitales para mediar las prácticas pedagógicas permite trabajar con diversos registros de representación semiótica: gráfico, algebraico o analítico y tabular. Aún así, el solo manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros es insuficiente para obtener una comprensión integral: es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

Particularmente, algunas aplicaciones como Excel, Geogebra, iStat y Probability Distributions, permiten el trabajo simultáneo con distintos registros de representación para facilitar la comprensión de los conceptos. Incluso, para que estas herramientas representen un verdadero aporte en la formación de quienes serán profesionales de la ingeniería en un futuro, se hace necesario implementar modificaciones en la metodología de enseñanza a partir de una reflexión y planificación previa del diseño didáctico.

Cabe destacar que, si bien Excel no es un software propiamente estadístico, cuenta con funciones y módulos estadísticos de uso más sencillo que los programas diseñados para el tratamiento de datos. Además, posibilita realizar simulaciones sencillas de experimentos aleatorios [12]. De este modo, es posible abordar una introducción al análisis exploratorio de datos y a la modelización estadística.

3 Metodología

La experiencia se desarrolló en 2018, 2019, 2020 y 2021 con estudiantes de los cursos de Probabilidad y Estadística de la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Avellaneda). Se efectuó un estudio de carácter descriptivo, en el cual para la recolección de datos se utilizó un cuestionario autoadministrado que fue enviado al

estudiantado en formato on line del tipo Google Forms, garantizando el anonimato de las respuestas dadas.

3.1 Descripción de la experiencia

En el tratamiento de los contenidos de la unidad 1 sobre Estadística Descriptiva, se sugirió al alumnado el uso del programa Excel de Microsoft para el procesamiento de grandes cantidades de datos, el cálculo rápido de distintas medidas de análisis y la visualización y comparación del comportamiento de distintas muestras. También, para el estudio de ciertos test de hipótesis que son relevantes para la formación del alumnado. Si bien este software no es de acceso libre, su uso masivo lo convierte en una herramienta interesante para ser trabajada en el aula. Además, en general, es conocido y utilizado en otros ámbitos por el estudiantado.

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra un análisis realizado sobre una muestra de 11961 datos en la que se desea poner a prueba si existe o no una relación entre competitividad y género. Por la magnitud de los datos, este estudio requiere forzosamente el tratamiento con alguna aplicación tecnológica.

Ho:	No existe relación causal entre la competitividad y el género (la competitividad no depende del género).
H1:	Existe relación causal entre la competitividad y el género.

Nivel de significancia	0,01
Grados de libertad	2

Referencias	
Género = 1	Mujer
Género = 2	Hombre

Frecuencias observadas

Tercil	Género					
	Mujer		Hombre		Total	
	fo	%	fo	%	fo	%
1	2378,00	38%	1609,00	28%	3987,00	33,33%
2	2132,00	34%	1855,00	32%	3987,00	33,33%
3	1715,00	28%	2272,00	40%	3987,00	33,33%
Total	6225	100%	5736	100%	11961	100,00%
Porcentajes	52,04%		47,96%			

Frecuencias esperadas

Tercil	Género					
	Mujer		Hombre		Total	
	fe	%	fe	%	fe	%
1	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
2	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
3	2075,00	33,33%	1912,00	33,33%	3987	33,33%
Total	6225,00	100,00%	5736,00	100,00%	11961	100,00%

Cálculo fórmula

	fo	fe	(fo-fe)^2/fe	
Tercil 1 Mujer	2378,00	2075,00	44,2453012	
Tercil 2 Mujer	2132,00	2075,00	1,565783133	
Tercil 3 Mujer	1715,00	2075,00	62,45783133	
Tercil 1 Hombre	1609,00	1912,00	48,01725941	
Tercil 2 Hombre	1855,00	1912,00	1,699267782	
Tercil 3 Hombre	2272,00	1912,00	67,78242678	
Totales	11961,00	11961,00	225,76787	chi cuadrado
		Chi cuadrado teórico		9,21034037

Fig. 1. Actividad sobre Test de hipótesis procesada en EXCEL.

También se implementó el uso de la aplicación InfoStat en las computadoras o iStat para dispositivos móviles, con el fin de analizar los resultados de las medidas descriptivas que devuelve el programa al ingresar los datos de la muestra. Además se utilizó para hacer un análisis a partir de la lectura e interpretación de la información de salida de los distintos registros obtenidos de un gran conjunto de datos.

En la figura 2 se observa un registro gráfico de salida obtenido con Infostat en una actividad realizada a partir de un conjunto de 1607 datos para analizar el comportamiento de los perímetros y pesos de cierto tipo de ajos cuyo relevamiento fue realizado en 2016 y 2017. En este caso, se trabajó con dos boxplot para comparar el comportamiento de la variable peso en los años del estudio.

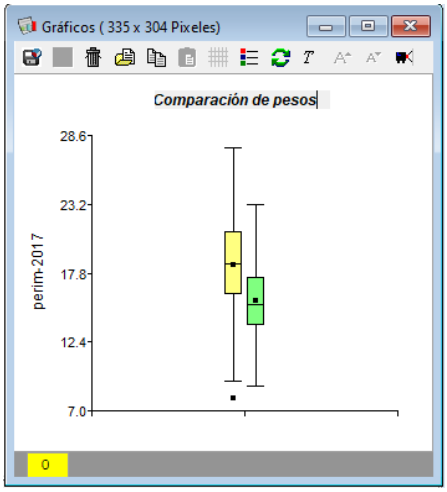


Fig. 2. Salida de Infostat para una actividad sobre visualización de datos

La figura 3 resume información de las dos variables observadas, aprovechando la posibilidad de particionar y de clasificar los datos según los años del relevamiento..

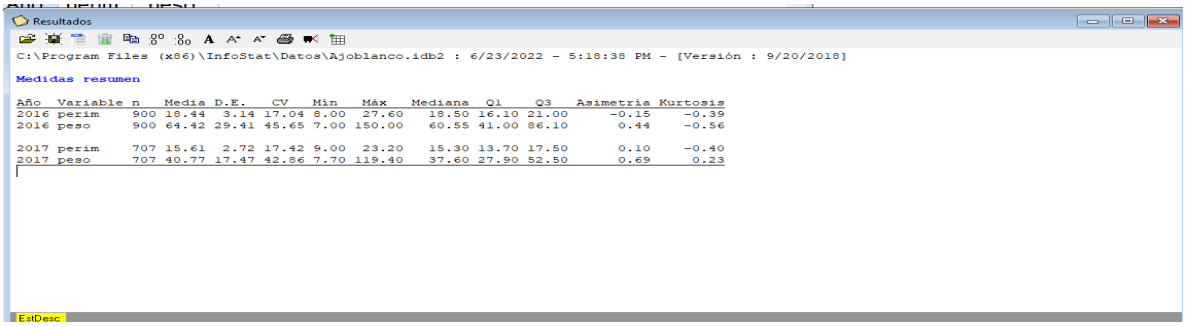


Fig. 3. Salida de Infostat para una actividad sobre comparación de datos de dos variables

El trabajo con los distintos registros permite hacer un primer estudio descriptivo y un posterior análisis exploratorio del conjunto de datos que están dados dentro de un contexto. Este análisis se complementará luego al momento de la enseñanza de estadística inferencial.

Para la construcción del concepto de variable aleatoria se trabaja con diversos modelos probabilísticos especiales como son las distribuciones discretas binomial, hipergeométrica, y Poissons, entre otras, y las distribuciones uniforme, exponencial negativa y normal entre los modelos continuos. Para las resolución de actividades se sugirió al alumnado el uso de una aplicación gratuita para dispositivos móviles iOS y Android, PROBABILITY DISTRIBUTIONS (PD) desarrollada por la Universidad de Iowa en 2018. Esta aplicación permite calcular probabilidades y momentos de distintas variables aleatorias al seleccionar el modelo e ingresar sus parámetros. Además, PD calcula probabilidades acumuladas y muestra un registro gráfico de la respuesta resaltado sobre la imagen de la distribución de probabilidades. El uso de PD posibilita reducir tiempos de cálculo y, a la vez, pensar actividades que habiliten espacios para la discusión, el análisis, la estimación de resultados y la interpretación de las respuestas posibles a las situaciones problemáticas propuestas.

PD es una aplicación que permite no sólo realizar cálculos de probabilidades, sino también conocer el valor de la variable al ingresar una probabilidad o encontrar las medidas de posición al incorporar los parámetros de la distribución,tal como se muestra en la figura 4:

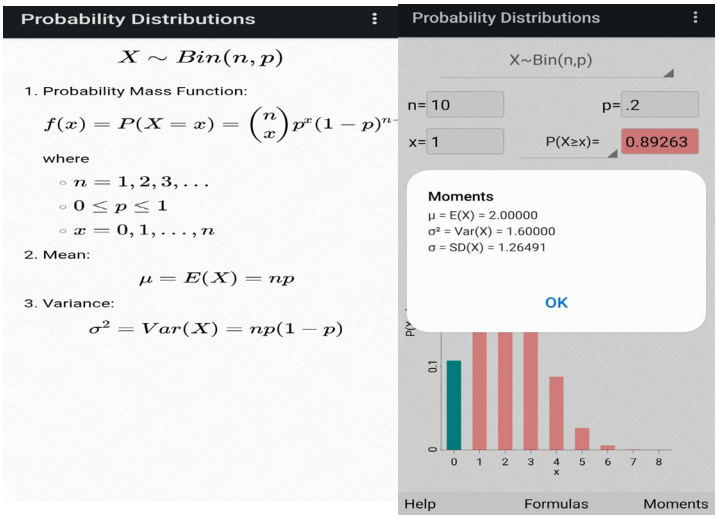


Fig. 4. Fórmulas y Momentos en la app Probability distributions.

También, PD posibilita la resolución de problemas por iteración de parámetros. Así, permite abordar situaciones complejas como la siguiente:

"En una localidad se sabe que el 5% de los habitantes tienen sangre 0 negativo. ¿De qué tamaño se debería tomar una muestra para encontrar al menos dos personas con ese tipo de sangre con probabilidad mayor al 90%?"

En este ejercicio la variable X = "cantidad de personas que tienen sangre 0 negativo entre n elegidas al azar" tiene una distribución binomial de parámetro p = 0,05 y n desconocido. Por lo cual, para encontrar el n que satisfaga que la P(X≥2) sea superior a 0,90, sería necesario resolver la inecuación que está a continuación (1):

$$1 - 0{,}95^n - n\,0{,}05\,.\,0{,}95^{n-1} > 0{,}90 \qquad \textbf{(1)}$$

PD permite fácilmente variar el valor de este parámetro hasta alcanzar la solución buscada. Así, el estudiante puede, con una herramienta accesible, encontrar los valores de n que cumplen la condición planteada.

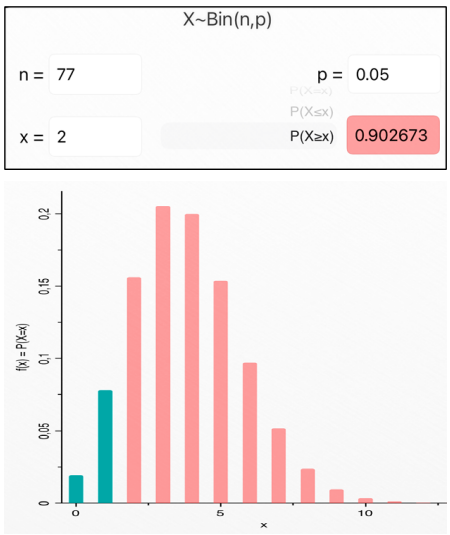


Fig. 5. Estimación del tamaño de una muestra

Esta aplicación se utiliza también para abordar el contraste de hipótesis cuando la información está resumida. De esta manera se puede trabajar tanto con el concepto de p-value como con el valor crítico y el nivel de significación de un test.

Los ejemplos anteriores son algunas de las actividades que forman parte de un diseño pedagógico que busca promover "un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante y definir un enfoque basado en competencias y descriptores de conocimiento" tal como refiere el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de Argentina [12].

4 Resultados

La inclusión tanto de Excel, de InfoStat como de Probability Distribution posibilitó un mayor feedback entre docentes y estudiantes y entre pares. A la vez, se hizo necesario replantear el tipo de actividades y tareas académicas propuestas para desarrollar el pensamiento crítico y promover otras habilidades. Cabe destacar que, la versión móvil de Infostat no fue analizada dado que sólo está disponible para sistemas operativos Android. Contemplarla en el estudio haría arribar a una muestra segmentada, no representativa de la población.
Desde el punto de vista del estudiantado, nos resultó importante relevar su percepción acerca de la utilización de las aplicaciones para dispositivos móviles utilizadas durante el ciclo lectivo (Probability Distribution principalmente) y la planilla de cálculo Excel. Los resultados de la encuesta anónima implementada permiten comprobar que la gran mayoría considera muy útil la incorporación de estas tecnologías como estrategia de aprendizaje.

En un relevamiento realizado en 2018, el 82% del alumnado afirmó que la inclusión de apps en las clases resultó muy útil mientras que el 9% la consideró útil. En el 2019, también en contexto de presencialidad, el 85,24% del grupo relevado expresó que esta inclusión les fue de mucha utilidad y un 9% las percibió sólo útiles. Durante la pandemia, bajo enseñanza remota de emergencia, se obtuvieron resultados similares: en el año 2020, el 79% consideró muy útil la implementación de apps para la resolución de problemas un 13% respondió que lo consideraba útil y del relevamiento realizado en 2021, un 88% del total de estudiantes afirmó que fue muy útil trabajar con apps mientras que un 3% lo consideró útil.

En los años 2020 y 2021 se relevó también acerca del uso de EXCEL. En 2020, las respuestas del estudiantado reflejaron que el 55% considera muy útil y el 31% afirma que le resultó útil. En 2021, se observa que el 59% del alumnado consideró muy útil, y un 32% lo calificó de útil. No solo se advierte que el alumnado asigna una alta valoración de utilidad a la herramienta excel en la clase de Probabilidad y Estadística, sino también que hay un incremento en dichos porcentajes. Este aumento podría estar asociado al tipo de actividades propuestas por el equipo docente y las mejoras realizadas en el diseño didáctico adaptado al contexto de virtualidad.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Si bien el estudiantado se relaciona cotidianamente con distintas aplicaciones y tecnologías, no suelen utilizarlas con un fin pedagógico. Al implementarlas como parte de la metodología de enseñanza permitió ampliar las instancias de análisis y discusión de resultados traspasando la fase puramente algebraica y operacional dedicando ese tiempo a la interpretación de la información en su contexto. Esto fomenta adicionar al estudio estadístico el pensamiento reflexivo relacionado con el área profesional de estudio.

Con la inclusión de PD se hizo necesario pensar actividades áulicas para desarrollar el pensamiento crítico y promover diversas habilidades en el estudiantado. A la vez permitió mayor feedback con el alumnado. La simultaneidad de registros semióticos posibilitó que cada estudiante pudiera relacionar la distribución con su representación gráfica y los significados de parámetros asociados. También, reconocer posibles errores al ingresar datos, comparar distribuciones, y hacer estimaciones al variar parámetros.

Así, las actividades fueron planificadas teniendo en cuenta los cambios que producen las nuevas tecnologías: a partir de la actualización continua y de la inclusión genuina de nuevas herramientas, incorporamos el uso de aplicaciones móviles para mejorar la enseñanza.

Por otro lado, cabe destacar que las intenciones de la cátedra al proporcionar herramientas tecnológicas para

el tratamiento de la información se enfocan en reducir los tiempos de cálculo, posibilitar el análisis de grandes volúmenes de datos y direccionar los esfuerzos al análisis e interpretación de medidas y resultados para una toma de decisiones justificada sin dejar de lado el contexto de la situación. Este es tan relevante en la toma de decisiones como el problema que provocó el inicio del estudio.

De esta manera, desde la asignatura Probabilidad y Estadística se fomenta la inclusión de apps para el desarrollo de competencias encontrando buena recepción del alumnado. Este tipo de experiencias posibilita que perfeccionen las competencias necesarias para desenvolverse en el campo profesional de la ingeniería. Además, facilitan la interacción con otras personas, generando un ambiente de trabajo más grato y colaborativo como así también, agilizan el trabajo, refuerzan la pertenencia y otorgan mayores satisfacciones.

Agradecimientos. Agradecemos al estudiantado de Probabilidad y Estadística de la Facultad Regional por su colaboración con este estudio.

Referencias

1. Fernández Lamarra, N. (comp.) Aiello,M.; Álvarez,M.; Fernández,L.; García,P.; Grandoli,M.E.; Ickowicz. M.; Paoloni, P.; Perez Centeno,C.: La innovación en las Universidades Nacionales. Aspectos endógenos que inciden en su surgimiento y desarrollo. Universidad Nacional de Tres de Febrero/ Provincia de Buenos Aires / Argentina (2015).
2. Tobón, M.; Arbeláez, M.; Falcón, M. y Bedoya, R.: La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira. (2010).
3. Vaill, P. B.: Learning as a Way of Being. San Francisco, CA, Jossey-Blass Inc., p.42 (1996).
4. García, J.A. y Saban, C. (Coord.): Un nuevo modelo de formación para el siglo XXI: La enseñanza basada en competencias. Barcelona: Colección Redes. (2008).
5. Tobón Tobón, S.; Pimenta Prieto, J. & García Fraile, J.: Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. México: Pearson. (2010).
6. Zabala, A.; Arnau, L.: Métodos para la enseñanza de las competencias. Barcelona: Graó. (2014).
7. Maggio, M.: Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad. Buenos Aires: Paidós. (2012).
8. Unesco: Directrices De La Unesco Para Las Políticas De Aprendizaje Móvil. París: Organización De Las Naciones Unidas Para La Educación, La Ciencia Y La Cultura. (2013).
9. Tobón, M.; Arbeláez, M.; Falcón, M.; Bedoya,R.: La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira. (2010).
10. DuvaL, R.: Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (M. Vega. Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (2004).
11. Gruszycki, A.; Oteiza, L.; Maras, P.; Gruszycki, L.; Ballés, H.: Geogebra y los sistemas de representación semióticos. Argentina: CLAME (2014).
12. Faulin, M.; Juan,A.: Simulación de Monte Carlo con Excel, MECD Técnica Administrativa, Buenos Aires, V. 5, nº 1, julio/septiembre 2005 - ISSN 1666-1680 - http://www.cyta.com.ar
13. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería - CONFEDI: Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina “Libro Rojo de CONFEDI”. Argentina: Universidad FASTA Ediciones. p.17 (2018)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Gamificación e impresoras 3D en matemáticas: herramientas didácticas para aumentar la motivación y participación de los estudiantes en un curso virtual

Solange Milesi[1], Joaquín Ruíz[1], Solange Gualpa[1], Emiliano P. Ravera[1]
[1] Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos.
{solange.milesi, joaquin.ruiz, solange.gualpa, emiliano.ravera}@uner. edu.ar

Resumen. La formación del ingeniero dentro de un modelo educativo STEAM favorece la motivación de los estudiantes desde los primeros años de su formación curricular. Así el equipo de cátedra de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la FI-UNER viene desarrollando diferentes espacios didácticos con impresoras 3D. Sin embargo, el COVID-19 afectó el normal funcionamiento de las Universidades y desde el equipo de cátedra nos preguntamos ¿cómo podemos promover que nuestros estudiantes compartan sus apuntes con sus pares?, ¿qué estrategia podemos implementar en un curso virtual?. Entonces surgió una propuesta didáctica articulando un espacio lúdico motivado por el uso de impresoras 3D. Como resultado, nuestros estudiantes lograron desarrollar una experiencia muy enriquecedora capaz de "compartir resultados" y "aclarar conceptos" de manera temprana. Según sus opiniones, haber incluído la impresora 3D resultó "motivador" y "divertido" dado que "emociona imprimir" y "participar de la impresión" por lo que "da gusto participar" del juego.

Palabras Clave: Estrategias para motivar, Impresoras 3D, Juegos, Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales.

1 Introducción

Entre las actividades que el ingeniero desarrolla en su vida profesional encontramos la elaboración y dirección de proyectos relacionados con el diseño y la fabricación de productos. La matemática aporta conceptos y métodos para la comprensión de tecnologías aplicadas a las diferentes áreas y también para el avance de las mismas. Es entonces una herramienta indispensable, no sólo en el proceso de formación del ingeniero, sino también para su futuro ejercicio profesional o en las actividades de especialización y perfeccionamiento. Los conceptos, métodos y formas de pensamiento propios de la matemática conjuntamente con la informática, las tecnologías de base y las disciplinas específicas, permitirán al ingeniero desenvolverse con soltura en el diseño y cálculo de instrumental, proceso y/o instalaciones. Para el estudiante de ingeniería es necesario entonces conocer conceptos y técnicas de la matemática para comprender los modelos de diferentes fenómenos naturales correspondientes al campo de la física, la química, la biología, entre otros.

Por otro lado, el avance de la tecnología y los recursos digitales han dado lugar a nuevas posibilidades para la enseñanza de matemática para ingenieros. Las nuevas tecnologías permiten resolver problemas complejos y realistas y visualizar soluciones, fenómenos y aspectos teóricos [1, 2]. Estos desarrollos también han cambiado las condiciones para la enseñanza y el aprendizaje. Así también, existe una tendencia en la enseñanza de la ingeniería centrada en proponer un modelo educativo interdisciplinar basado en la ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas llamado STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics; por sus siglas en inglés),

que favorezca la motivación de los estudiantes desde los primeros años y los acerque a situaciones vinculadas con su futuro profesional [3]. En este contexto de enseñanza y de aprendizaje es necesario generar actividades que propongan la resolución de problemas e incorporen aspectos basados en STEAM, valiéndose de la tecnología para la modelización y visualización.

Es así que resulta importante reflexionar sobre cómo usar tecnologías emergentes para ayudar a los estudiantes a construir modelos que faciliten y/o guíen la resolución de problemas. Entre estas herramientas, la impresión 3D es una de las tecnologías más destacadas. En este sentido, el equipo de cátedra de las asignaturas Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la FI-UNER a lo largo de los últimos años ha venido desarrollando diferentes espacios didácticos que incluyen el uso de impresoras 3D por parte de los estudiantes dentro de los cursos. Estas actividades han puesto de manifiesto un creciente interés por parte de los estudiantes en el desarrollo de las actividades motivadas por el uso de nuevas tecnologías para la resolución de problemas matemáticos abiertos [4, 5].

Sin embargo, en marzo del 2020, la pandemia del coronavirus (COVID-19) afectó el normal funcionamiento de las Universidades siendo este un punto de inflexión que mostró la necesidad de transformar nuestras prácticas de enseñanza para motivar a nuestros estudiantes en esta difícil e inesperada situación y al mismo tiempo mantener los estándares académicos que acrediten la formación de los mismos. De esta manera, la pandemia nos llevó a la profundización y ampliación del uso de nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje llevado adelante en los cursos de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la FI-UNER. Aunque rápidamente pudimos adaptarnos y migrar a un dictado virtual sin alterar las propuestas y objetivos académicos de los cursos, a medida que transcurría el tiempo notamos que sin importar los esfuerzos que realizamos para mantener una interacción fluida con nuestros estudiantes habíamos perdido la capacidad de observar qué era lo que estaban realizando en sus cuadernos (al punto tal de no saber de qué manera resolvían un problema matemático mientras estudiaban). Este aspecto es muy importante en nuestras prácticas presenciales habituales dado que, en esas instancias informales, los docentes podemos detectar de manera temprana (previas a una evaluación) posibles fallas en la nomenclatura utilizada por los estudiantes y/o errores de comprensión o interpretación de conceptos.

Por este motivo desde dentro del equipo de cátedra surgieron los siguientes interrogantes: ¿cómo podemos promover la participación de nuestros estudiantes en el desarrollo del cursado virtual?, ¿cómo podemos promover que nuestros estudiantes compartan sus apuntes con sus pares dentro de un curso virtual?, ¿qué estrategia podemos implementar en el curso para lograr que nuestros estudiantes compartan de manera libre sus desarrollos, apuntes y/o dudas de una resolución?

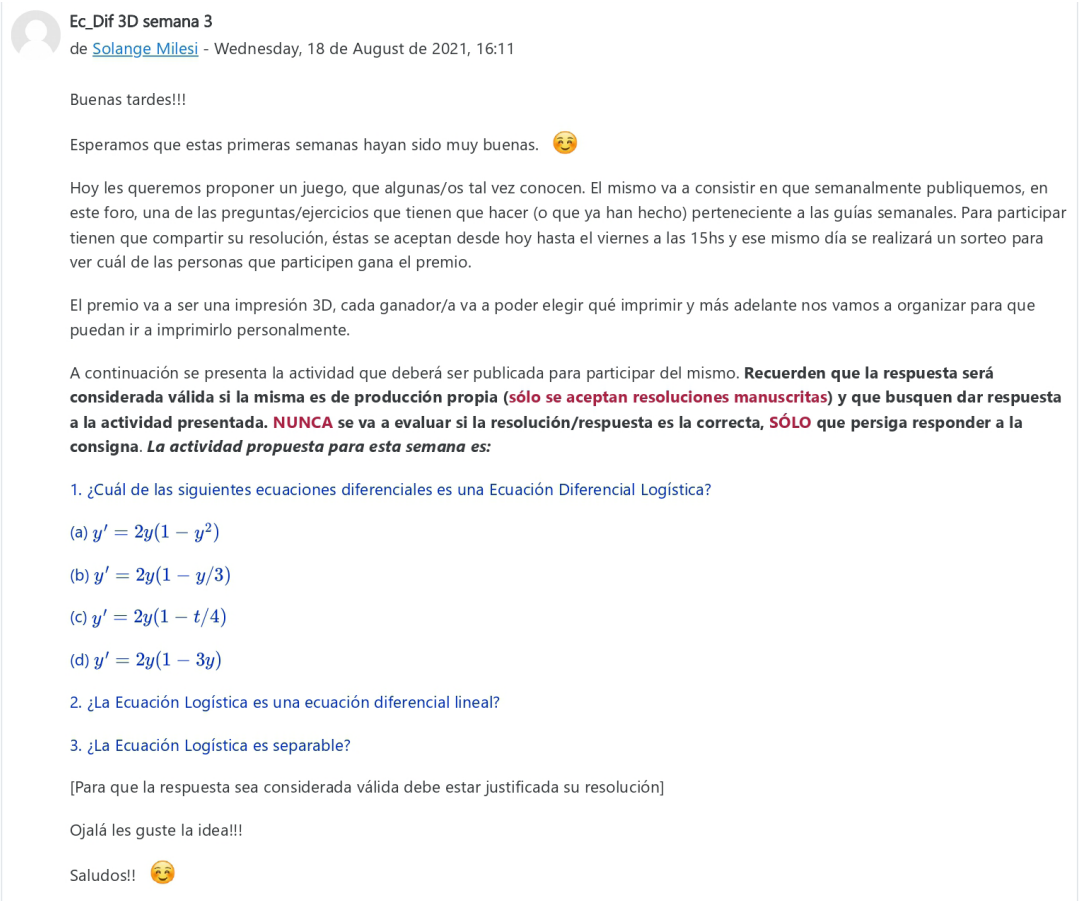
En la búsqueda de una respuesta a los mismos, surgió una propuesta didáctica que articula el desarrollo de un espacio lúdico motivado con el uso de una tecnología emergente como la impresión 3D que propicie un espacio seguro para nuestros estudiantes donde puedan compartir sus apuntes con todos los participantes del curso (estudiantes y docentes) de manera libre y así construir y reafirmar aspectos conceptuales de manera colectiva fomentando la participación e interacción entre los estudiantes del curso.

En este contexto, el concepto Gamification (de origen anglosajón) comenzó a utilizarse en los negocios para referirse a la aplicación de elementos del juego con el fin de atraer, animar y persuadir a los usuarios para realizar cierta acción. Aunque la idea de usar el pensamiento y los mecanismos del juego para persuadir a la audiencia no es del todo nueva, esta tendencia se potenció con el uso de medios digitales. En un sentido general, la Gamificación se describe como el proceso de pensamiento de juego y sus mecanismos para atraer a los usuarios y hacerlos resolver problemas [6]. Esta definición puede aplicarse a cualquier situación, sin embargo en el ámbito educativo la Gamificación se refiere al uso de elementos del juego para involucrar a los estudiantes, motivarlos a la acción y promover el aprendizaje y la resolución de problemas [7]. Así, el uso de juegos o elementos del mismo para transformar ambientes de aprendizaje tienen la capacidad de mantener la atención de los estudiantes y desafiarlos constantemente. Además de tener un notable poder de motivación, los juegos atraen a los estudiantes a participar en ellos a menudo sin ninguna recompensa, sólo por el placer de jugar y tener una experiencia atractiva de aprendizaje [7].

2 Espacio didáctico desarrollado

La propuesta didáctica desarrollada consistió en la implementación de un juego virtual dentro de los cursos de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales denominado *CV_test3D* y *EcDif_test3D*, respectivamente. Este juego consistía en la publicación de un ejercicio o pregunta relacionada con la temática que se estaba abordando esa semana en el foro de discusión entre pares del curso. Uno de los enunciados presentados se muestra en la Figura 1 a modo de ejemplo. La actividad era publicada los días miércoles y los estudiantes tenían tiempo hasta el viernes de

esa semana para compartir su propuesta de solución manuscrita. Una vez cerrada la actividad, las producciones de los alumnos eran revisadas por miembros de la cátedra y se realizaba una realimentación a través del foro. De entre todos los alumnos que participaban de la actividad, se elegía a uno como ganador, el cual recibía como premio la posibilidad de seleccionar e imprimir un objeto 3D utilizando las impresoras con las que cuenta la cátedra. En la Figura 2 se muestra el mensaje semanal donde se anuncia al ganador del juego de la semana anterior. Cabe destacar que nunca se pretendía evaluar la propuesta de resolución presentada por los estudiantes sinó que se buscaba propiciar un ambiente seguro y distendido donde, con la intervención de los miembros de la cátedra, se pretendía reforzar conceptos y/o detectar inconvenientes de manera temprana. El único requisito que debían cumplir los estudiantes es que la respuesta que presenten en el foro sea una propuesta de resolución que ellos hayan realizado con lápiz y papel.



Ec_Dif 3D semana 3

de Solange Milesi - Wednesday, 18 de August de 2021, 16:11

Buenas tardes!!!

Esperamos que estas primeras semanas hayan sido muy buenas. 😊

Hoy les queremos proponer un juego, que algunas/os tal vez conocen. El mismo va a consistir en que semanalmente publiquemos, en este foro, una de las preguntas/ejercicios que tienen que hacer (o que ya han hecho) perteneciente a las guías semanales. Para participar tienen que compartir su resolución, éstas se aceptan desde hoy hasta el viernes a las 15hs y ese mismo día se realizará un sorteo para ver cuál de las personas que participen gana el premio.

El premio va a ser una impresión 3D, cada ganador/a va a poder elegir qué imprimir y más adelante nos vamos a organizar para que puedan ir a imprimirlo personalmente.

A continuación se presenta la actividad que deberá ser publicada para participar del mismo. **Recuerden que la respuesta será considerada válida si la misma es de producción propia (sólo se aceptan resoluciones manuscritas) y que busquen dar respuesta a la actividad presentada. NUNCA se va a evaluar si la resolución/respuesta es la correcta, SÓLO que persiga responder a la consigna**. ***La actividad propuesta para esta semana es:***

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales es una Ecuación Diferencial Logística?

(a) $y' = 2y(1 - y^2)$

(b) $y' = 2y(1 - y/3)$

(c) $y' = 2y(1 - t/4)$

(d) $y' = 2y(1 - 3y)$

2. ¿La Ecuación Logística es una ecuación diferencial lineal?

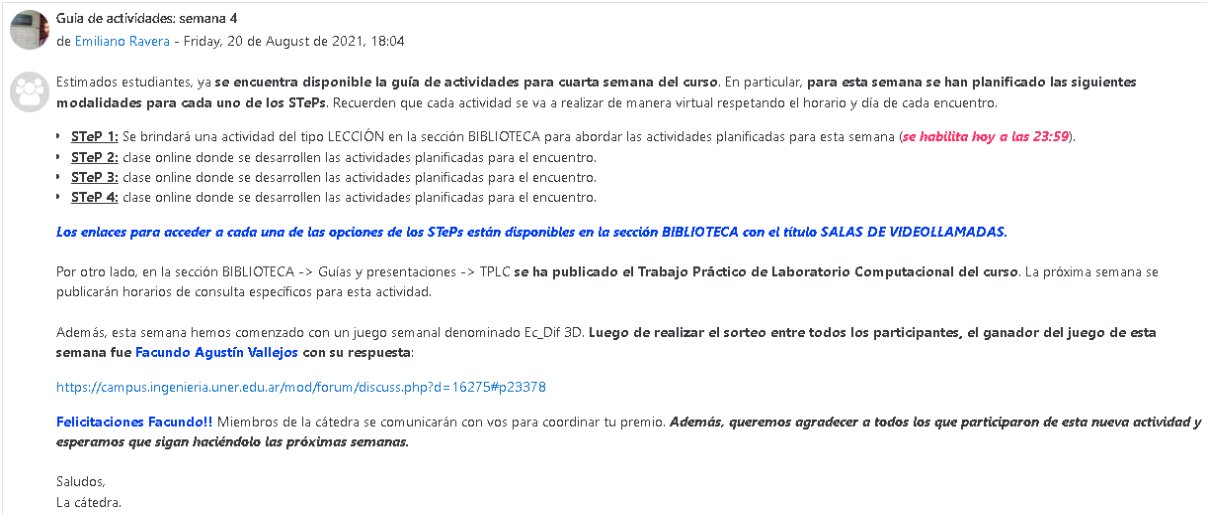
3. ¿La Ecuación Logística es separable?

[Para que la respuesta sea considerada válida debe estar justificada su resolución]

Ojalá les guste la idea!!!

Saludos!! 😊

Fig. 1: Ejemplo del enunciado de una edición del juego *Ec_Dif 3D*. En el mismo se les propone a los alumnos resolver un problema relacionado a los conceptos dictados durante esa semana de cursado.


Guía de actividades: semana 4
de Emiliano Ravera - Friday, 20 de August de 2021, 18:04

Estimados estudiantes, ya **se encuentra disponible la guía de actividades para cuarta semana del curso**. En particular, **para esta semana se han planificado las siguientes modalidades para cada uno de los STePs**. Recuerden que cada actividad se va a realizar de manera virtual respetando el horario y día de cada encuentro.

- **STeP 1:** Se brindará una actividad del tipo LECCIÓN en la sección BIBLIOTECA para abordar las actividades planificadas para esta semana (***se habilita hoy a las 23:59***).
- **STeP 2:** clase online donde se desarrollen las actividades planificadas para el encuentro.
- **STeP 3:** clase online donde se desarrollen las actividades planificadas para el encuentro.
- **STeP 4:** clase online donde se desarrollen las actividades planificadas para el encuentro.

Los enlaces para acceder a cada una de las opciones de los STePs están disponibles en la sección BIBLIOTECA con el título SALAS DE VIDEOLLAMADAS.

Por otro lado, en la sección BIBLIOTECA -> Guías y presentaciones -> TPLC **se ha publicado el Trabajo Práctico de Laboratorio Computacional del curso**. La próxima semana se publicarán horarios de consulta específicos para esta actividad.

Además, esta semana hemos comenzado con un juego semanal denominado Ec_Dif 3D. **Luego de realizar el sorteo entre todos los participantes, el ganador del juego de esta semana fue Facundo Agustín Vallejos con su respuesta**:

https://campus.ingenieria.uner.edu.ar/mod/forum/discuss.php?d=16275#p23378

Felicitaciones Facundo!! Miembros de la cátedra se comunicarán con vos para coordinar tu premio. ***Además, queremos agradecer a todos los que participaron de esta nueva actividad y esperamos que sigan haciéndolo las próximas semanas.***

Saludos,
La cátedra.

Fig. 2. Ejemplo de la devolución semanal en una edición del juego *Ec_Dif 3D*.

3 Análisis de la propuesta didáctica

Una encuesta (rápida) anónima se llevó a cabo para evaluar el impacto de la propuesta en los estudiantes del curso. En la misma, al finalizar el dictado de los cursos, se les realizó a los estudiantes (divididos en dos grupos) la siguiente pregunta de opciones múltiples:

"Durante el cursado se han propuesto diferentes juegos, ¿cómo te resultó esta estrategia? (puede seleccionar más de una opción)"

La opciones brindadas fueron:

- Te motivaron a revisar los temas y aplicar los conceptos dados.
- No te resultaron interesantes.
- Te ayudaron a aclarar conceptos.
- Te invitaron a acercarse a los temas dados en clase desde un lugar diferente.
- Otro.

Los estudiantes fueron clasificados en dos grupos, estudiantes que ganaron el juego semanal y el resto de los estudiantes que pueden o no haber participado de los juegos semanales.

4 Resultados de la experiencia

Un espacio didáctico enmarcado en un juego semanal fue llevado adelante en los cursos virtuales de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la FIUNER. Este juego propició un ambiente de intercambio e interacción estudiantes-docente seguro y cuidado con el objetivo de detectar de manera temprana posibles errores en la interpretación o desarrollo de problemas simples matemáticos. Un ejemplo de la interacción que se generaba semanalmente se presenta en la Fig. 3. Se muestra aquí cómo, en base a la resolución propuesta por los alumnos, el docente era capaz de reconocer de manera temprana posibles fuentes de error y fallas conceptuales. Además, se destaca que los alumnos también aprovecharon este espacio para realizar consultas con el objetivo de profundizar sus conocimientos y mejorar la comprensión de los conceptos abordados.

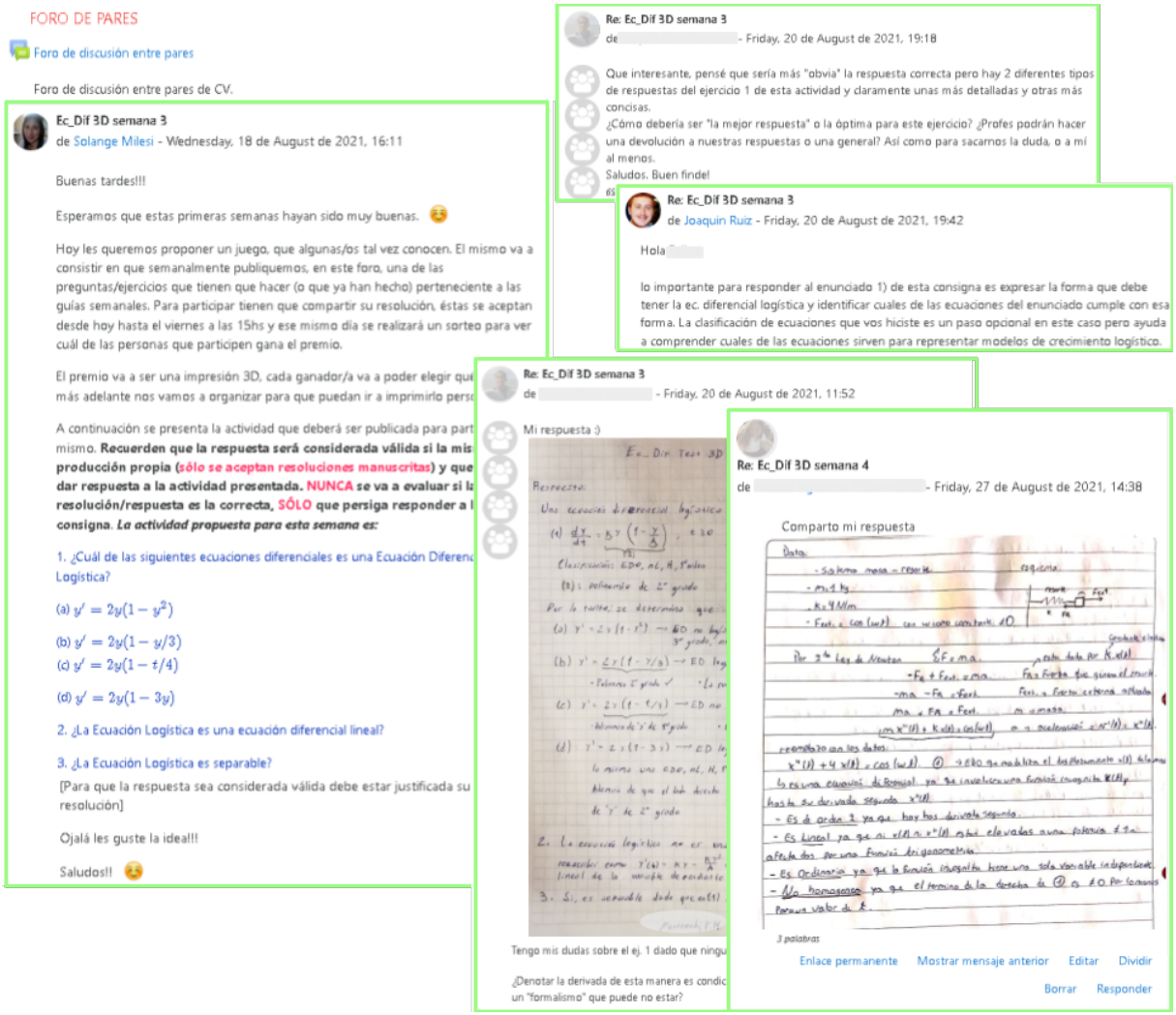


Fig 3: Resultados de la actividad. Se muestran el enunciado del juego, las producciones de los alumnos y la realimentación de los docentes.

Como se mencionó anteriormente, con el objeto de motivar la participación de los estudiantes, el ganador semanal tenía la posibilidad de elegir e imprimir un objeto utilizando las impresoras 3D de la cátedra. Al principio, las impresiones eran realizadas por el equipo docente y los objetos eran entregados a los ganadores del juego. Sin embargo, durante el segundo cuatrimestre del 2021, dada la relajación en las medidas de aislamiento social, surgió la posibilidad de que los estudiantes concurrieran presencialmente a la Facultad para realizar las impresiones 3D ellos mismos. Durante la experiencia, se les enseñaron algunos aspectos básicos en el uso de impresoras 3D y del software de diseño *Repetier*. Está actividad les permitió participar activamente de las diferentes etapas del proceso de impresión 3D. En la Fig. 4 se muestran algunas fotos de esta experiencia y los objetos impresos por los estudiantes.

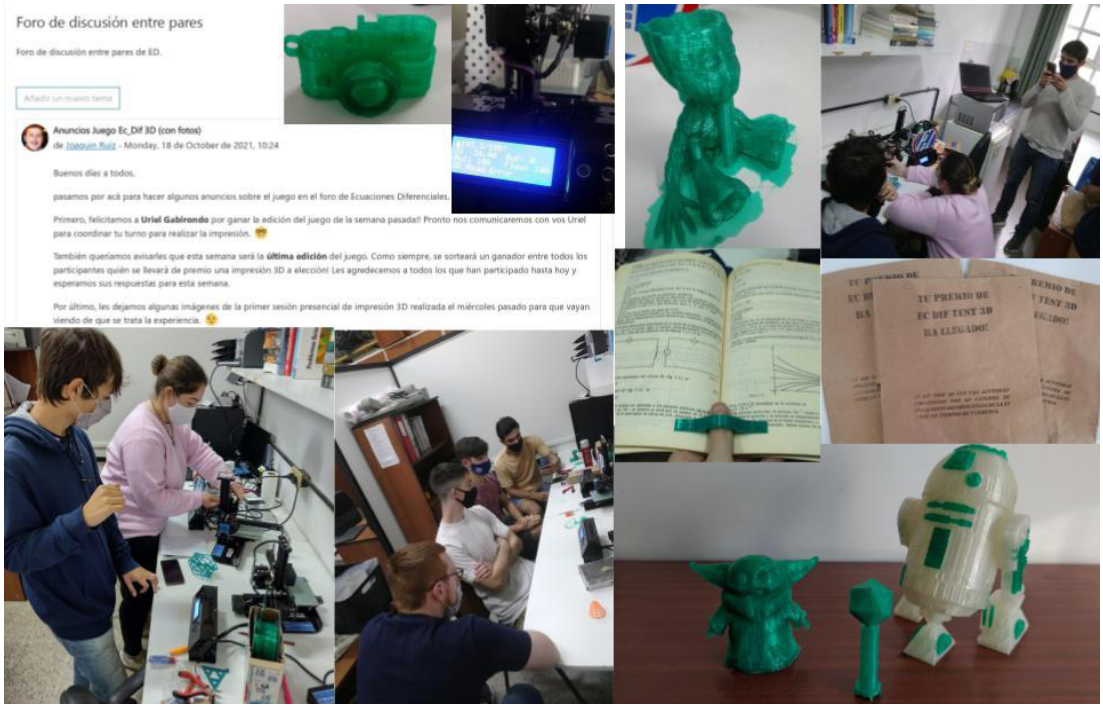


Fig. 4. Imágenes de la experiencia de impresión 3D llevada a cabo por los estudiantes. Se muestran además algunos de los objetos impresos durante la misma.

Cuando se les consultó a los estudiantes sobre la experiencia realizada, la mayoría valoró positivamente la propuesta destacando que esta actividad representó una forma diferente de estudiar los contenidos en la virtualidad, como se muestra en la Fig. 5.

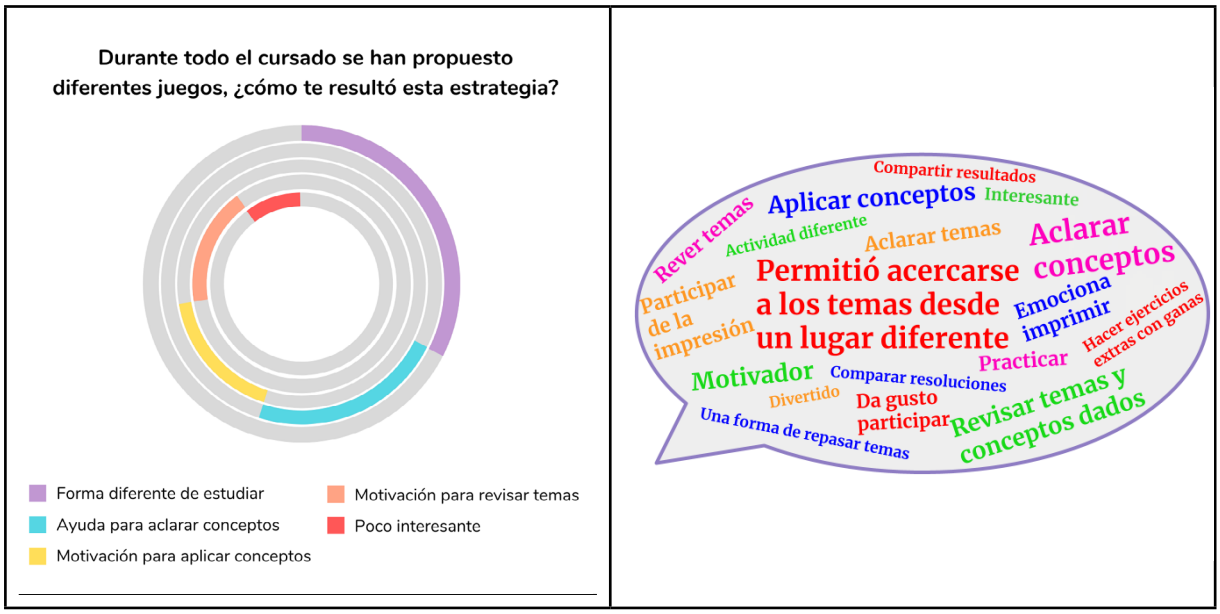


Fig. 5. Resultados de la encuesta realizada a los estudiantes. Izquierda: respuestas de todos los estudiantes del curso. Derecha: respuestas de los ganadores del juego. En términos generales todos los estudiantes valoraron la experiencia motivadora y que les permitió abordar los temas de las asignaturas desde otra perspectiva.

5 Conclusiones y trabajos futuros

A partir de esta experiencia, se ha generado un juego semanal que ha permitido motivar a los estudiantes a compartir sus desarrollos, dudas y consultas con sus compañeros en el dictado virtual de los cursos de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. Según la opinión de nuestros estudiantes, la experiencia fue muy enriquecedora para ellos dando un espacio para "aclarar temas"/"aclarar conceptos" y "compartir resultados" de manera temprana y "hacer ejercicios extras con ganas" para "revisar temas y conceptos dados" durante el cursado. Además, según su opinión, haber incluído la impresora 3D en el contexto del juego resultó "motivador" y "divertido" dado que "emociona imprimir" y "participar de la impresión" por lo que "da gusto participar" del juego.

Como trabajo a futuro, debido a la repercusión de esta actividad mostrada por nuestros estudiantes, se espera continuar con la realización de los juegos en el dictado de las asignaturas ahora de manera presencial.

Agradecimientos. Los autores quieren agradecer a todo el equipo de cátedra por su participación y colaboración en el desarrollo de la actividad presentada en este trabajo.

Referencias

1. Morales-Rovalino, V. F.; Córdova-Borja, F. G.; Segovia-Chávez, J. P.: Modelado y TICs en la Enseñanza de Ciencias y Matemática. Dominio de las Ciencias, 7(1) (2021).
2. Pepin, B.; Biehler, R.; Gueudet, G.: Mathematics in Engineering Education: A Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7(2), pp. 163-188 (2021). https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8
3. STEAM Education Program Description. (2015). www.steamedu.com
4. Carrere L. C., Milesi S., Ruíz J., Lapyckyj I., Escher L., Miyara A., Pita G., Ravera E. P.: La impresión 3D para la enseñanza de la Matemática en bioingeniería: la construcción del modelo y su materialización. *XXII Congreso Argentino de Bioingeniería y XI Jornada de Ingeniería Clínica* (2020).
5. Carrere L. C.; Lapyckyj I; Escher L.; Ravera E. P.: La impresión 3D para la enseñanza de matemática para bioingenieros: una herramienta para la modelización y práctica experimental. *VIII Jornada de Enseñanza de la Ingeniería* (2021).
6. Zichermann, G.; Cunningham, C.: Gamification by design: Implementing game mechanics in web and mobile apps. *Canada: O'Reilly Media* (2011).
7. Kapp, K.: The Gamification of Learning and Instruction. Game-based methods and Strategies for Training and Education. *Pfieer* (2012).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Implementación de evaluaciones individuales virtuales en un curso presencial de Cálculo Vectorial: lo que la pandemia nos dejó

Carolina Carrere[1, 2], Iván Lapyckyj[1], Gustavo de Dios Pita[1], Emiliano P. Ravera[1]
[1]Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos.
[2]Grupo de Investigación y Desarrollo de la Enseñanza en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos.
{carolina.carrere, ivan.lapyckyj, gustavo.pita, emiliano.ravera}@uner.edu.ar

Resumen Las transformaciones que impactaron en la Educación como consecuencia de la pandemia expusieron una transición profunda entre las prácticas áulicas que históricamente se conocían y el nuevo escenario al que hubo que dar respuesta inmediata y eficaz. Pasado el período que obligó a trabajar por plataformas digitales, se hace necesario referenciar lo experimentado por docentes y estudiantes como una forma de capitalizar el trabajo realizado para que, una vez restaurada la presencialidad, se hagan visibles en el aula revisiones sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje, puntualizando los cambios que se dieron para las instancias de evaluación. Es sabido que la situación vivida nos modificó; este trabajo relata la trascendencia de la experiencia desarrollada en la asignatura Cálculo Vectorial, con un enfoque positivo y con sentido de beneficio, superando la coyuntura y proyectando su aplicación en los futuros cursos.

Palabras Clave: Evaluación, Enseñanza, Formación tecnológica.

1 Introducción

Las evaluaciones en sede universitaria no solo hablan del esfuerzo y mérito del estudiante, sino que deben acreditar su competencia profesional en el ámbito al que la evaluación aluda [1], por lo que un aspecto esencial a considerar para mejorar la formación de los futuros ingenieros, es la evaluación de los aprendizajes durante su carrera académica.

Es bien sabido que los sistemas o métodos de evaluación implementados por los docentes influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes [2], [3], [4] debido a que estas inciden en las estrategias de aprendizaje que los alumnos despliegan y en los contenidos que aprenden [5]. De esta manera, la evaluación puede promover en el estudiante un enfoque profundo o superficial del estudio. Así, las evaluaciones con un enfoque profundo buscará integrar aspectos teóricos y prácticos del curso tratando de establecer relaciones y construir significados mientras que las evaluaciones con un enfoque superficial en general sólo seleccionará fragmentos de información que tratará de reproducir en los exámenes y pasar el curso. En el contexto de la disciplina Matemática las evaluaciones tradicionales sólo dan cuenta de los logros y errores cometidos por los estudiantes con poca información de lo que acontece en el proceso de aprendizaje. Además, en muy pocas ocasiones tienen la habilidad de evaluar destrezas de los estudiantes en el uso de software matemático o identificación de fallas en una resolución propuesta, aspectos importantes para la formación de estudiantes con competencias técnicas específicas como el uso de tecnologías y pensamiento crítico.

Por otro lado, la situación especial vivida entre los años 2020 y 2021 afectó de manera decisiva la forma de con-

cebir la enseñanza, el aprendizaje y las instancias de evaluación. Más allá de revisiones, renovaciones y cambios de paradigmas que derivan de la evolución y los cambios periódicos en Educación, la circunstancia de pandemia llevó a replantear las estrategias de acción educativa, los roles del docente y del estudiante, y las rutinas clásicas afincadas en nuestro trabajo, en un contexto intervenido por la incorporación de tecnología, software específico y plataformas digitales educativas. La pandemia global de Coronavirus dejó consecuencias en Educación las cuales, sin profundizar en cuestiones extremas, hicieron que las actividades propias de la profesión docente tuviesen que replantearse utilizando recursos que, si bien estaban disponibles, no eran utilizados masivamente.

Este nuevo año académico, con el retorno a una nueva normalidad con actividades presenciales en su totalidad, los docentes del curso de Cálculo Vectorial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos (FI-UNER) nos planteamos los siguientes interrogantes: ¿cuál/es actividad/es diseñadas y desarrolladas en la modalidad del curso son factibles de trasladar al curso presencial de forma tal que tengan un efecto positivo en la formación de nuestros estudiantes?, ¿qué aspectos del proceso de evaluación desarrollado en pandemia puede ser trasladado al curso presencial? y ¿cómo implementamos un proceso de evaluación dentro de una plataforma digital educativa en un curso presencial?

De esta manera y en busqueda dar respuesta a estas preguntas, en este trabajo se relatan las vivencias experimentadas en durante los años lectivos mencionados, la reformulación de actividades y la modificación de tradiciones, y cómo logramos trasladar la experiencia en el momento de regresar a la presencialidad considerando, desde lo académico y con un enfoque optimista, *lo que la pandemia nos dejó*.

El desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Universidad suelen ser sometidos a instancias de revisión, de manera tal que se den situaciones superadoras en lo que atañe a la renovación y actualización de estrategias y contenidos. Coincidiendo con Carlino [6] “podemos afirmar que “la práctica docente –como cualquier otra práctica profesional-, si se convierte en rutinaria, pierde su capacidad productiva. El buen docente es el que continúa aprendiendo, no sólo sobre los temas que enseña, sino sobre la propia forma de enseñar”.

2 Descripción de la situación pre pandemia: evaluación presencial

Cálculo Vectorial es una asignatura cuyos contenidos versan sobre funciones reales de varias variables reales y el análisis vectorial, ubicada en el tercer semestre del plan de estudios. En el marco del proceso de formación continua del estudiante se encuentran planificadas actividades tanto de evaluación formativa como sumativa, siendo estas parámetros que asisten a determinar la condición final de cursado del estudiante en la asignatura. Las instancias de evaluación sumativa que tenían lugar antes de marzo de 2020 consistían en dos exámenes individuales y presenciales escritos.

Se proveía a cada estudiante de un cuadernillo compuesto por carátula y cuatro actividades del mismo tipo: situaciones problemáticas para resolver durante un lapso de 3 horas. Se disponía de tablas de derivadas, integrales e identidades trigonométricas, sin posibilidad de uso de software y calculadora. Como en cualquier examen tradicional, se contaba con la posibilidad de realizar consultas al equipo docente respecto a los enunciados. Cada uno de estos exámenes individuales eran calificados con un puntaje de 0 a 100, y contaban con su respectiva instancia de recuperación, permitiendo recuperar todos estos exámenes manteniéndose siempre la mayor calificación obtenida entre la instancia original y la de recuperación en caso de haber optado utilizar la misma. Además existía una instancia de realimentación que comprendía la devolución de las evaluaciones parciales en un encuentro áulico donde los estudiantes podían relevar aciertos y errores en su producción escrita a través de las correcciones realizadas en estas, con la posibilidad de consultar directamente a los docentes que participaron en la corrección.

3 Descripción de la situación en pandemia: evaluación virtual

Ante el escenario que impuso la ola mundial de COVID-19, fue necesario y urgente una recomposición de todas

las formas de trabajo que veníamos utilizando. Hubo que reformular el dictado de clases, pasando de un contacto directo entre docente y estudiante a encuentros establecidos en el ámbito de una plataforma digital, mediados a través de una conexión por Internet. Esto llevó a una situación de crisis del contrato pedagógico vigente, con la evaluación como mayor punto de reflexión y reconversión. En poco tiempo, en un ámbito de trabajo colaborativo y sobrellevando momentos de incertidumbre, las normativas tuvieron que cambiar sin perder calidad académica y con el objetivo de obtener una experiencia que trascienda la coyuntura que se estaba viviendo. Si bien durante el año 2020 y 2021 se mantuvieron los exámenes individuales en su cantidad, división de unidades temáticas abordadas, puntaje de 0 a 100 y posibilidades respecto a acceso a las instancias recuperatorias, estos sufrieron diversos cambios en varios aspectos.

Es por eso que se planteó el uso de la plataforma Moodle para llevar a cabo las evaluaciones. Se diagramó en consecuencia un examen individual virtual para desarrollar en dos horas, con actividades de acceso secuencial con las siguientes variantes presentadas en enunciados aleatorios:

- Proposiciones que refieren a definiciones, propiedades, teoremas, para determinar su valor de verdad, en formato de Opciones múltiples y Verdadero/Falso.
- Gráficas de funciones, curvas de nivel, regiones para su interpretación.
- Procedimientos en los que se requiere dar la debida justificación a la secuencia presentada.
- Desarrollos en los que se deben identificar errores en una resolución planteada.
- Enunciados de situaciones problemáticas a resolver mediante realización de cálculos, en una producción escrita individual, con entrega en formato digital.

Para cada tipo de actividad se fijó una duración limitada y diferente, que iniciaba a partir del momento que el alumno daba comienzo a las mismas. Para las consultas y resolución de inconvenientes de diversa índole se utilizó la herramienta de chat embebido disponible en la plataforma Moodle como vía de comunicación con el equipo docente.

En cuanto a fuentes de información y referencia, se permitió la libre utilización de software, material bibliográfico y anotaciones propias. En ese sentido, no se requirió el uso de cámaras, por respeto a la intimidad de cada estudiante y también por presumir de una honestidad académica que si bien hubieron casos en los que no fue respetada, los resultados obtenidos permitieron deducir que no hubo influencia en lo académico, con buena aceptación en lo humano y social, aspectos muy sensibles en el contexto de la pandemia. En caso de detectarse casos en los que no fue respetada la honestidad académica mediante la identificación de resoluciones idénticas presentadas por diferentes estudiantes, se procedió a anular esa parte del examen para todos los estudiantes que se encontraban en esta situación. Además, no se requirió el uso de cámaras para avalar la identidad de nuestros estudiantes porque se utilizó el material manuscrito que nuestros estudiantes entregaban quincenalmente en el marco de otras actividades desarrolladas en el curso para validar la identidad mediante su caligrafía.

Respecto a la instancia de realimentación que comprendía la devolución del examen individual, tomó diferentes formas en función del tipo de actividad. El acceso para la consulta de devoluciones en la plataforma digital se habilitó durante un período luego de ser informados los puntajes obtenidos en el examen.

Para las actividades de preguntas de opción múltiple y verdadero/falso, interpretación gráfica y justificación de procedimientos se implementó la realimentación diferida y automática en el espacio de las tareas en la plataforma Moodle. En caso de tener consultas o dudas al respecto, estas debían ser realizadas enviando un correo electrónico indicando la actividad en cuestión, recibiendo una respuesta por parte del equipo docente.

Para la actividad de preguntas de realización de cálculos se dispuso el acceso a la producción escrita individual digitalizada en formato de archivo .pdf con anotaciones realizadas por el equipo docente. Las consultas de esta actividad o de las anotaciones, podían ser abordadas durante un encuentro virtual sincrónico mediante la plataforma Google Meet con la participación de los docentes que realizaron la corrección.

3.1 Opinión de los estudiantes

Como el proceso de evaluación formativa es aquella que abarca todas las actividades llevadas a cabo por los docentes y/o por sus estudiantes, las cuales dependen de la provisión de una retroalimentación efectiva a los estudiantes y la participación activa de los mismos en el propio proceso de aprendizaje, durante el cursado virtual se les realizó una encuesta a los estudiantes para conocer su opinión respecto las instancias de evaluación implementadas durante este período. Asimismo se les consultó su opinión sobre el uso de esta herramienta desarrollada en un curso presencial. Los resultados de esta encuesta se muestran en la Fig. 1.

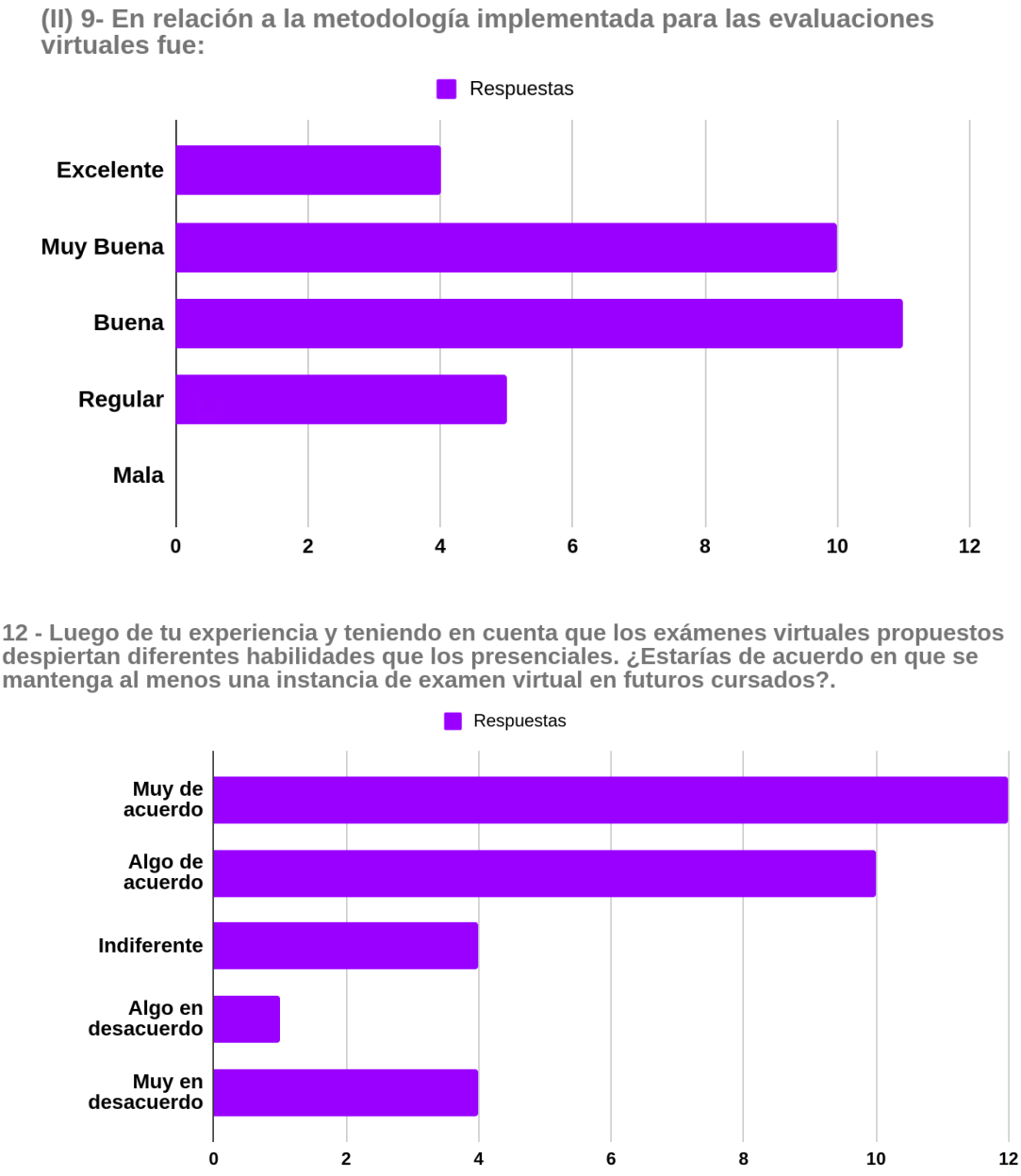


Fig. 1. Encuesta a estudiantes del curso virtual 2020.

Se observa que la gran mayoría de los estudiantes encuestados está de acuerdo con la implementación de exámenes digitales durante su formación en un curso presencial, valorando a la propuesta como positiva y muy adecuada.

4 Implementación de una evaluación digital en el curso presencial

Con el regreso a la presencialidad plena en el año 2022, y teniendo en cuenta la opinión de nuestros estudiantes y la experiencia ganada durante el período de pandemia, el equipo docente de Cálculo Vectorial decidió mantener en el primer cuatrimestre del 2022 al primer examen individual en una modalidad similar a la descrita en la sección 3, pero sin mantener el carácter remoto. Por las características propias de la asignatura, la primera evaluación de

Cálculo Vectorial tiene la impronta de un “cuasi rito iniciático académico”, en el cual los estudiantes deben dar cuenta de sus competencias en el uso del lenguaje matemático, con expresiones en las que se evidencie formalidad y justificaciones de las resoluciones de los indicadores de desempeño planteados.

En particular se optó por introducir la modalidad comentada en el primer examen del curso para aminorar el impacto en los estudiantes, como una transición ordenada entre los dos años de actividades virtuales y el regreso al aula de manera efectiva y presencial.

Se presentó a los alumnos una variante de evaluación en la cual desarrollaron el primer examen individual en la plataforma Moodle en forma presencial, utilizando las computadoras disponibles en los Laboratorios de Computación de la FI-UNER. Para evitar posibles distracciones y actos de deshonestidad académica, se fabricaron separadores plásticos para conformar puestos teniendo cada alumno un puesto similar a un cubículo con su computadora con interrupción de contacto visual con sus compañeros. Imágenes de la primera experiencia del desarrollo de una evaluación digital en el curso presencial realizada en el curso de Cálculo Vectorial se presenta en la Fig. 2.

Fig. 2. Imágenes de la experiencia realizada. Se construyeron separadores individuales para generar un espacio privado en cada puesto de trabajo dentro uno de los Laboratorios de Computación de la FI-UNER. Cada puesto cuenta con una computadora con acceso a Internet y software matemático y un cuadernillo para la realización de la evaluación.

El acceso a los enunciados de las actividades correspondientes a preguntas de realización de cálculo en situaciones problemáticas se mantuvo a través de la plataforma Moodle. La entrega de la producción escrita individual de la resolución de este tipo de actividad fue realizada en formato físico sin necesidad de digitalizarla.

Se mantuvieron las instancias de realimentación con idéntica modalidad en pandemia para las actividades de preguntas de opción múltiple y verdadero/falso, interpretación gráfica y justificación de procedimientos. Para la actividad de preguntas de realización de cálculos, se retomó la devolución durante un encuentro aúlico donde los alumnos podían relevar aciertos y errores en su producción escrita física a través de las anotaciones realizadas en estas, pudiendo consultar en forma directa a los docentes que participaron en la corrección.

Las modificaciones correspondientes al primer examen individual, y sus diferencias con la misma instancia en el 2019, 2020-2021 y 2022 están condensados en la tabla comparativa Tabla 1.

Tabla 1. Comparativa de aspectos relativos a la instancia de evaluación del primer examen individual para las cohortes 2019 (pre-pandemia), 2020 y 2021 (pandemia) y 2022 (post pandemia).

1er Examen Individual Cálculo Vectorial.			
Aspectos	**2019**	**2020 y 2021**	**2022**
Modalidad	Examen individual presencial en formato papel, con carátula, enunciados e instructivo incorporado con acceso irrestricto a todos los enunciados de las actividades.	Examen individual virtual remoto como tareas en la plataforma Moodle, con un instructivo para realización disponible para su descarga en formato .pdf, donde el acceso a cada una de las actividades es secuencial y con tiempo limitado y diferente que inicia al ingresar.	Examen individual presencial como tareas en la plataforma Moodle, con un instructivo para realización disponible para su descarga en formato .pdf, donde el acceso a cada una de las actividades es secuencial y con tiempo limitado y diferente que inicia al ingresar a las mismas.
Actividades	Cuatro enunciados de situaciones problemáticas a resolver en lápiz y papel	Cinco tipos con enunciados aleatorios de preguntas de: ● Opción múltiple o verdadero y falso. ● Interpretación gráfica. ● Justificación de procedimientos. ● Identificación de errores en una resolución. ● Realización de cálculos en situaciones problemáticas a resolver y entregar como una producción escrita digitalizada.	Cinco tipos con enunciados aleatorios de preguntas de: ● Opción múltiple o verdadero y falso. ● Interpretación gráfica. ● Justificación de procedimientos. ● Identificación de errores en una resolución. ● Realización de cálculos en situaciones problemáticas a resolver y entregar como una producción escrita física.
Duración	3 horas	2 horas	3 horas
Material	Tabla impresa de derivadas, integrales e identidades trigonométricas. Sin posibilidad de uso de software.	Utilización irrestricta de software, material bibliográfico y anotaciones propias.	Tabla impresa de derivadas, integrales e identidades trigonométricas, con posibilidad de uso de software en PC de laboratorio.
Consultas	Posibilidad de realizar consultas al equipo docente respecto a los enunciados.	Utilización de herramienta de chat embebido en la plataforma Moodle como vía de comunicación con el equipo docente tanto para consultas como resolución de inconvenientes.	Posibilidad de realizar consultas al equipo docente respecto a los enunciados.
Devolución	Encuentro áulico con docentes que participaron de la corrección.	Realimentación automática y diferida con posibilidad de consulta mediante correo electrónico. En actividades de preguntas de realización de cálculos, acceso a archivo de producción escrita de alumno con anotaciones de docente, con posibilidad de consulta mediante encuentro sincrónico en Google Meet con docentes.	Realimentación automática y diferida con posibilidad de consulta mediante correo electrónico. En actividades de preguntas de realización de cálculos, encuentro áulico con docentes que participaron de la corrección.

Finalmente, en la Fig. 3 se presenta la distribución de las calificaciones logradas por los estudiantes en el primer exámen individual de Cálculo Vectorial durante los dos años previos a la pandemia del COVID-19, los dos años de pandemia y este año post pandemia. En esta distribución se observa cómo la pandemia afectó el desempeño de nuestros estudiantes los cuales se vieron influenciados por el cambio abrupto a la virtualidad.

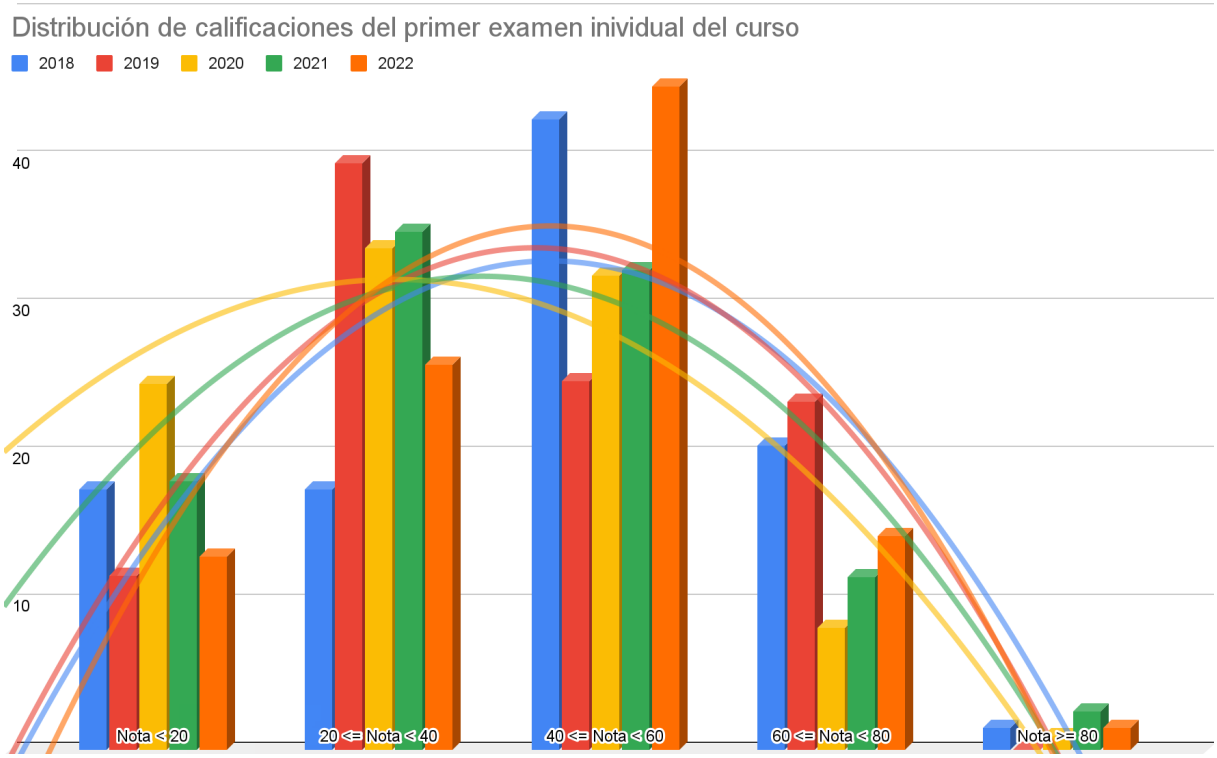


Fig. 3. Comparativa de las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Cálculo Vectorial en el primer examen del curso durante los períodos pre pandemia (años 2018 y 2019), pandemia (años 2020 y 2021) y post pandemia (año 2022). Esta calificación no incluye las obtenidas por los estudiantes en la instancia recuperatoria. Las líneas llenas representan la tendencia porcentual estimada mediante una aproximación polinómica de segundo orden.

Por otro lado, vemos que la experiencia realizada muestra una tendencia superadora (en términos del desempeño de los estudiantes) brindando una experiencia menos traumática en el primer examen de nuestros estudiantes. Cabe destacar que estos resultados deben tomarse con cautela dado que es sólo una cohorte la que ha tenido esta experiencia, aunque lo logrado es alentador, dando una base pedagógica y académica para continuar con esta modalidad.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Sin olvidar las complicaciones vividas, hemos considerado al desarrollo de esta actividad como una consecuencia positiva de lo que la pandemia nos impuso. Esta primera experiencia ha sido una transición para que el contexto académico que habíamos transitado durante dos años diera un beneficio y que lo trabajado por parte de los docentes resultara accesible y favorable a los estudiantes, especialmente por tratarse del primer examen del curso.

Lo vivido en la pandemia puso en tensión lo que teníamos como costumbres de largo arraigo en Educación, con cuestionamientos muy profundos al accionar docente y estudiantil, y cómo íbamos a salir de esa situación límite. Pero si parecía que estábamos en el fondo de un pozo, como ha cantado Serrat, de aquí en adelante sólo cabe ir mejorando.

Dado que los contenidos de la asignatura Cálculo Vectorial constituyen un fundamento matemático de alto

impacto y considerando que el uso de recursos informáticos en 2020 y 2021 se había establecido como habitual, entendimos que estaban dadas las condiciones, al momento del retorno a la presencialidad, para la evaluación en un curso de Matemática aplicada a la Ingeniería con utilización de software específico. Resultados alentadores, buenos desempeños en las producciones y por sobre todo el aval expresado por los estudiantes, nos impulsan a proyectar un plan futuro, que contemple continuar con la metodología, introduciendo actividades de desarrollo íntegro con software. Una planificación que atienda los requerimientos de la Ingeniería actual, las competencias que se requieren para la profesión, y que exprese la superación académica de esa instancia impensada que nos tocó vivir.

Referencias

1. Zabalza, Miguel A.: El Desafío de Evaluar por Competencias en la Universidad. Reflexiones y Experiencias Prácticas. Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 2019, 12(2), 29-47. https://doi.org/10.15366/riee2019.12.2.002
2. Biggs, J. y Tang, C.: Teaching for quality learning at university: What the student does. *McGraw-Hill Education (UK)*, (2011).
3. Brown, S. A. y Glasner, A. : Evaluar en la universidad: problemas y nuevos enfoques. *Narcea Ediciones*, (2003).
4. Hassan, O. A.: Learning theories and assessment methodologies: an engineering educational perspective. *European Journal of Engineering Education*, 36(4), pp. 327-339 (2011). https://doi.org/10.1080/03043797.2011.591486
5. Carrere, L. C. , Miyara, A., Ravera, E., Escher, L. , Lapyckyj, I., Pita, G. y Añino, M. M.: Descubriendo el enfoque formativo de la evaluación en un Curso de Matemáticas para estudiantes de Bioingeniería. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 15(1), pp. 325-343 (2017). https://doi.org/10.4995/redu.2017.6334
6. Carlino, P.: Escribir, leer y aprender en la Universidad. Una introducción a la alfabetización académica. *Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica* (2005).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Adaptación de un curso de matemáticas presencial a la virtualidad: desafíos y soluciones en el contexto de la pandemia

Carolina Carrere[1, 2], Leandro Escher[1], Alberto Miyara[1, 3], Emiliano P. Ravera[1]
[1]Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos.
[2]Grupo de Investigación y Desarrollo de la Enseñanza en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta prov 11 km 10 Oro Verde, Paraná, Entre Ríos.
[3]Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Santa Fe.
{carolina.carrere, leandro.escher, alberto.miyara, emiliano.ravera}@uner.edu.ar

Resumen. La pandemia del coronavirus (COVID-19) mostró la necesidad de transformar las prácticas de enseñanza para continuar promoviendo el aprendizaje en nuestros alumnos. En el curso de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, la pandemia llevó a la profundización y ampliación del uso de tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se describen los desafíos encontrados en el pasaje a la virtualidad y las soluciones diseñadas e implementadas para afrontarlos. Se adaptaron las actividades planificadas de las asignaturas sosteniendo el aspecto formativo de la evaluación y el objetivo de promover el desarrollo de competencias vinculadas al trabajo en equipo, pensamiento crítico y resolución de problemas. La experiencia fue transformadora de la práctica de los docentes y valorada positivamente por los estudiantes.

Palabras Clave: Prácticas de enseñanza universitaria, Evaluación formativa, Experiencias docentes.

1 Introducción

En Argentina, la pandemia del coronavirus (COVID-19) afectó el normal funcionamiento de las instituciones de educación superior, que debieron suspender temporalmente sus actividades presenciales [1]. Las universidades asumieron el compromiso de aportar respuestas y soluciones a los desafíos impuestos por este fenómeno en función de sus recursos, experiencias, trayectorias y campos de estudio.

En relación al proceso de enseñanza, las universidades diseñaron e implementaron diferentes modalidades para sostenimiento del trabajo, construyeron diversas propuestas de continuidad pedagógica para sus estudiantes y de formación para sus docentes [2]. Es así, que la pandemia resultó ser un punto de inflexión que mostró la necesidad de transformar nuestras prácticas de enseñanza para continuar promoviendo el aprendizaje en nuestros alumnos [3].

En nuestro curso de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ingeniería de la UNER, la pandemia nos llevó a la profundización y ampliación del uso de nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Asimismo representó un momento de mucha incertidumbre, que despertó nuevos interrogantes:

En el contexto de no presencialidad ¿cómo enseñar Matemática sin dejar de promover el desarrollo de competencias? ¿qué recursos didácticos son necesarios? ¿cómo promover la participación de los estudiantes? ¿qué espacios de observación permiten detectar errores y dificultades? ¿Es posible evaluar matemática de manera virtual?

En la búsqueda de respuestas, encontramos la oportunidad para reinventarnos y construir nuevas estrategias que

facilitaran el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo, desde nuestro rol docente, relatamos cómo fue nuestro descubrimiento de nuevas estrategias para enseñar en tiempos de pandemia, describiendo los desafíos que encontramos en el pasaje a la virtualidad y las soluciones que diseñamos e implementamos para afrontarlos.

2 Descripción del curso Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales antes de la pandemia

La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos es una institución educativa perteneciente al sistema universitario público de Argentina, creada en 1984. Como políticas académicas la Facultad propone formar profesionales con una sólida preparación científica, ética y con vocación de servicio social. En la actualidad la Facultad cuenta con tres carreras de grado: Bioingeniería, Licenciatura en Bioinformática, Ingeniería en Transporte. La Bioingeniería y la Bioinformática fusionan los principios y herramientas de la ingeniería, la tecnología, la informática y las ciencias de la vida para promover el descubrimiento científico y el desarrollo de nuevas tecnologías y terapias biomédicas mediante la investigación y la educación. Mientras que, la Ingeniería en Transporte tiene el objetivo de aplicar los principios tecnológicos y científicos para la planificación, diseño, operación y administración de todos los modos de transporte con el fin de proveer un movimiento seguro, conveniente, económico y compatible con el medio ambiente de bienes y personas [4].

Estas carreras tienen en común las asignaturas de Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales, las cuales se encuentran en el segundo año. Hasta el año 2008, estas asignaturas se organizaban en clases de teoría y de práctica con escasa participación de los estudiantes, y la metodología de evaluación se centraba en la implementación de exámenes tradicionales. A partir de una serie de cambios institucionales y en la conformación del equipo docente se plantearon como propósitos de las asignaturas proporcionar los conocimientos necesarios para abordar temáticas específicas de la disciplina y, además, promover en los estudiantes el desarrollo de competencias que les permitan aprender de manera continua y abordar la resolución de problemas con ingenio, creatividad y responsabilidad social.

Para alcanzar estos propósitos se estructuraron diferentes espacios y se organizaron actividades específicas de enseñanza y evaluación, las cuales fueron plasmadas en la planificación de cada asignatura. A continuación se describen las características particulares de la planificación:

- Taller de inicio: consenso y firma de Contrato Didáctico

Este espacio se desarrolla al inicio del curso y en el mismo se acuerdan los criterios de evaluación de resolución de problemas. Los criterios son posteriormente formalizados en un Contrato Didáctico entre los docentes y los estudiantes. Estos criterios son considerados en las diferentes instancias de evaluación y al ser conocidos por los estudiantes previamente pueden aportar a su proceso de estudio y de aprendizaje de las asignaturas [5].

- Clases: Sesiones Teórico-Prácticas (STeP)

Se desarrollan 4 clases semanales de trabajo áulico o de laboratorio de computación. Cada STeP es un espacio orientado a la formación continua mediante la participación activa de los alumnos. En estos espacios los estudiantes utilizan una guía de actividades para organizar su trabajo individual o en grupo, leyendo y discutiendo ejemplos, aplicaciones o demostraciones asignadas y guiadas por el docente responsable con el objetivo de contribuir al desarrollo de las habilidades matemáticas necesarias para un futuro ingeniero favoreciendo su estudio independiente.

En todos los STePs se busca generar un momento de producción intelectual y creativa. Se pretende que el estudiante exprese con precisión y formalidad los procedimientos utilizados, por lo que la propuesta apunta a desarrollar capacidades en el educando que le permitan utilizar términos, conceptos y métodos, justificar y argumentar de forma solvente, deducir e inducir, y comprender todo aquello que lee y escribe.

- Informes Integradores (II) con resolución de problemas

Consisten en un trabajo escrito, cuya función es la de informar, tanto al estudiante como al profesor, cómo se va construyendo el conocimiento en un entorno de resolución de problemas. Este trabajo es grupal, domiciliario y se discute en clase en un debate coordinado por los docentes. El II no se califica con una nota; no se penaliza el error, no se exige que se presente completo y tampoco con el resultado correcto. Se solicita a los estudiantes que realicen el esfuerzo de justificar cada paso de la resolución del problema tratando de establecer conexiones entre los cálculos realizados y los conceptos teóricos o propiedades que los sustentan, y también que intenten expresar las dudas que van surgiendo en este proceso y que no pueden salvar en la discusión grupal previa a la clase.

En el contexto de la clase, los estudiantes comunican oralmente la solución a los problemas de los II, a partir de lo

cual se discute colectivamente. El grupo que expone recibe las opiniones de sus compañeros y también del profesor, quien trata de crear el clima adecuado en el aula para que los errores y confusiones se expresen sin temor. Además, a partir de esta discusión, los estudiantes realizan una autoevaluación confrontando sus propios desarrollos y resultados con las conclusiones del debate, marcando en su trabajo errores, aciertos y aclaraciones. Posterior a la clase el docente revisa la producción de los estudiantes con el fin de detectar dificultades, considerando al error como una oportunidad de aprendizaje, y realizar observaciones a los correcciones realizadas [6][7].

- Trabajo Práctico de Laboratorio Computacional (TPLC)

El TPLC propone la resolución de un problema de solución abierta e incluye actividades de modelización y uso de software matemático. En esta actividad también se propone el trabajo grupal y se incorpora la autoevaluación y coevaluación a través de cuestionarios en la plataforma moodle.

- Exámenes individuales

En cada una de las asignaturas se realizan dos exámenes de carácter individual que consisten en 4 ejercicios teórico-prácticos. En el diseño de los exámenes se tienen en cuenta los criterios acordados con los estudiantes en el contrato didáctico que intentan promover la habilidad para resolver problemas. Para la corrección de los exámenes se utiliza una rúbrica basada en dichos criterios.

3 Desafíos encontrados y soluciones propuestas para enseñar en tiempos de pandemia

Tal como se describió en la sección anterior, las asignaturas Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales se proponen formar en la disciplina y a la vez contribuir al desarrollo de competencias profesionales tales como la habilidad para resolver problemas, comunicación oral y escrita, y el trabajo en equipos. Ante la situación de la pandemia del coronavirus (COVID-19) se nos plantearon diversos desafíos, siendo uno de los más relevantes el de sostener los propósitos planteados en la planificación de las asignaturas en una realidad completamente diferente y nueva. Entonces decidimos mantener las actividades planificadas, incluso los exámenes individuales, realizando los cambios necesarios para implementarlas de forma virtual. Para la solución contemplamos nuestro contexto y el de los estudiantes, el cual presentó realidades socioeconómicas dispares por parte de nuestros estudiantes y un presupuesto limitado para sumar herramientas que aporten al proceso.

En relación al taller de inicio, se propuso la realización de la actividad a través de una sala de reunión principal virtual en la cual se presentaron los aspectos principales del curso y se propuso la actividad de responder al siguiente interrogante "¿Cuál es el procedimiento que siguen al resolver un ejercicio o un problema matemático con lápiz y papel?". Para esto la sala de reunión principal se dividió en sesiones grupales y los estudiantes trabajaron en grupos acompañados por un docente, quien asumió el rol de moderador de las conversaciones. Para facilitar la participación se compartió a los estudiantes una pizarra colaborativa. Luego, las respuestas de cada grupo se compartieron en la sala de reunión principal y se generó una construcción colectiva con el aporte de cada grupo. Posteriormente se presentaron a los estudiantes las etapas de resolución de problemas referenciadas en publicaciones académicas. En ese momento se resaltaron los indicadores que los expertos nos brindan para identificar el cumplimiento adecuado de cada etapa. Se propuso a los alumnos reconocer en el trabajo realizado por ellos la presencia de dichos indicadores, contrastando lo escrito en la pizarra con la opinión experta. A través del diálogo se destacó la utilidad de considerar dichos indicadores y se acordó la aplicación de los mismos como herramientas que nos ayudan a regular y controlar el proceso que estamos realizando al resolver un problema. Se arribó entonces el siguiente acuerdo: los docentes elaboramos los criterios de evaluación a partir de las etapas e indicadores consensuados y los estudiantes los tendrían en cuenta al realizar las actividades formativas propuestas (II y TPLC) y también en los exámenes individuales. Como cierre de la actividad, todo lo trabajado se formalizó en un contrato pedagógico que fue firmado digitalmente por los estudiantes y docentes.

Respecto de las clases, se nos presentó el desafío de adecuar nuestras prácticas áulicas a un contexto no presencial, en el cual perdimos la posibilidad de observar el comportamiento y expresiones de los estudiantes, se dificultó la interacción con el docente, y los trabajos en grupo se vieron limitados. En primer lugar, organizamos seminarios de trabajo semanales a través de reuniones virtuales con el fin de consensuar y organizar las actividades a realizar. Con la intención de sostener la participación por parte de nuestros estudiantes sin caer en la modalidad de subir videos expositivos de los temas, decidimos realizar encuentros sincrónicos en todos los STePs utilizando salas de reuniones virtuales. Además los encuentros se grabaron para facilitar el acceso a aquellos que no disponían de una buena velocidad de internet. En estos encuentros los docentes empleamos distintos recursos que suplieron a los presentes en el aula. Para reemplazar la pizarra del aula, se utilizó una pizarra virtual implementada a través

de diferentes aplicaciones informáticas y la escritura se realizó a través de tablets o tabletas digitalizadoras. Para favorecer la participación de los estudiantes en los encuentros se utilizaron pizarras colaborativas, en las que los estudiantes podían escribir, y colocar fotos o notas. El trabajo en grupo durante la clase se logró separando la sala de reunión principal en sesiones grupales. Si bien se hicieron grandes esfuerzos para lograr una interacción fluida entre estudiantes-docente, este aspecto fue uno de los más difíciles de lograr.

En relación a las actividades de trabajo grupal – II y TPLC – las mismas se planifican para servir de ventanas de observación que permitan identificar obstáculos y errores, y brindar orientación a través de la realimentación escrita de los docentes. Sin perder de vista el objetivo de las mismas se nos planteó el desafío de repensarlas y adaptarlas a la virtualidad. En el caso de los II, antes de la pandemia los estudiantes asistían a la clase con su trabajo realizado en un formulario ad-hoc en papel. En el contexto de no presencialidad, identificamos que era imprescindible obtener la información del trabajo de los estudiantes antes de la clase, por lo cual propusimos el uso de un portafolio digital en la plataforma moodle. Los estudiantes subieron al portafolio su trabajo previo a la clase, y los docentes utilizamos el mismo para armar el material a utilizar en el encuentro sincrónico, seleccionando las soluciones de los problemas que evidenciaban dificultades pero también aquellos que resultaban correctos. Durante el encuentro, el docente realizó la presentación del material seleccionado e invitó al debate a través de distintos interrogantes; y los estudiantes corrigieron su trabajo contrastando sus soluciones con las presentadas por el docente. Posterior al encuentro sincrónico los estudiantes subieron el trabajo corregido al portafolio y el docente brindó retroalimentación a través de la corrección de los mismos. En el caso del TPLC, la entrega del trabajo se realizó también a través de un portafolio digital. En ambas actividades –II y TPLC– y previo a la entrega del propio producido de cada estudiante, se incorporó una actividad de autoevaluación y coevaluación utilizando un cuestionario de la plataforma moodle.

Con respecto a los exámenes individuales, la adaptación de los mismos fue uno de los mayores desafíos. Tomando en consideración el número de estudiantes y las limitaciones de recursos que los mismos manifestaron – falta de cámaras, velocidad de internet limitada para mantenerse conectado todo el tiempo del examen, entre otros – se optó por diseñar un examen en la plataforma moodle que se desarrollará en forma sincrónica. El examen quedó conformado por 15 preguntas en total seleccionadas aleatoriamente para cada estudiante divididas en 5 actividades de resolución secuencial. Cada una de estas actividades tenían un tiempo de resolución acorde a la complejidad de las preguntas y se clasificaron como:

- Actividades con preguntas de opción múltiple o verdadero y falso.
- Actividades con preguntas de interpretación gráfica. Proponían por ejemplo, señalar elementos en la gráfica de una solución, identificar trazas con gráficas de funciones, relacionar puntos críticos con curvas de nivel, etc.
- Actividades con preguntas de justificación de pasos. Consistían en seleccionar a partir de un listado de opciones las justificaciones de ejercicios resueltos o de demostraciones teóricas.
- Actividades con preguntas para encontrar un error conceptual. Se brindó la resolución a un problema o ejercicio indicando que en el mismo presentaba un error. Se solicitó a los estudiantes identificar el error y escribir su respuesta en un ensayo de pocas palabras brindando una justificación adecuada.
- Actividades con preguntas de realización de cálculos. Se generó un espacio interactivo y con posibilidad de navegación interna que consistió en dos ejercicios para que cada estudiante resolviera utilizando lápiz y papel. Luego los estudiantes escanearon y subieron su producción a un espacio habilitado también en la plataforma.

Finalmente, un aspecto que también planteó un desafío para nosotros fue sostener la motivación y brindar acompañamiento en el proceso de aprendizaje. Para ello se propuso un foro de pares supervisado, el cual se implementó en un espacio de chat en la plataforma moodle en días y horarios fijos. Además se habilitó el foro entre pares, como un canal de comunicación constante entre estudiantes y con los docentes. Por otro lado, se generó una actividad lúdica semanal, en la cual se presentaba un problema a modo de desafío y se premió con la impresión 3D de un modelo a los estudiantes que participaron de la discusión proponiendo un solución completa sin importar si la misma era correcta o realizando comentarios a las soluciones planteadas por sus compañeros. Antes de dar por finalizada la actividad, se brindó la solución correcta.

4 Impacto de los cambios en el proceso de enseñanza y de aprendizaje

Los desafíos presentados y las soluciones propuestas promovieron cambios en diferentes aspectos y ámbitos de nuestra práctica.

La pandemia no tuvo impacto en las actividades planificadas, ya que no implicó la eliminación de ninguna de ellas. Sin embargo, fue necesario realizar adaptaciones de las mismas para poder llevarlas a cabo en el contexto de no presencialidad. Es así que las condiciones propuestas por la pandemia resultaron en una oportunidad para rediseñar nuestras actividades usando estrategias de enseñanza alineadas con el desarrollo de la tecnología que hoy nos rodea.

El mayor impacto se dió en las actividades de evaluación de la planificación. La implementación del portafolio permitió registrar información clave para generar retroalimentación y orientar el aprendizaje, posibilitando así la continuidad del aspecto formativo de la evaluación propuesto en la planificación de las asignaturas. Así también, el portafolio posibilitó realizar un registro sistemático que da cuenta de la formación continua de los estudiantes. Por otro lado, el rediseño de los exámenes individuales se realizó teniendo en cuenta los criterios de evaluación pero con cambios que permitieron su implementación en una plataforma digital.

Los cambios realizados a partir de la pandemia tuvieron un impacto positivo en nuestra práctica. Durante la pandemia, la experiencia fue significativamente formativa, aportando herramientas informáticas que permitieron desarrollar las actividades en el nuevo contexto. Además nos planteamos el rediseño de nuestras clases, lo cual fue posible por el nivel de compromiso del equipo de cátedra y el trabajo sostenido de reflexión sobre nuestra tarea. De este modo, transformamos la situación debido a la pandemia en oportunidad de crecimiento y mejora de nuestra profesión docente.

Finalmente, para valorar el impacto de los cambios en la experiencia de aprendizaje de los estudiantes se realizó una encuesta a los alumnos al finalizar el curso. La participación en la misma fue de carácter opcional y fue respondida por un total de 31 alumnos. Los resultados pueden observarse en la figura 1.

La encuesta contempló las siguientes aspectos:

Aspecto I: Luego de haber cursado la asignatura y teniendo en cuenta lo que te ha aportado, considera que la formación recibida fue:
Aspecto II: La coherencia entre contenidos-estrategias de enseñanza y contenidos - estrategias de evaluación, implementadas en la asignatura fue:
Aspecto III: La metodología de cursado virtual propuesto por la cátedra te pareció:
Aspecto IV: ¿Cómo consideras que haber mantenido el contacto con los docentes de cátedra, mediante encuentros sincrónicos, influyó al momento de sostener tu cursado virtual?

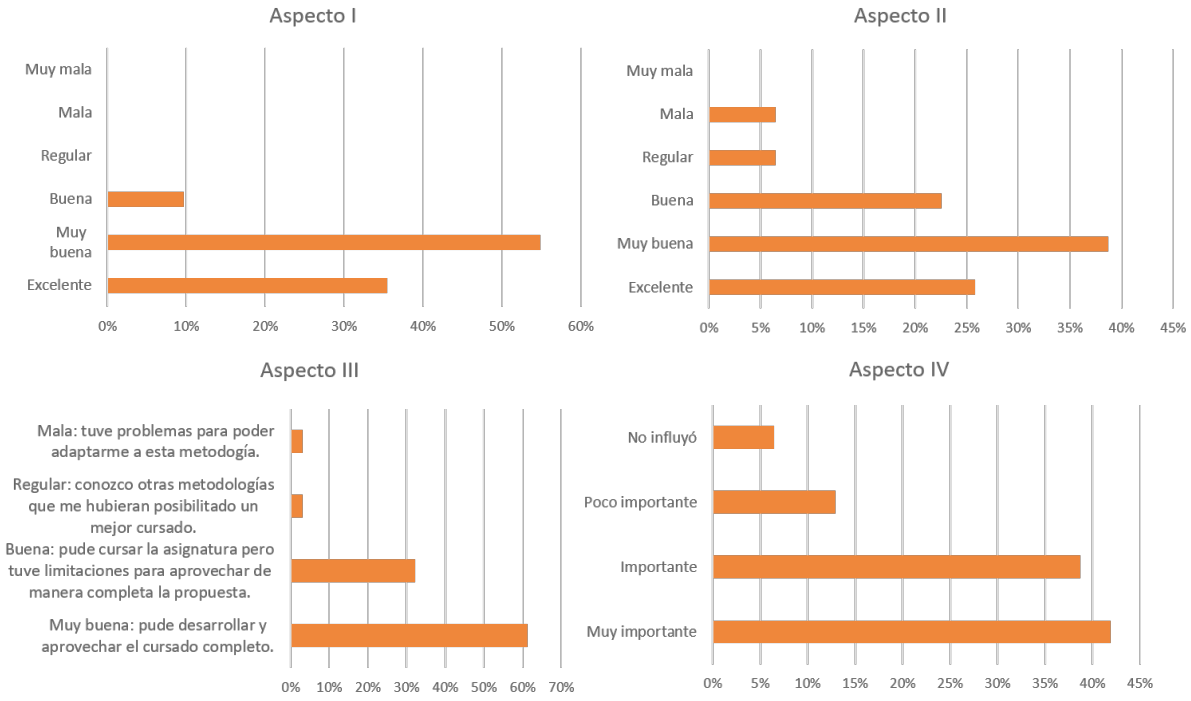


Figura 1. Resultado de los 4 aspectos consultados a los alumnos al finalizar el curso.

5 Conclusiones

El trabajo realizado en el proceso de adaptación a lo virtual permitió llevar adelante las actividades planificadas y superar las dificultades propias que impone el desarrollo de las prácticas en un nuevo entorno.
El proceso de adaptación, resultó formativo en sí mismo ya que involucró etapas de reflexión, indagación, cambio y mejora de las propias prácticas.

La generación de un espacio de aprendizaje intercátedra fue un factor clave en el proceso. En este espacio de discusión y aprendizaje semanal, los docentes pudieron compartir experiencias, manifestar inquietudes y formarse en el dominio de las tecnologías. En éste espacio se desarrollaron estrategias de cómo superar inconvenientes no previstos como ser problemas de micrófono, pantalla, internet y/o dificultad en la escritura en pizarra digital.

Las innovaciones en el proceso de evaluación mediante el portafolio digital y los exámenes virtuales demandó un gran esfuerzo y dedicación por parte del grupo. No obstante, se facilitó en parte el proceso de corrección y seguimiento, ya que muchas de las tareas asociadas a la revisión se automatizaron.

Para finalizar, el proceso de adaptación a la virtualidad generó nuevas estrategias para enseñar en tiempos de pandemia, las cuales merecen ser consideradas en la etapa post pandemia.

Referencias

1. Ministerio de Educación de la República Argentina. Resolución 104/20. *https://www.argentina.gob.ar/normativa/nacional/resoluci%C3%B3n-104-2020-335488/texto*. (2020). Accedido el 24 de Junio de 2022.
2. Brumat, M.R. Nuestras universidades públicas argentinas frente a la pandemia COVID-19. EDUPA (2022).
3. Lion, C. (2021). La enseñanza universitaria: tablero para armar. Trayectorias Universitarias, 7(12), 047-047.
4. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Entre Ríos. http://ingenieria.uner.edu.ar/. Accedido el 24 de junio de 2022.
5. Carrere, L. C., Escher, L., Miyara, A.; Milesi, S., Ravera, E., Pita, G.; Añino, M. M.; "El contrato didáctico en un curso de matemática para Bioingeniería." CAEDI (2016).
6. Carrere, L.C., Miyara, A., Ravera, E., Escher, L., Lapyckyj, I., Pita, G., Perassi, M., Añino, M. M., "Descubriendo el enfoque formativo de la evaluación en un Curso de Matemáticas para estudiantes de Bioingeniería," REDU. Rev. Docencia Univ., vol. 15, no. 1, pp. 325–343, (2017).
7. Waigandt, D. et al., "La escritura en un curso de matemática en ingeniería. Una lente que hace visible el pensamiento," in Proceedings of IV Writing Research across the borders. WRAB 2017, (2017)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Gestión de la Clase Virtual Sincrónica en Matemática: Optimizando el Aprendizaje Colaborativo en las Carreras de Ingeniería

Arce Andrea[1], Kanobel Cristina[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050 Villa Domínico
ansarce@gmail.com, mackanobel@gmail.com

Resumen. A partir de la educación remota de emergencia debida al Covid-19 fueron desarrolladas diversas prácticas docentes, entre ellas la utilización de clases por videoconferencia, en la búsqueda de una interacción sincrónica entre docentes y estudiantado emulando las interrelaciones del aula física. Dentro del marco del Proyecto de Investigación: Aprendizaje ubicuo para la construcción de conocimiento matemático en ambientes innovadores, de la UTN FRA, este trabajo plantea una gestión de la clase sincrónica permitiendo crear y mantener un ambiente de aprendizaje dinámico y flexible facilitando el proceso de aprendizaje colaborativo y autorregulado del alumnado de Análisis Matemático I, utilizando salas en la plataforma de videoconferencias y distintos recursos tecnológicos, para resolver problemas de optimización de funciones escalares. Al finalizar la experiencia, la totalidad de los grupos logro resolver la actividad propuesta, argumentando procedimientos y herramientas utilizadas, logrando trabajar colaborativamente, autorregulando su aprendizaje. La experiencia resultó motivadora para la mayoría del alumnado.

Palabras Clave: Gestión de clase sincrónica por videoconferencia, Análisis Matemático I, Resolución de problemas.

1 Introducción

Durante la pandemia ocasionada por el Covid-19, fue posible mantener la continuidad en la educación universitaria a partir de la red digital. El confinamiento desafió con urgencia a los docentes surgiendo la Enseñanza Remota de Emergencia (ERE). Luego se diseñaron de manera inmediata diversas propuestas para mantener los procesos formativos mediados por la tecnología desde los hogares de estudiantes y docentes.

Entre las diversas prácticas desarrolladas por los y las docentes en este período, nos centramos en las clases por videoconferencia de forma periódica, tratando de establecer una interacción sincrónica entre docentes y estudiantado imitando las interrelaciones del aula física. Esta práctica fue una de las más utilizadas en tiempo de pandemia. En este marco, las videoconferencias mostraban estudiantes pasivos con micrófonos y cámaras apagadas, interactuando en escasas ocasiones con las docentes que desarrollaban el tema según el cronograma de clases. Dentro del marco del Proyecto de Investigación: Aprendizaje ubicuo para la construcción de conocimiento matemático en ambientes innovadores, propuesto por el Departamento de Innovación Tecnológica de la Universidad Tecnológica Nacional de la República Argentina Facultad Regional Avellaneda, nos propusimos el diseño de una nueva forma de gestión de clase sincrónica que centre el aprendizaje en el alumnado y que permita crear y mantener un ambiente de aprendizaje motivador revalorizando el proceso de aprendizaje colaborativo y autorregulado de Análisis Matemático I materia del primer año de las carreras de Ingeniería. Asimismo, procuramos trabajar el concepto de derivada de una función en la resolución de problemas de optimización, incentivando la resolución

de problemas y la construcción de un modelo matemático en la búsqueda de máximos y mínimos de una función de una variable.

2 Marco Teórico

2.1 Aprendizaje centrado en el alumnado

En este aprendizaje el foco está puesto en lo que el estudiante hace para aprender. El o la docente cumple el rol de facilitar el aprendizaje, configurando estrategias y acciones necesarias para que el alumno construya conocimiento. Según el CONFEDI [3], las características más relevantes son: sujeción a un aprendizaje más activo que pasivo, énfasis en el aprendizaje profundo y la comprensión, incremento en la responsabilidad del estudiantado y refuerzo del sentido de autonomía. Según el CONFEDI, un aprendizaje más auténtico y de mayor significación y persistencia, permite desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior (pensamiento crítico, creatividad, análisis, conceptualización, evaluación y autoevaluación).

2.2 Gestión de clase

Entendemos a la gestión de clase como el conjunto de acciones que permiten construir un contexto propicio para el aprendizaje. Estas acciones abarcan la organización de los contenidos, el diseño de acciones que provoquen motivación intrínseca, promuevan la creación de comunidades de estudio, incentiven la organización y potencien la creatividad. A partir del confinamiento, es necesario repensar la gestión de la clase virtual teniendo en cuenta las distintas formas de interacción entre docentes y estudiantes y entre estudiantes, junto con las posibilidades que nos otorga la tecnología. Según Guzmán y Michellod [2], gestionar una clase es una tarea compleja siendo el rol del docente fundamental para lograr que todo el alumnado desarrolle las competencias y adquieran los conocimientos esperados.

2.3 Aprendizaje autorregulado

Desde las teorías educacionales sociocognitivas, se define al aprendizaje autorregulado como un proceso activo en el que los y las estudiantes seleccionan sus metas académicas que desean alcanzar y que les permiten regular variables cognitivas, afectivo emocionales, contextuales y comportamentales que intervienen en el aprendizaje y que le permiten alcanzarlas. Según Garello y Rinaudo. [3], diversos estudios demuestran que el alumno o la alumna que autorregula su aprendizaje obtiene mejores resultados académicos.

2.4 Aprendizaje colaborativo

Según Paoloni [4], dentro de las recomendaciones de las teorías motivacionales del aprendizaje con respecto a las características de las tareas académicas, diversos autores acuerdan que la colaboración sería motivante porque los distintos puntos de vista alternativos estimulan la curiosidad e incentivan a la exploración, porque algunos pares mostrarían modelos de experticia que pueden ser imitados, siendo estos últimos puntos de referencia que generen feedback respecto del nivel de desempeño y por último porque trabajar en grupo estimula el esfuerzo y la persistencia de cada integrante en miras de conseguir las meta propuestas en común.

Järvelä, Niemivirta [5] indican que los contextos educativos que promueven actividades de modo tal que el alumnado discute distintos puntos de vista, toman decisiones en grupos, interactuando, permiten que el aprendizaje se enriquezca a partir de los conocimientos compartidos y las estrategias elegidas para aprender. De esta forma se construye conocimiento en forma conjunta. Las tareas que promueven este tipo de trabajo producen situaciones propicias para generar mayor autonomía, para decidir por ejemplo la distribución del trabajo dentro del grupo, las

estrategias a utilizar, el ajuste de estas y la responsabilidad de cada estudiante dentro del grupo. El aprendizaje colaborativo puede promover una mejor autorregulación. Así mismo, la actividad profesional del futuro Ingeniero exige el compromiso del trabajo en equipo.

2.5 Resolución de problemas

Esta línea de la investigación en Didáctica de la matemática proviene de los desarrollos de Polya, Schoenfeld y Borasi, entre otros. Según Rodríguez [6], el enfoque pone el interés en que el estudiantado adquiera herramientas y construya estrategias para abordar problemas. Los elementos teóricos centrales en esta línea son: El concepto de problema, las herramientas heurísticas, las etapas de resolución de problemas y la metacognición.

Con respecto al concepto de problema, dentro de las variadas definiciones tomamos la definición de Polya [7]: "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata". En este trabajo tenemos en cuenta al proponer la resolución de un problema, que el mismo contemple la motivación, el uso de conceptos matemáticos de manera tal que su resolución resulte un desafío.

En cuanto a las herramientas heurísticas, o sea los medios y métodos para resolver el problema, resaltamos: utilizar un método de expresión o representación adecuado, razonar por analogía, utilizar figuras de análisis, simplificar el problema.

Distinguimos en la resolución del problema cuatro etapas a saber, comprensión, crear un plan, ejecutarlo y verificar la solución.

Por **último,** se definimos el concepto de metacognición como un constructo teórico que se refiere a los conocimientos que una persona tiene sobre su propia actividad cognitiva.

3 Descripción de la experiencia

La experiencia fue realizada durante el segundo cuatrimestre del año 2021, con el alumnado de un curso de 1er. a**ñ**o de la Facultad Regional Avellaneda en la materia Análisis Matemático I. Debido al aislamiento obligatorio, las clases se desarrollaron con material disponible en el Campus virtual, común a todos los cursos y clases sincrónicas de tres horas de duración por videoconferencia con un intervalo de 10 minutos. En las mismas se utilizaron diversos recursos tecnológicos de uso libre en la Web, entre ellos pizarra virtual, diversos laboratorios de matemática (Symbolab, Matrix Calculator, Geogebra, entre otros). En dichas clases se procuraba responder las dudas que surjan a partir del estudio de la materia utilizando los materiales del Campus. El curso contó con 70 inscriptos de los cuales 47 comenzaron la cursada, de los cuales asistieron a las clases sincrónicas virtuales entre 24 y 37 estudiantes. Durante el desarrollo de las mismas, las consultas sobre el material y las guías de trabajos por parte del alumnado utilizando el chat o en forma verbal, fueron muy escasas y en algunos casos se lograron pocas intervenciones del alumnado ante el requerimiento de las docentes. Este panorama nos invitó a realizar un rediseño de las actividades por Zoom, que propicie un trabajo colaborativo y autorregulado que cuente con la resolución de problemas de optimizaci**ón de funciones escalares**.

3.1 La propuesta

Con anterioridad se avisó al alumnado que el tema optimización de funciones escalares, se trabajaría en la videoconferencia utilizando salas que permiten la formación de grupos de estudiantes elegidos aleatoriamente. En esta ocasión se solicit**ó** expresamente la lectura previa del material de estudio correspondiente disponible en el campus virtual. Luego, a las tres semanas, la clase por videoconferencia sincrónica se desarroll**ó distinguiendo tres momentos:**

- Inicio. Primera hora de clase. En el comienzo de la clase sincrónica las docentes realizaron preguntas con respecto al material de estudio. Se explicaron algunos conceptos teóricos que fueron consultadas por dos alumnos.

- Desarrollo. Segunda hora de clase. Las docentes repitieron las instrucciones sobre el trabajo a realizar. Se permitió el uso de laboratorios de matemática, graficadores y pizarras virtuales. Luego se armaron de manera aleatoria las salas de trabajo con cuatro o cinco estudiantes y por último se distribuyeron los problemas de la guía de trabajos prácticos a cada grupo, también en forma aleatoria. A cada uno de los grupos Se le otorgó la posibilidad de llamar a las docentes en caso de dudas. Al cabo de 15 minutos las docentes visitaron a los grupos realizando, de ser necesario, aportes o guías para mejorar el plan de resolución del problema en cuestión.
- Puesta en común. Tercera hora de clase. Una vez resueltas las actividades propuestas, se regresó al espacio común, en donde cada grupo explico su modelización de la situación y posterior resolución. Finalizando con una encuesta por Zoom sobre la propuesta de clase.

Participaron 24 estudiantes. En esta ocasión durante el desarrollo de la clase no se realizó un intervalo de descanso.

3.2 Imágenes y relatos de las producciones grupales

A continuación, se exponen los problemas propuestos, las imágenes de las producciones realizadas por cada grupo y un breve relato de lo acontecido en la sala. Cuatro grupos trabajaron con pizarras virtuales de manera colaborativa, un grupo trabajó con la aplicación Paint.

Grupo 1

Problema: Si se conecta una resistencia de R ohms a través de una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en vatios) en la resistencia externa es:

$$P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2} \tag{1}$$

Si E y r son fijos, pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

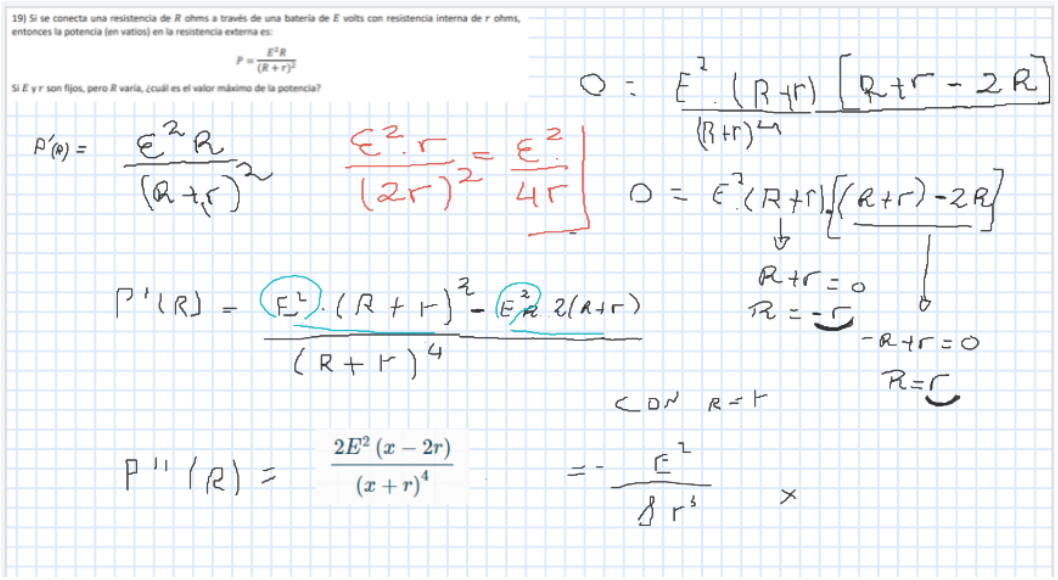


Fig. 1. Pizarrón virtual de la resolución del grupo 1.

El grupo 1 fue el único que necesitó tiempo extra para lograr acuerdos entre sus integrantes y dar la respuesta a la actividad planteada. La misma fue dada al finalizar las exposiciones de los restantes grupos. Adujeron problemas

en la interpretación del enunciado. Del grupo de cuatro estudiantes, dos fueron los que escribieron en el pizarrón y los otros dos los que expusieron en forma oral la resolución.

Grupo 2

Problema: Encontrar y justificar analíticamente el punto sobre la recta *L* que está más cerca del origen de coordenadas, siendo *L*:

$$L: y = 2x + 3 \quad \textbf{(2)}$$

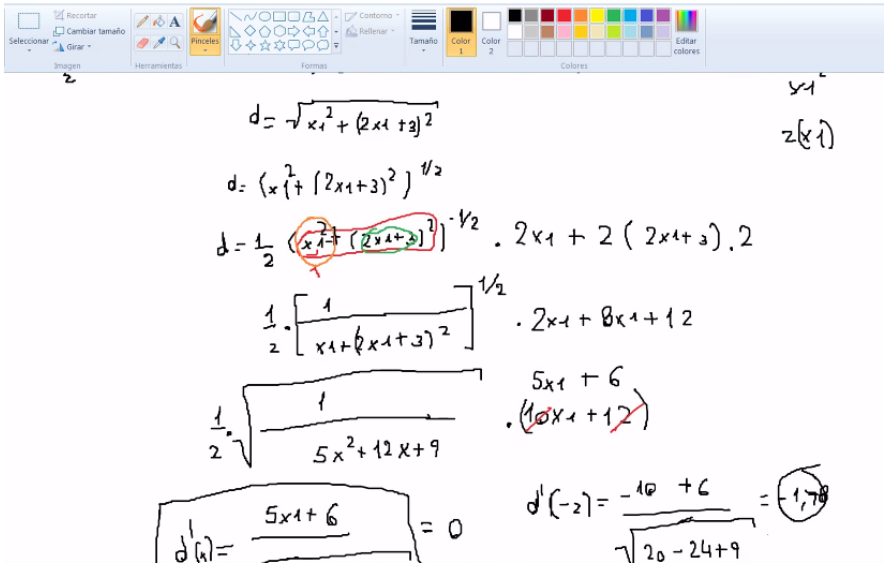


Fig. 2. Primera parte de la resolución del grupo 2.

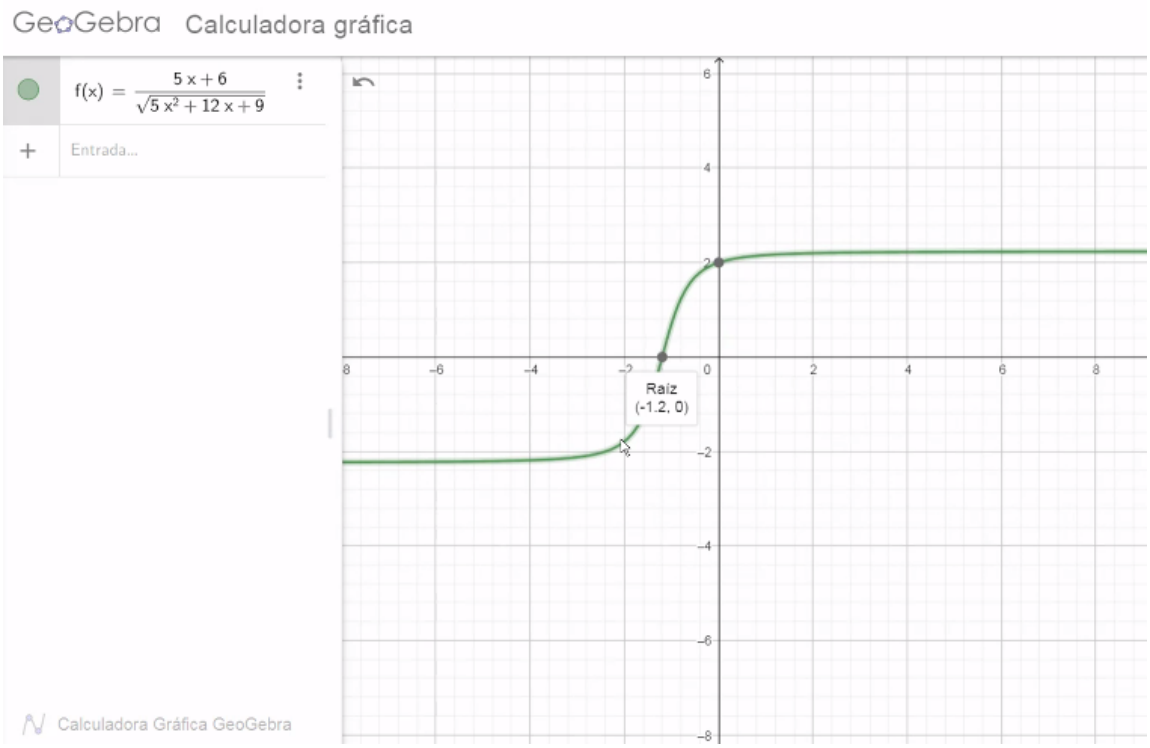


Fig. 3. Verificación del cero de la derivada de la función del grupo 2.

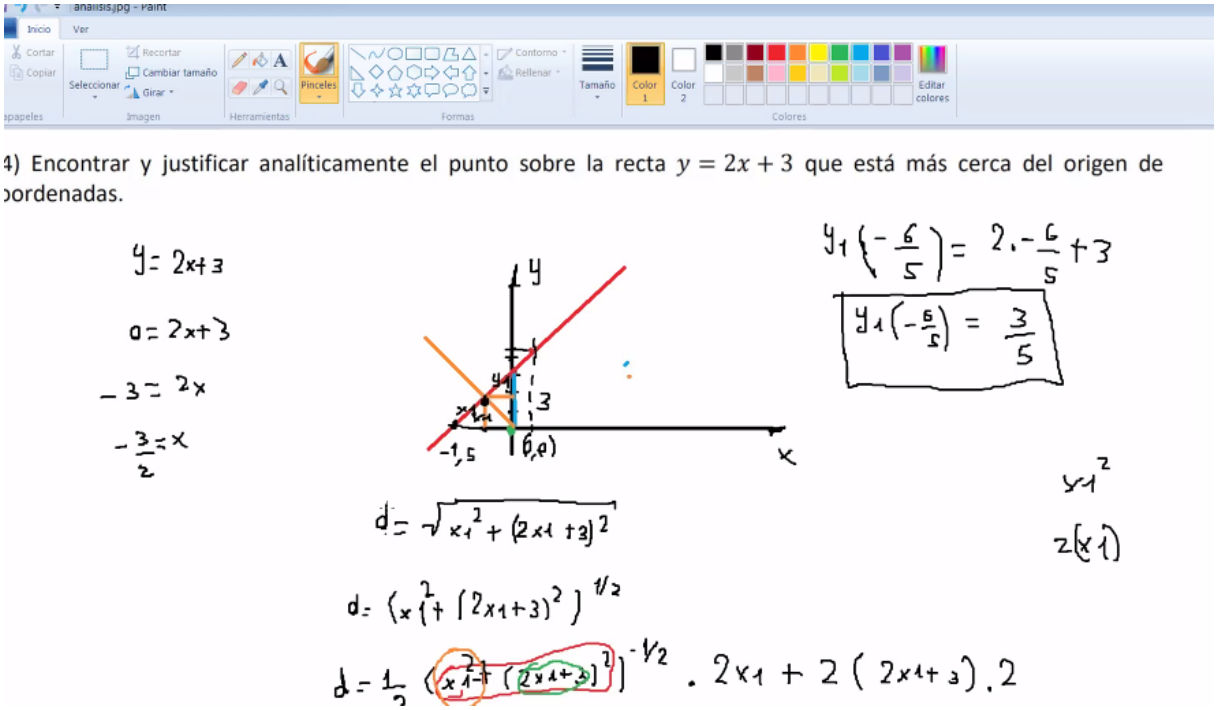


Fig. 4. Segunda parte de la resolución del grupo 2.

El grupo fue muy organizado. Realizaron una división de tareas y utilizaron diversas aplicaciones para corroborar sus hallazgos. Todos los integrantes participaron en forma activa y organizada. En la exposición oral intervinieron la totalidad de los y las integrantes.

Grupo 3

Problema: Si se dispone de 1200 *cm*2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encontrar y justificar analíticamente el mayor volumen posible de la caja.

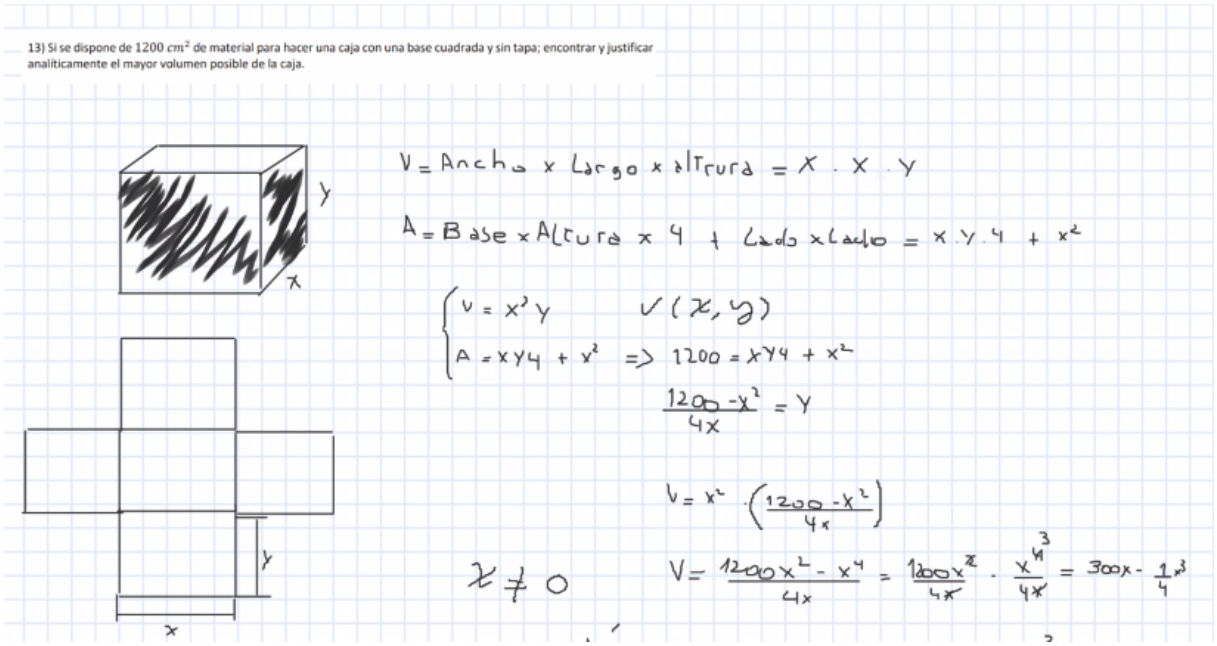


Fig. 5. Primer pizarrón virtual de la resolución del grupo 3.

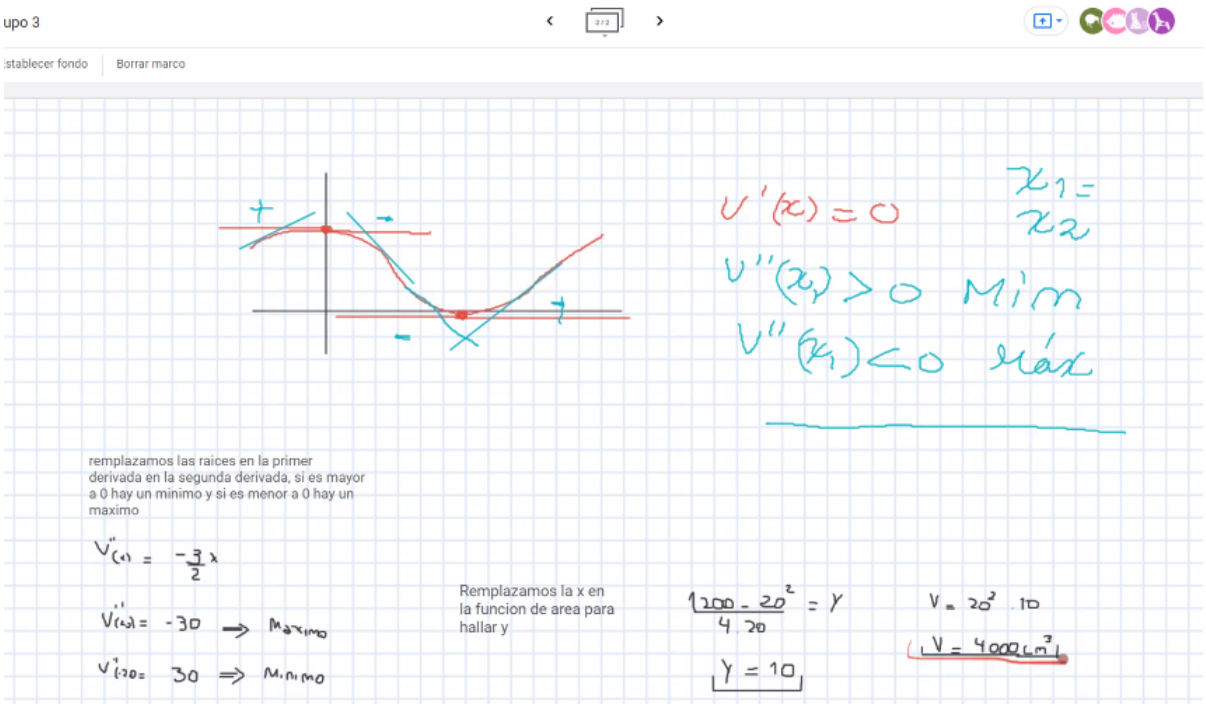


Fig. 6. Segundo pizarrón virtual de la resolución del grupo 3.

Durante la resolución de la actividad surgieron dudas y utilizaron la opción de llamar a las docentes. En la exposición oral participaron dos estudiantes de los cuatro integrantes.

Grupo 4

Problema: Un agricultor que dispone de 750 pies de material para construir una barda quiere delimitar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con bardas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?

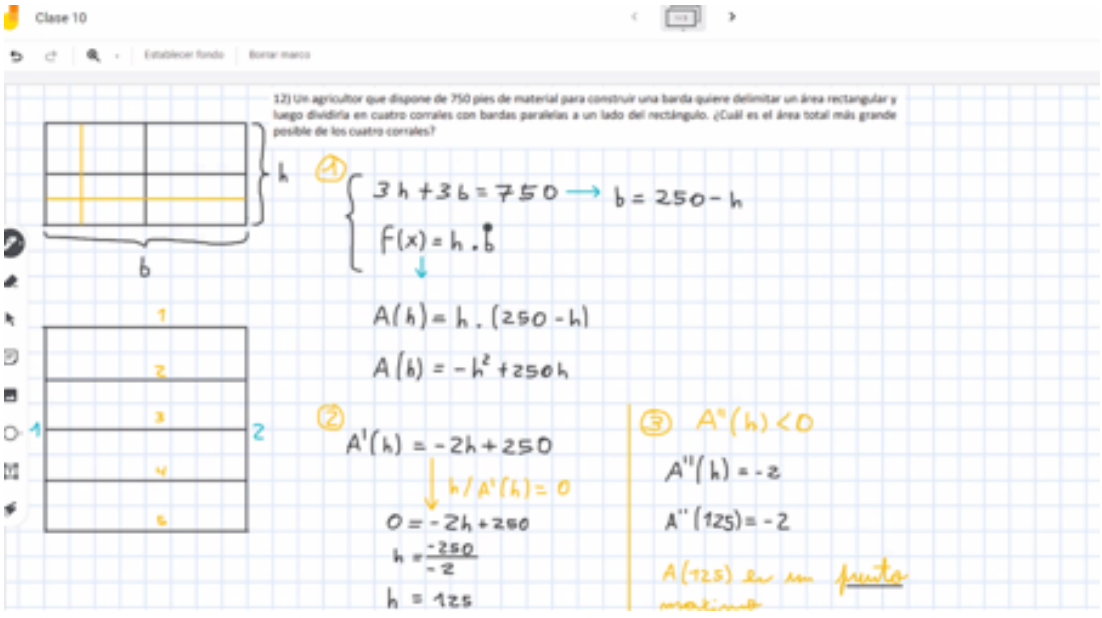


Fig. 7. Primer pizarrón virtual de la resolución del grupo 4.

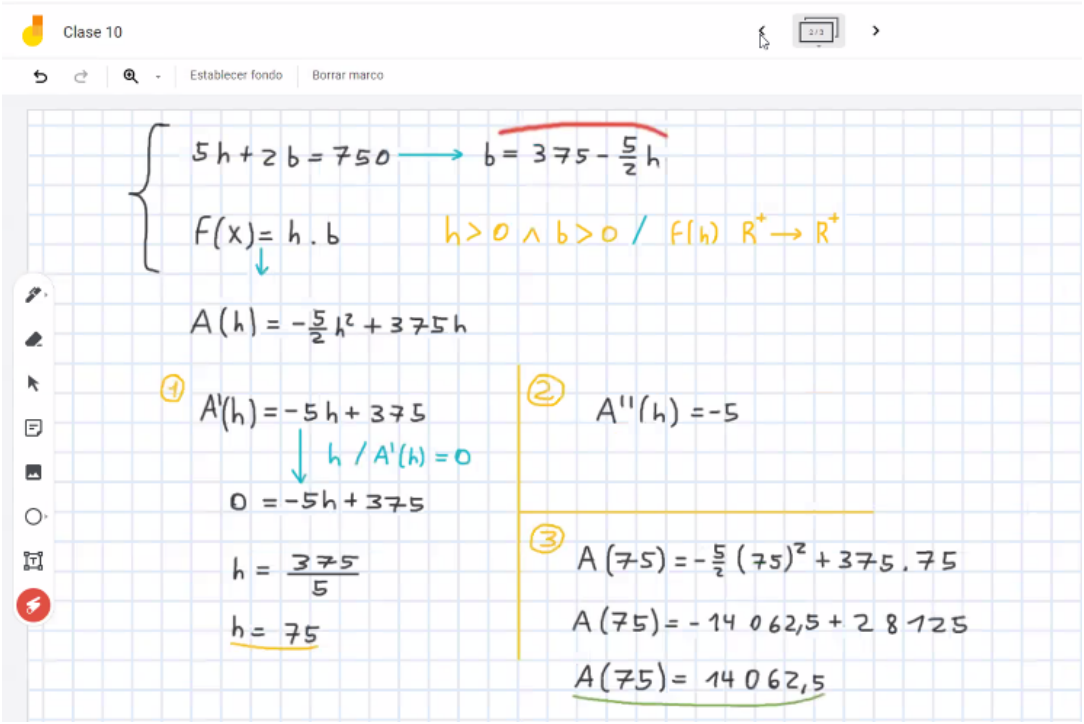


Fig. 8. Segundo pizarrón virtual de la resolución del grupo 4

El grupo 4 claramente tuvo un líder que organizó la tarea en el pizarrón. Los demás integrantes acompañaron y verificar con diversas aplicaciones el resultado obtenido.

Grupo 5

Problema: Un modelo utilizado para el rendimiento (*yield*) Y de una producción agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (medido en unidades adecuadas) es:

$$Y = \frac{kN}{1+N^2} \qquad (3)$$

Donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno ofrece el mejor rendimiento?

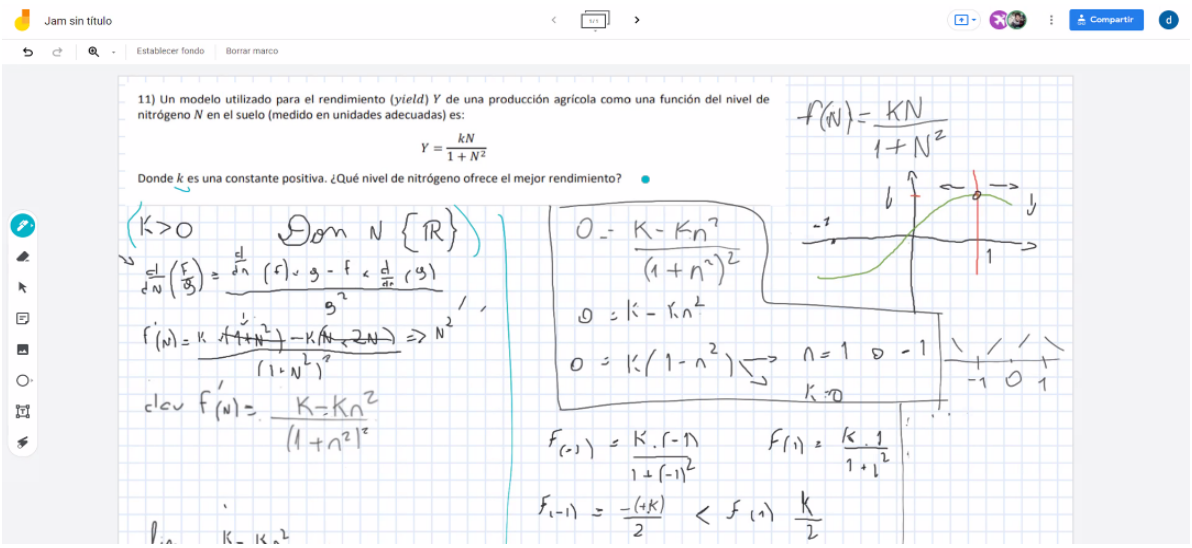


Fig. 9. Pizarrón virtual de la resolución del grupo 5

El grupo 5 utilizó varias veces la opción de llamada a las docentes. Demostraron mucha dificultad en la interpretación del problema propuesto. Hubo intercambio de opiniones, corroboraron resultados, en la exposición oral solamente un estudiante expuso los argumentos de la resolución.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La gestión de la clase en base a las actividades planteadas promovió el trabajo colaborativo y autorregulado en los grupos. A diferencia de las clases sincrónicas anteriores, el estudiantado participó en amplia mayoría en los pizarrones virtuales y en la exposición oral. Durante el desarrollo del modelo y posterior resolución el estudiantado utilizó estrategias de aprendizaje cognitivas y metacognitivas y de gestión de recursos. En cuanto a las competencias que se pretendieron poner en juego, de acuerdo con lo establecido por CONFEDI, dentro de las competencias tecnológicas, las actividades promovieron la resolución de problemas de ingeniería utilizando de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación, desarrollando competencias sociales como 'Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo', 'Comunicarse con efectividad', y 'Aprender en forma continua y autónoma'. En conclusión, creemos que la propuesta propició el desarrollo de un entramado de conocimientos, aptitudes y habilidades potenciando el saber hacer del futuro ingeniero. Asimismo, cada grupo transitó por las cuatro etapas de la resolución de un problema utilizando de manera efectiva herramientas heurísticas. Los conceptos matemáticos involucrados fueron utilizados con idoneidad por parte de los integrantes de todos los grupos. Al finalizar en la pequeña encuesta realizada por Zoom, el alumnado valoró positivamente la experiencia.

En la actualidad, después del aislamiento obligatorio surgieron muchos modelos de gestión de clases entre ellos el modelo hibrido que apunta a ensamblar y articular en una experiencia unificada propuestas que tienen lugar en la presencialidad y en la virtualidad. El modelo podría ofrecer múltiples itinerarios de aprendizaje, flexibles y autogestionados por el estudiante. Al respecto Kuklinski [8] sostiene que "...parte de la solución es eliminar definitivamente la barrera entre la formación presencial y virtual, y diseñar la experiencia académica como una única línea de tiempo narrativa multimedia expandida donde el docente y los estudiantes puedan servirse de modo colaborativo de lo mejor de ambos mundos, con un inventario de contenidos propios y externos surgidos de una intensa curaduría y ajustados a una secuencia de aprendizaje". En base a lo anterior, nuestra línea de investigación futura se refiere a repensar la gestión de la clase dentro del modelo híbrido contemplando una narrativa continua que abarque momentos sincrónicos y asincrónicos, teniendo en cuenta un aprendizaje centrado en la y el estudiante.

Referencias

1 Morano, D.: La formación de ingenieros en Argentina. El proceso de aseguramiento de la calidad. ACOFI - CONFEDI: Aseguramiento De La Calidad Y Mejora De La Educación En Ingeniería, pp.41-74 (2018)

2 Guzmán-Michellod, Á., Garrido, D., Henríquez, M., Navarro, B. y Takahashi, M. Cambio metodológico en la gestión de aula para el aprendizaje mediado con TIC (pp. 28-56). En Guzmán-Michellod. A., *Aprendizajes Mediados con TIC: fichas pedagógicas y reflexiones de la práctica docente* (2021).

3 Garello, M.; Rinaudo, M. Características de las tareas académicas que favorecen el aprendizaje autorregulado y la cognición distribuida en estudiantes universitarios. REDU: Revista de Docencia Universitaria, Vol. 10, No 3, pp. 415 (2012).

4 Paoloni, P.; Rinaudo, M.; González-Fernández A. Procesos de retroalimentación en la autorregulación de recursos de aprendizaje. Explorando su potencial en el contexto de la universidad. Revista de Educación a Distancia No.3, pp.333-334 (2011).

5 Järvelä, S. y Niemivirta, M. Motivation in context: Challenges and possibilities in studying the role of motivation in new pedagogical cultures. En S. Volet y S. Järvelä (Eds.), Motivation in Learning Contexts. Theoretical Advances and Methodological Implications (pp. 105-127). London: Pergamon- Elsevier. (2001).

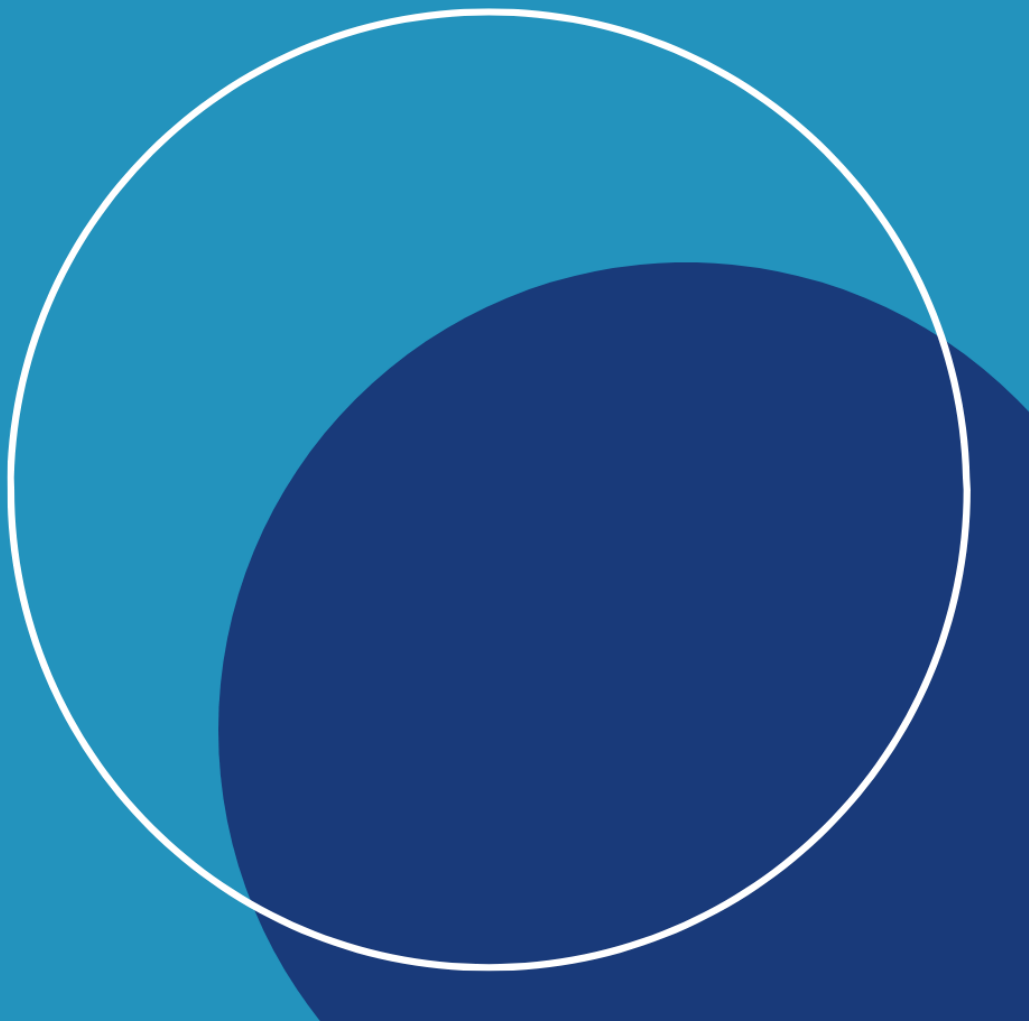
6 Rodríguez, Mabel, Marcel D. Pochulu, Patricia Barreiro, Ana Bressan, Cristina Camós, Gustavo Carnelli, Inés Casetta et al. *"Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos."* Educación Nro. 6 (2015).

7 Polya, G. *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley (1981).

8 Pardo Kuklinski, H.; Cobo, C. *Expandir la universidad más allá de la enseñanza remota de emergencia Ideas hacia un modelo híbrido post-pandemia.* Outliers School. Barcelona. (2020).

EMCI 2022

Eje: investigación educativa



EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Aula invertida: ¿una metodología posible para mejorar la enseñanza en la nueva presencialidad?

María Carmen Quercia[1], Sandra Graciela Baccelli[1], María Laura Distéfano[1]
[1]Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302, Mar del Plata, CP7600
mariaquercia@gmail.com, sbaccelli@gmail.com, mldistefano@fi.mdp.edu.ar

Resumen. A partir de la reflexión en torno a las estrategias de enseñanza del Álgebra y del Análisis Matemático en el inicio de las carreras de Ingeniería, se interpeló la práctica docente a través de una serie de preguntas. Estos interrogantes permitieron pensar cómo favorecer el desarrollo de algunas competencias propias de la formación del ingeniero en el comienzo de su trayectoria universitaria. Durante la pandemia, los profesores generaron una gran cantidad de materiales de estudio en el aula virtual. Para dar continuidad al uso de estos materiales se buscó la manera de rediseñar las clases presenciales incorporándolos, lo cual derivó en la implementación de clases bajo la modalidad de aula invertida. En este trabajo se presentan las primeras observaciones del impacto de esta propuesta en la dinámica de las clases, orientada a facilitar el desarrollo de algunas competencias propias de la formación del ingeniero.

Palabras Clave: Aula Invertida, Competencias, Idoneidad Mediacional, Idoneidad Interaccional.

1 Primera Parada: ¿Cuál es el punto de partida?

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMdP), todos los estudiantes cursan simultáneamente las asignaturas Álgebra A, Análisis Matemático A y Química General I en el primer cuatrimestre de primer año.

Tanto en Algebra A como en Análisis Matemático A (materias a las cuales nos referiremos en este trabajo) hay seis comisiones de trabajo con similar estructura y el alumno puede anotarse en una de ellas para cursar las materias citadas.

En el Plan de Trabajo Docente (PTD) de ambas asignaturas se explicitan los aportes que desde estas materias pueden hacerse al desarrollo de las *competencias de egreso* del Ingeniero, considerando cuatro de ellas formuladas en el Libro Rojo CONFEDI [1]:

1. Competencia para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
6. Competencia para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
7. Competencia para comunicarse con efectividad.
9. Competencia para aprender en forma continua y autónoma.

Sin embargo, es importante pensar que, para que cada futuro ingeniero pueda desarrollar estas competencias, es necesario que en el inicio de su trayectoria en el nivel superior, comience a construirse como estudiante autónomo. Es entonces que en las citadas asignaturas, el énfasis está puesto en contribuir al proceso de fortalecimiento de las

competencias académicas.

Estas últimas, según Mastache [2], aluden al conjunto integrado de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridos para un correcto desempeño en el rol de alumno. Las competencias académicas se adquieren y desenvuelven durante toda la escolaridad y, en la universidad, suelen ser consideradas, en general, como un capital cultural que los estudiantes deben haber desarrollado con anterioridad.

No obstante, tanto en las clases presenciales desarrolladas antes del ASPO como en las virtuales llevadas a cabo en ese período, aparece una contradicción en la enseñanza, pues las competencias de egreso del ingeniero y las académicas particularmente enunciadas en el PTD, rara vez son consideradas por los docentes como un "contenido" a ser tratado en la asignatura. Así, muchos estudiantes cuya escolaridad no les posibilitó el desarrollo de las competencias académicas, se ven enfrentados a la exigencia de recurrir a conocimientos, hábitos y habilidades cuya adquisición nunca les fue facilitada. En este sentido, es generalizada y de larga data la queja de los docentes de estas cátedras respecto del bajo desempeño académico que muestran sus alumnos.

En consecuencia, la reprobación y la deserción de los estudiantes en estas materias generan preocupación a nivel institucional. Esta situación, atravesada por diversas causas, interpela en forma continua a su análisis con el objetivo de proponer y llevar a cabo adecuadas acciones de remediación, especialmente al retomar las clases presenciales luego de la pandemia.

2 Segunda parada: ¿Cómo se desarrollaban habitualmente las clases de Álgebra A y de Análisis Matemático A antes de la pandemia?

La enseñanza y el aprendizaje de las mencionadas asignaturas se organizaban en cuatro clases semanales de dos horas de duración cada una. Dos de ellas correspondían a la "clase de teoría" y las otras dos a la "clase de práctica".

Aunque las clases de teoría eran predominantemente de carácter magistral, con desarrollos teórico-prácticos, habitualmente orientadas por la proyección de un Power Point como soporte, se pretendía establecer el diálogo reflexivo entre el docente y los estudiantes como sujetos activos, a propósito de los contenidos. En este sentido, la pregunta reflexiva y los mensajes tenían una dirección: elaborar, interpretar y explicar conceptos.

Se procuraba instalar entonces el valor de la pregunta reflexiva que se asienta en la búsqueda de la comprensión. La pregunta podía surgir del estudiante (y el docente la utilizaba como punto de partida para realizar algún análisis) o podía partir del docente, para provocar avances en los conocimientos de los estudiantes.

En este último caso, en algunas oportunidades, el profesor efectuaba preguntas para facilitar el proceso de aprendizaje. En otras ocasiones, las preguntas se transformaban en desafíos cognitivos, es decir, en legítimas invitaciones para que los alumnos se cuestionaran acerca del tema que se estaba estudiando.

Las preguntas formuladas a lo largo de la clase permitían distintos procesos. Las del inicio habilitaban la recuperación del saber en cuestión y así les daban sentido a la clase que tendría lugar a continuación. Las del desarrollo favorecían la conexión de lo nuevo con lo ya sabido; a diferencia de las preguntas del inicio, aquí se comenzaba con un proceso de mayor análisis. Las finales facilitaban el desenvolvimiento de procesos de síntesis o la anticipación del próximo tema y prever el contenido de la clase siguiente.

Dada la importancia de las preguntas, que orientaban y ayudaban a pensar, en estas clases, según Litwin [3], los docentes formulaban tres tipos diferentes: las referidas a la cognición, a la metacognición y al nivel epistémico. Las primeras referían a los conceptos, a los datos que se habían explicado. Se trataba del nivel de contenido y su adquisición, pues permitían pensar en el tema que se estaba desarrollando. Las preguntas metacognitivas posibilitaban a cada docente ayudar a los estudiantes a reconocer cómo habían pensado, si se había producido síntesis o procesos de generalización adecuados. Orientados por estas preguntas, y también por algunos contraejemplos, los alumnos podían revisar sus procesos cognitivos y generar cada vez mejores procesos de pensamiento. Las preguntas epistémicas permitían contribuir a que los estudiantes entendieran los alcances y los límites del conocimiento en el tema en cuestión y su provisionalidad.

En las clases de práctica se ejemplificaban, practicaban e integraban los conceptos aprendidos en la clase de teoría. También se atendían las consultas que realizaban los estudiantes en relación a los ejercicios resueltos fuera de estas clases.

En este contexto, los docentes esperaban que cada estudiante pudiese integrar el sentido de ambas clases para lograr actuar matemáticamente con verdadera eficacia y así comprender lo que estaba estudiando. Sin embargo, debido a la estructura de la cátedra, los alumnos percibían una cierta independencia entre ambos tipos de clases. Por ejemplo, algunos estudiantes disponían de dos cuadernos personales: uno para las clases teóricas y otro para las prácticas. El primero, rara vez estaba presente en las clases prácticas. A menudo, los cuadernos que correspon-

días a las clases prácticas estaban llenos de respuestas a los ejercicios que se habían resuelto sin anotaciones personales que luego facilitara el estudio.

Ante esta situación y para contribuir a la construcción del proyecto de estudio de cada alumno se había creado un blog para cada asignatura donde estaba disponible todo el material para aprender. Allí se encontraban tanto los Apuntes de Teoría, donde se desarrollan todos los contenidos teóricos de la materia en cuestión, como los cuestionarios y las guías con orientaciones para revisitar los conceptos tratados. También se incluyó en el blog, por cada unidad de contenidos del programa, las Guías de Trabajos Prácticos y los recursos complementarios: problemas resueltos, autoevaluaciones con claves de corrección y exámenes ya propuestos con el desarrollo de los procedimientos de resolución de cada uno de los ejercicios.

Además, para ahondar en el estudio de diversos contenidos, se encontraban en ese espacio virtual algunas secuencias de videos y escenarios armados en GeoGebra, diseñados por diferentes integrantes de la cátedra. Muchos de estos applets y videos fueron incorporados luego en las respectivas aulas virtuales, lo cual pone en evidencia que esos materiales virtuales fueron los primeros anticipos del trabajo en esta modalidad.

Sin embargo, a pesar de contar con todos estos recursos, se observaba, en líneas generales, que los estudiantes no consideraban su utilización en su proyecto de estudio.

Respecto de la evaluación, la metodología implementada consistía en tomar, durante el transcurso del cuatrimestre, dos parciales teórico-prácticos acumulativos que abarcaban, entre ambas, todos los contenidos de la asignatura. Luego de rendido el primer y segundo parcial el alumno tenía derecho a recuperar uno solo de los dos parciales. En ambas asignaturas, los alumnos tenían entonces la oportunidad de aprobarlas de dos maneras: por promoción o bien mediante un examen final.

En relación a los criterios de evaluación se consideraban: la comunicabilidad de los procedimientos y resultados, organizándolas según la consigna de la actividad planteada y la pertinencia de las justificaciones.

En cuanto a las estrategias de devolución de resultados y sugerencias para la superación de dificultades en estas pruebas escritas, se optó por hacer comentarios cualitativos en los márgenes de las hojas que aludían a orientaciones para la revisión de conceptos erróneos o especificaciones de contradicciones conceptuales. Estas cuestiones eran aclaradas por algún docente de la comisión a la cual pertenecía el estudiante mediante una breve entrevista. De esta forma, el alumno podía comprender cuáles eran los aspectos sobre los que debería prestar mayor atención, revisar, profundizar, re-direccionar su estudio, etc.

No obstante, los niveles de aprobación de Algebra A y de Análisis Matemático A no eran los esperados.

La situación descripta en todos sus aspectos interpeló entonces a los integrantes de las cátedras de ambas materias a analizar la propia práctica.

En el mes de marzo del año 2020, el ASPO interrumpió este proceso de reflexión que se retomaba para resignificar las clases presenciales

En un principio, este aislamiento impuesto por la pandemia, resultó un obstáculo. Sin embargo, se transformó paulatinamente en un desafío para los docentes de las cátedras, quienes vieron en este contexto la oportunidad de trabajar, tanto individual como colaborativamente, para contribuir a solucionar los problemas detectados. En este sentido, buscaron soluciones y crearon un nuevo entorno de aprendizaje, que posibilitara a los estudiantes desarrollar las competencias señaladas en el PTD.

3 Tercera parada: ¿Cómo se desarrollaron las clases de Álgebra A y de Análisis Matemático A durante el ASPO?

Al comenzar el ASPO, los integrantes de estas cátedras debieron entonces repensar la enseñanza de estas asignaturas en un entorno, nuevo para muchos: el virtual.

En el espacio https://ciclobasico.fi.mdp.edu.ar/ cada materia dispuso de un aula para desarrollar todas las tareas que posibilitan su enseñanza y su aprendizaje.

En primer lugar se trasladó todo el material de estudio disponible en cada blog al aula virtual correspondiente, implementada en una plataforma Moodle. Allí se organizaron las clases con un cronograma similar al vigente para las clases presenciales.

En la materia Algebra A, los archivos en Power Point que orientaban las clases presenciales de teoría se adaptaron en algún sentido para elaborar videos de esas clases. En Análisis Matemático A se hizo la misma tarea, excepto para la primera unidad temática que contempla el programa de la asignatura, en cuyos videos un docente de la cátedra explica los contenidos correspondientes de manera similar a como se hacía en la clase presencial. De esta forma, el espacio destinado a cada unidad contaba con esos videos y todo el material de estudio correspondiente

que se había migrado del blog.

En cada uno de esos espacios se publicaba también la orientación para el estudio de ese contenido y allí se disponía de dos Foros: uno para las consultas referidas a cuestiones conceptuales o teóricas y otro para atender las demandas ligadas a las dudas surgidas en la resolución del Trabajo Práctico correspondientes a cada unidad.

Todas las instancias evaluativas (parciales, recuperatorios y finales) se realizaron en ese espacio virtual.

En esta modalidad, el trabajo personal del alumno –siguiendo las indicaciones publicadas en la plataforma, decidiendo los momentos para ver los videos, identificando su propia necesidad de reverlos y organizando la administración de los recursos provistos por la cátedra– demandaba una genuina autonomía del estudiante.

Quizás en esta cuestión se encontraba el corazón de los problemas detectados en relación al desarrollo de competencias en los estudiantes: ¿un alumno podría hacerse más independiente en su estudio solo siguiendo algunas orientaciones brindadas por los docentes?

Así, durante todo el año 2021, el trabajo de los profesores estuvo focalizado en la optimización de los recursos e intercambios en el aula virtual, incluyendo entonces las videoconferencias, tanto para las clases de teoría como las de práctica.

La escasa participación en ellas y en los Foros generó más dudas en los docentes respecto a los asuntos referidos al desarrollo de competencias en relación al estudio independiente de los alumnos.

A comienzos del año 2022 los exámenes finales se tomaron en forma presencial y, ante los magros resultados alcanzados por los estudiantes, la dificultad descripta en el párrafo anterior quedó claramente expuesta.

Los integrantes de las cátedras reflexionaron entonces en torno a la tarea desarrollada en este contexto y surgieron nuevos interrogantes: ¿es posible reutilizar los materiales didácticos tratados en las clases virtuales durante la pandemia en las clases presenciales que prontamente se retomarían? ¿Sería posible contribuir con ello a que los alumnos desarrollen las citadas competencias?

4 Cuarta parada: ¿Cómo resignificar el desarrollo de las clases de Álgebra A y de Análisis Matemático A después de la pandemia utilizando el aula invertida como metodología?

Se pensaron entonces posibles respuestas, invariablemente provisorias, a estas y otras preguntas, a la luz de una de las cinco nociones teóricas que actualmente componen el Enfoque Ontosemiótico (EOS) [4]: la *Idoneidad Didáctica*. El sistema de componentes o dimensiones identificados en esta perspectiva constituye una guía para el análisis y la reflexión sistemática de los procesos de enseñanza y de aprendizaje con el propósito de su mejorarlos progresivamente:

1. *Idoneidad epistémica*: refiere al grado de representatividad de los significados institucionales previstos o implementados, respecto de un sistema de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva*: expresa antes de comenzar el proceso de instrucción si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y, luego, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. *Idoneidad interaccional*: permite determinar si el intercambio ha contribuido a resolver dudas y dificultades de los estudiantes.
4. *Idoneidad mediacional*: corresponde al grado de adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*: habilita tratar el grado de implicación (en cuanto a interés y a motivación) de los alumnos en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica:* posibilita valorar la adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo de la institución en cuestión, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

En este marco se indagaron las teorías en las cuales se estudia el desarrollo de estrategias que posibilitan hacer al alumno más autónomo en su relación con el estudio a través de las TIC. Entre las posibles, y valorando la posibilidad de reutilizar los materiales didácticos elaborados para las clases virtuales durante el aislamiento social, preventivo y obligatorio, los integrantes de estas cátedras consideraron adoptar para las clases de teoría el *aula invertida* como metodología. Esta estrategia se constituiría además en una vía posible para contribuir al desarrollo de las competencias enunciadas en este trabajo en los estudiantes.

Para hablar particularmente del aula invertida, se debe iniciar por mencionar algunas metodologías que im-

pulsaron su surgimiento, en principio, como respuesta a la inconformidad de los docentes con la metodología tradicional de clase.

El aula invertida es una metodología de clase cuyo nombre proviene de la exploración Inverted Classroom realizada por Lage, Platt y Treglia [5] en una clase de economía, exploración que fue perfeccionada por Bergmann y Sams [6] bajo el nombre Flipped Classroom, siendo implementada inicialmente en clases de química y más tarde popularizada en diferentes áreas.

La idea inicial de Bergmann y Sams era auxiliar con videos a aquellos estudiantes que faltaban a clase [7]. Sin embargo, notaron que podían obtener mayor beneficio de este material, así que buscaron darle una significativa estructura y llevarlas a todos los alumnos, popularizando sus lecciones y dando vida a la organización The Flipped Learning Network, en la cual se reconocía la clase invertida como una estrategia que llevaba el trabajo de algunos procesos de aprendizaje fuera del aula, dando el tiempo de clase para que el profesor pudiera facilitar y potenciar otros aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes [6].

Entre los diferentes modelos y teorías en la educación, se puede decir que, de acuerdo con la taxonomía de Staker y Horn [8], el aula invertida encaja en los submodelos de rotación o entornos mixtos, al ser una metodología en la cual el estudiante aprende a través de recursos en línea, controlando de manera significativa aspectos como el tiempo, el lugar de estudio, la dedicación o el esfuerzo, pero también debe desarrollar parte de su proceso de aprendizaje de manera presencial en el salón de clases [9], entrelazamiento que ha sido denominado como blended learning. Además, guarda relación con el sustento teórico del constructivismo de Vygotsky [10], al ofrecer espacios de trabajo colaborativo para la resolución de problemas y también con la teoría del aprendizaje experiencial expuesta por Yeganeh y Kolb [11], en la cual el estudiante reflexiona continuamente sobre lo que experimenta para poder construir conceptos [7].

Así, en el aula invertida, el profesor no desarrolla una clase expositiva, pues la misma fue grabada previamente para que sus estudiantes la vieran antes en el lugar que estuvieran, convirtiéndose el profesor en un tutor y apoyo más personalizado [6]. El tiempo de la clase presencial es utilizado por el docente para tratar conceptos, ejercicios y problemas que invitan al estudiante a poner a prueba su comprensión de los temas en cuestión, dando espacio para el trabajo en grupo y también para el debate.

Es por ello que los profesores de estas cátedras consideraron que con la metodología del aula invertida se mejoraría tanto la idoneidad mediacional como la idoneidad interaccional y, entonces, sería así posible contribuir al desarrollo de las competencias que se pretende. En este sentido, en investigaciones anteriores realizadas en el contexto de la asignatura Análisis Matemático A, se analizaron valoraciones de algunas dimensiones de la idoneidad didáctica de una secuencia en un entorno virtual [12]. En ese caso, los resultados muestran el grado de alcance obtenido en cada una de las idoneidades y se proponen pautas sobre aquellas que requieren ser mejoradas.

Acorde a lo expuesto hasta aquí, se consideraron los aportes de [6], quienes proponen el tratamiento del modelo de aula invertida bajo las siguientes etapas:

1. Creación de un sitio web de fácil acceso para el estudiante, en donde se dispondrán los diferentes videos y recursos del curso.
2. Comunicación a los estudiantes de la estrategia que se utilizará, en qué consiste, qué temas se abordarán.
3. Sesión de adaptación a la plataforma y a los recursos virtuales disponibles allí, dando a conocer la forma de acceso, revisando que todos los estudiantes puedan acceder a los contenidos y sugiriéndoles cómo puede organizar el tiempo de estudio independiente.
4. Para el trabajo en las clases presenciales posteriores, los estudiantes deben preparar al menos una pregunta sobre la temática tratada en los videos preparados por los docentes, la cual no puede ser resuelta directamente con el video (esto en búsqueda de posibles aspectos que no quedaron claros o no se abordaron en la explicación del docente).
5. Se desarrollan actividades en grupo, en las cuales el estudiante puede recurrir al uso de internet, computadores, celulares, libros, etc.
6. Se debe realizar una evaluación constante, que le dé al estudiante una retroalimentación para la reflexión de su proceso de estudio y de las expectativas no logradas en su proceso de aprendizaje.

Desde esta manera, en las mencionadas asignaturas, se fueron siguiendo estos pasos. Para ello se utilizaron las aulas virtuales ya disponibles en https://ciclobasico.fi.mdp.edu.ar/. Es de destacar que, si bien en el aula invertida resulta importante la utilización de chats y foros, en esta primera etapa se ha decidido implementar un Foro sólo en la materia Análisis Matemático A, a modo de prueba, dado el escaso impacto logrado con este recurso en la modalidad virtual. En Algebra A, las seis comisiones desarrollan sus clases en forma presencial: una clase de teoría y dos de práctica semanalmente. En Análisis Matemático A la organización es similar, excepto que en una de las

comisiones todas las clases están mediadas por una plataforma virtual. En todos los casos, los exámenes se rinden en forma presencial.

Para comunicar a los estudiantes las características de esta modalidad de trabajo se realizó una reunión de carácter virtual en cada materia la semana anterior al inicio de las clases presenciales. Lo allí tratado se volvió a explicar en la primera clase de teoría presencial.

Durante las primeras clases, los docentes generaron un espacio para que los estudiantes lograran niveles crecientes de familiarización con la metodología de aula invertida al acceder al aula virtual y a los materiales de estudio allí disponibles.

Así, los estudiantes deben concurrir a cada clase de teoría según el cronograma propuesto, con los materiales estudiados para participar, con sus aportes y también con sus dudas y dificultades, en la puesta en común que gestiona el profesor en esa clase.

En todas las clases, cada alumno es invitado a reflexionar acerca de sus avances en el estudio, con la intención de que pueda identificar los objetivos alcanzados y los no logrados en su proceso de aprendizaje. Al momento, esta tarea se realiza de manera algo informal mediante un intercambio dialógico docente-estudiante.

En este sentido, es de destacar que, al momento de presentar este trabajo, se está elaborando una encuesta para que completarán los alumnos a fin de evaluar el impacto de esta metodología que se está implementando en el proyecto de estudio de cada uno de ellos. Para ello, en esta encuesta se indaga acerca de cuáles son los materiales disponibles en el aula virtual que los alumnos utilizan para estudiar, con quién estudian fuera de las clases, de qué modo participan en las clases presenciales, entre otras.

El aula invertida entonces está en marcha, tanto en Algebra A como en Análisis Matemático A.

5 Quinta parada: A modo de cierre, siempre abierto

Adoptar el aula invertida como metodología parece ser, al momento, una buena elección. Durante esta nueva presencialidad se está observando un trabajo grupal significativo, donde los estudiantes confrontan ideas y procedimientos que les permiten superar dificultades y establecer acuerdos pues, en la puesta en común, los estudiantes sienten la responsabilidad, e incluso el desafío, de expresar sus ideas, argumentarlas y, de ser necesario, repensarlas y reformularlas. A partir de estos aportes de los alumnos, el docente establece las relaciones entre ese conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, es decir, comienza a institucionalizar los nuevos conocimientos.

De esta forma, cada estudiante tiene la oportunidad de ser protagonista de su propio aprendizaje, pues no se siente un extranjero en la clase gracias a la hospitalidad del docente que favorece un clima de trabajo apropiado para el estudio en forma autónoma.

Si bien en las diferentes comisiones de trabajo se encontró, como era de esperar, que algunos estudiantes tuvieran una mayor comprensión en el tratamiento de los contenidos mediante diferentes actividades, y otros no tanto, se pudo observar un aumento tanto de la idoneidad mediacional como de la idoneidad interaccional. Esto implica un impacto en el desarrollo no solo de las competencias académicas sino también de las competencias para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo, para comunicarse con efectividad y para aprender en forma continua y autónoma.

En cuanto a los docentes, la mayoría de ellos mostraron buena predisposición para afrontar el nuevo desafío del trabajo en clase mediado por la modalidad de aula invertida. Al igual que sucede con los estudiantes, un grupo de profesores ha podido tomar conciencia de que el proceso de enseñanza ya no puede desarrollarse sin tener el apoyo de las herramientas que brinda la tecnología. Otro grupo no tiene la suficiente convicción para trabajar desde esta nueva perspectiva pedagógica, que a fin de cuentas nos está permitiendo transitar gradualmente hacia el nuevo Plan de Estudio de las carreras de Ingeniería del cual estas asignaturas forman parte en su Ciclo Básico y cuya implementación es inminente.

Las pruebas de evaluación que se tomarán después de la implementación del aula invertida en este primer cuatrimestre de 2022, tanto parciales como finales, permitirán investigar con mayor profundidad la idoneidad cognitiva alcanzada por los estudiantes en cada una de las asignaturas al determinar si han logrado desarrollar en alguna medida la competencia para identificar, formular y resolver problemas.

Este análisis, que se realizará en forma colaborativa con los docentes de ambas cátedras, será presentado en próximas publicaciones. Con este estudio se espera también profundizar en la reflexión sobre la propia práctica a fin de tener una actitud crítica con la misma con la intención de mejorarla para que los estudiantes logren genuinos aprendizajes matemáticos en el inicio de las carreras de Ingeniería.

Referencias

1. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería*: Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación en carreras de ingeniería de la República Argentina*, Universidad Fasta ediciones https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf. (2018). Accedido el 14 de abril de 2022.
2. Mastache, A.: *Formar personas competentes.* Ediciones Novedades Educativas. (2007).
3. Litwin, E.: *El oficio de enseñar*. Editorial Paidós. (2008).
4. Godino, J. D.; Contreras, A.; Font, V.: Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1), pp. 39-88. (2006).
5. Lage, M.; Platt, G.; Treglia, M.: Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. The Journal of Economic Education, 31(1), pp.30-43. (2000).
6. Bergmann, J.; Sams, A.: *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. Eugene: International Society for Technology in Education. (2012).
7. Coufal, K.: *Flipped learning instructional model: perceptions of video delivery to support engagement in eighth grade math.* (Tesis doctoral, Lamar University). De la base de datos ProQuest Dissertations Publishing. (umi No. 3634205) (2014).
8. Staker, H.; Horn, M.: Classifying K-12 blended learning. Clayton Christensen Institute. San Francisco, Estados Unidos. Recuperado de https://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/04/Classifying-K-12-blended-learning.pdf (2012). Accedido el 28 de abril de 2022.
9. Christensen, C.; Horn, M. y Staker, H.: *Is K-12 blended learning disruptive: An introduction of the theory of hybrids*. http://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/05/Is-K-12-Blended-Learning-Disruptive.pdf. (2013). Accedido el 28 de abril de 2022.
10. Davies, R.; Dean, D.; Ball, N. Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development*, Vol. 61, No. 4, pp. 563-580. (2013).
11. Yeganeh, B.; Kolb, D. Mindfulness and experiential learning. *OD Practitioner*, Vol. 41, No. 3, pp. 13-18. (2009).
12. Baccelli, S.; Martínez Canto, E.; Figueroa, Stella. *Idoneidad didáctica de una secuencia para curvas planas en virtualidad*. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME34. Quetzaltenango, Guatemala. (2021).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
Facultad de Ingeniería UNER
UTN PARANÁ

Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis: invariantes operatórios mobilizados por futuros engenheiros em atividades problematizadoras e contextualizadoras

Alessandro Rosa Silva[1], Gabriel Loureiro de Lima[2], Eloiza Gomes[3]
[1] Instituto Federal do Paraná – IFPR
Campus Ivaiporã, Rodovia PR 466 – Gleba Pindauva – Seção C – Parte 2. CEP: 86870-000, Ivaiporã – PR, Brasil
alessandro.rosasilva@ifpr.edu.br
[2] Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Rua Marquês de Paranaguá, 111, Bairro Consolação, CEP: 01303-050, São Paulo-SP, Brasil
gllima@pucsp.br
[3] Instituto Mauá de Tecnologia
Praça Mauá, 1, Bairro Mauá, CEP: 09580-900, São Caetano do Sul-SP, Brasil
eloiza@maua.br

Resumo. No presente artigo, de natureza qualitativa, analisam-se, a partir de pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, os invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas-em-ação) explicitados por estudantes do terceiro período da disciplina Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Engenharia Civil, ao trabalharem com um problema contextualizado referente à flexão de vigas requerendo o emprego de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis. O problema foi elaborado segundo os preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências e implementado em consonância ao Modelo Didático da Matemática em Contexto inerente a este quadro teórico. Dentre os resultados, destacam-se os seguintes conceitos-em-ação: resolver uma equação significa determinar um ou mais números que tornem a igualdade verdadeira; e resolver uma equação diferencial significa reduzir sua ordem. Salienta-se também o teorema-em-ação: se o modelo representado pela EDO é de ordem n, então, para encontrar sua solução, é necessário calcular n integrais indefinidas.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis, Teoria a matemática no contexto das ciências, Teoria dos campos conceituais, Invariantes operatórios.

Resumen. En el presente artículo, de carácter cualitativo, se analizan, a partir de los supuestos de la Teoría de Campos Conceptuales, las invariantes operativas (conceptos-en-acción y teoremas-en-acción) explicadas por los alumnos de tercer período de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral de un curso de Ingeniería Civil, al trabajar con un problema contextualizado relativo a la flexión de vigas que requiere el uso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de variables separables. El problema se elaboró según los preceptos de la Teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias y se implementó en consonancia con el Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto inherente a este marco teórico. Entre los resultados, destacan los siguientes conceptos-en-acción: resolver una ecuación significa determinar uno o más números que hacen que la igualdad sea verdadera; y resolver una ecuación diferencial significa reducir su orden. También se destaca el teorema-en-acción: si el modelo representado por la EDO es de orden n, entonces, para encontrar su solución, es necesario calcular n integrales indefinidas.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables, Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, Teoría de los campos conceptuales, Invariantes operativos.

1 Introdução

No presente artigo apresentamos parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado realizada pelo primeiro autor, sob a orientação do segundo autor, defendida em fevereiro de 2022. Neste estudo, a atenção foi direcionada à aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de Variáveis Separáveis em um curso de Engenharia Civil por meio de atividades problematizadoras e contextualizadoras, elaboradas tendo por base um problema de flexão de viga em balanço com carga concentrada em sua extremidade livre. A elaboração e a implementação de tais atividades ocorreram em consonância aos aportes da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC). Apoiados na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), explicitamos e analisamos alguns invariantes operatórios, relacionados às EDO, mobilizados pelos sujeitos da pesquisa nos momentos de resolução e discussão por eles vivenciados ao trabalhar com uma série de atividades que os conduziram à solução do problema proposto, problema este que, no âmbito da TMCC, é denominado por [1] de Evento Contextualizado (EC).

Nas próximas seções, antes de efetivamente apresentar a análise dos dados, trazemos considerações acerca de alguns pontos centrais da TMCC, da TCC que fundamentou as análises que serão apresentas e dos procedimentos metodológicos empregados para a identificação dos invariantes operatórios.

2 Subsídio teórico-metodológico para a construção e implementação do evento contextualizado: a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências

A TMCC foi desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patrícia Camarena com o objetivo de fundamentar discussões a respeito do ensino e da aprendizagem de Matemática em cursos superiores que não visam à formação de matemáticos. Nesta teoria, os processos de ensino e de aprendizagem são compreendidos como um sistema em que interatuam cinco fases: curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva, cada uma com subsídios teóricos e processos metodológicos específicos.

Na tese de doutorado [2] realizada pelo primeiro autor deste artigo, visando contextualizar o ensino de EDO na Engenharia Civil sob a perspectiva da TMCC, inicialmente, recorrendo a preceitos da fase curricular foram analisados livros didáticos utilizados como referências principais nas disciplinas não matemáticas do curso e elaborada uma coletânea de situações da Engenharia que mobilizam EDO – situações que nesta pesquisa serviram de ponto de partida para a construção do EC, concebido em tal referencial como um problema ou projeto construído com o objetivo de integrar diferentes áreas presentes no currículo de determinado curso de graduação, possibilitando, portanto, trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem [3]. Optou-se então por, dentre as situações identificadas, elaborar o EC, apresentado na Figura 1, a partir de um problema inserido no contexto do *cálculo da inclinação de uma viga quando submetida a uma carga concentrada*.

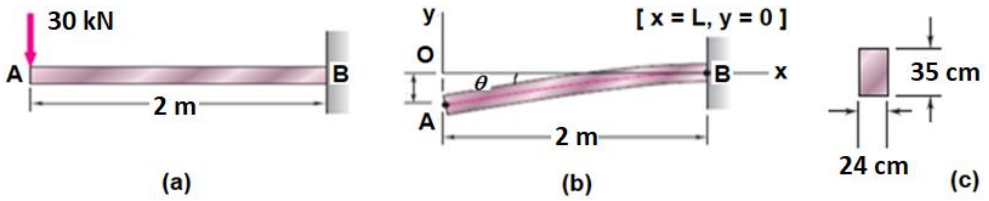
A construção deste EC foi objeto da aplicação, na tese mencionada, da fase epistemológica da TMCC, na qual adotam-se como premissas, entre outras, que: (i) da mesma forma que os contextos de outras ciências dão sentido e significado à Matemática, esta dá sentido e significado aos temas e conceitos das ciências nas quais é aplicada; (ii) a Matemática que os alunos aprenderam deverá sofrer transformações para adaptar-se às necessidades sociais de outras ciências, entrando em jogo a ideia de Transposição Contextualizada, que segundo [1] é a transformação pela qual deve passar um saber matemático para tornar-se um saber de aplicação no campo profissional. Desta forma, para a elaboração do EC, foi necessário compreender de que maneira a EDO de variáveis separáveis e o cálculo da inclinação de uma viga quando submetida a uma carga concentrada se vinculam e como deve se processar a transferência do conhecimento matemático para a situação de aplicação.

Analisou-se então como o cálculo da inclinação de uma viga submetida a uma carga concentrada é trabalhado nos materiais mais empregados nos cursos de Engenharia Civil, de que forma o conteúdo matemático de interesse do pesquisador se faz presente e como os livros tipicamente adotados nas disciplinas matemáticas dos cursos de Engenharia Civil propõem a abordagem das EDO de variáveis separáveis. Como resultado deste processo, foi elaborado o EC apresentado na Figura 1, que requer a mobilização de conhecimentos vinculados a conceitos de Matemática, estudados na Educação Básica, bem como a conceitos do Cálculo, da Física e da Resistência dos Materiais, estudados em disciplinas de Engenharia Civil. O papel do evento foi dar início a construção de conceitos fundamentais no estudo de EDO, com foco específico nas de variáveis separáveis.

Para a implementação do EC junto aos sujeitos da pesquisa, o primeiro autor recorreu às reflexões e ações intrínsecas à fase didática da TMCC, que contempla o Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo). Tal Modelo, de acordo com [1], orienta-se pelo princípio de dar protagonismo ao estudante na construção de seus

próprios conhecimentos, por meio da resolução de EC em equipes de trabalho colaborativo. Foram trabalhados, na organização didática proposta para a implementação do EC, dois eixos orientadores do MoDiMaCo: a contextualização e a descontextualização.

Com o objetivo de avaliar o valor da inclinação de uma viga AB, um engenheiro civil busca soluções que potencializem a eficiência de uma estrutura em um projeto de edificação. Para alcançar o valor da inclinação θ, também considerando os valores limites estabelecidos nas normas, o engenheiro civil reconhece necessitar de conhecimento sobre o fenômeno da flexão em vigas. A viga em estudo tem comprimento de 2 m e encontra-se engastada no ponto B. Em sua extremidade livre (ponto A), é aplicada uma carga estática de 30 kN.



Viga engastada: (*a*) com aplicação da carga estática *P*; (*b*) inclinação da viga decorrente da carga *P*; (*c*) seção transversal retangular da viga.

Considerando apenas a possibilidade de deslocamento vertical, o engenheiro civil investigou três materiais para a constituição de uma viga homogênea e com inércia constante:

1.°) aço 1020 (módulo de elasticidade de 200 GPa);

2.°) concreto (módulo de elasticidade de 25 GPa);

3.°) alumínio (módulo de elasticidade de 70 GPa).

Analisando o contexto acima, responda:

a) Em que situação a viga apresentará a menor inclinação?

b) Como o material escolhido influencia os valores de inclinação?

c) Como é possível reduzir a inclinação?

Fig. 1. O evento contextualizado, conforme apresentado em [2], p. 165-166.

Na contextualização, que é interdisciplinar, entendeu-se ser necessária, inicialmente, uma etapa de familiarização com o contexto do EC, ou seja, os alunos precisavam se apropriar de alguns conhecimentos relativos a conceitos específicos da Engenharia Civil presentes no evento. Neste momento, com auxílio do *software* Ftool[1], os estudantes puderam compreender que as mudanças de parâmetros (cargas, comprimentos, seção transversal e materiais de diversos tipos) alteram a inclinação da viga submetida à uma carga concentrada, e que esta é nula no engaste[2] e máxima na extremidade livre da viga. Na descontextualização, o pesquisador trabalhou com uma sequência de ensino levando em consideração apenas o conhecimento matemático acerca de conceitos básicos relacionados às EDO, restringindo-se ao método de separação de variáveis, no qual, subsidiado pelas ideias de [3], trabalhou de forma disciplinar somente com a Matemática, com o nível de formalismo exigido pela futura profissão do estudante. Durante o processo de resolução do EC, foram trabalhadas seis atividades, desenvolvidas em cinco encontros não presenciais de aproximadamente três horas cada. Para maiores detalhes acerca destas atividades e das estratégias didático-pedagógicas segundo as quais foram realizadas, sugerimos consultar [2].

Uma vez o EC tendo sido implementado segundo o que é preconizado na fase didática da TMCC, os dados obtidos, em termos de aprendizagens dos estudantes, foram analisados, no âmbito da fase cognitiva do mencionado referencial para a qual recorreu-se a preceitos da TCC para identificar e analisar os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes durante a resolução do evento. Na pesquisa de doutorado realizada pelo primeiro autor, este recorreu à fase docente da TMCC.

1 O *software Two-dimensional Frame Analysis Tool* (F-Tool) presta-se ao cálculo estrutural de Engenharia Civil. Foi desenvolvido na PUC -Rio se destaca pela simplicidade e vertente prática. Permite executar cálculos de estruturas planas de forma rápida e bastante intuitiva, evitando a necessidade de recorrer a programas mais complexos quando é necessário obter esforços e deformações de estruturas simples. Além disso, o *software* é gratuito e tem forte componente educativo.

2 O termo engaste, tecnicamente, pode ser utilizado sempre que um dispositivo ou parte deste fica impedido de realizar movimentos de rotação ou translação quando encaixados em uma estrutura (neste estudo o termo está se refere a extremidade não livre da viga em balanço).

3 Subsídio teórico para a análise dos dados: a Teoria dos Campos Conceituais

Para as análises realizadas na fase cognitiva da TMCC, como ressaltam [4], os pesquisadores têm tipicamente recorrido também, articuladamente à TMCC, a outras teorias cognitivistas. Uma destas é a TCC de [5]. Neste artigo, assim como o primeiro autor procedeu em sua tese, recorremos à TCC, considerando, que os eventos contextualizados da TMCC são equivalentes às situações a que Vergnaud faz referência.

Segundo [6], o conhecimento está organizado em campos conceituais que são conjuntos "de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados" (p. 40). Assim, os professores devem fornecer aos estudantes situações problematizadoras, entendidas como tarefas ou conjuntos de tarefas, que possuam significado para o estudante e que, em um campo conceitual específico, podem variar em suas complexidades. A finalidade é a de desenvolver potencialidades para o surgimento e aquisição do conceito e sua estrutura. As atividades de ensino devem ser diversificadas de modo a permitir que estudante empreguem conhecimentos relativos a um determinado conceito em diversas situações e teste seus modelos explicativos em diversos contextos.

De acordo com [7], para se estudar e compreender como os conceitos evoluem na mente de um sujeito a partir das experiências por ele vivenciadas é preciso considerar o conceito (C) como uma terna de conjuntos: $C = (S, I, R)$. Nesta terna, o $\boldsymbol{S}$ indica o conjunto de situações que dão significado e utilidade ao conceito; o $\boldsymbol{I}$ denota o conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) associados ao conceito que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos de forma a analisar e dominar aquelas situações e, por fim, o $\boldsymbol{R}$ diz respeito ao conjunto de significantes, isto é, às representações simbólicas, linguísticas, gráficas ou gestuais que podem ser empregadas para representar os invariantes, as situações e os procedimentos para que se possa lidar com eles. Outra noção fundamental na teoria de Vergnaud é a de esquema, que o autor em [8] define como "a organização invariante do comportamento para uma classe de situação dada" (p. 2). Analisando os esquemas mobilizados pelos estudantes ao trabalhar com determinada situação, é possível identificar os conhecimentos-em-ação do educando, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a ele operacionalizar suas ações. O autor também afirma que: "a confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se, em última análise, no conhecimento que ele possui, explícito ou implícito, das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver" (p. 3).

Segundo [9], são os invariantes operatórios, uma das componentes dos esquemas, quem dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais. Os invariantes operatórios constituem a base conceitual implícita do sujeito, que o permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais adequadas.

Identificam-se dois tipos de invariantes operatórios: os *conceitos-em-ação* e os *teoremas-em-ação*. Os conceitos-em-ação são objetos, propriedades e relações ou categorias de pensamento considerados relevantes entre os que compõem o repertório dos sujeitos que serão selecionados para determinada ação. Articulam-se, por meio dos teoremas-em-ação, proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Tanto os conceitos-em-ação como os teoremas-em-ação permanecem, em sua maioria, implícitas nas ações do sujeito, mas podem também tornarem-se explícitos. Um conceito-em-ação não é um conceito e um teorema-em-ação não é um teorema, porque, na ciência, os conceitos e teoremas são explícitos e suas veracidades podem ser discutidas. Mas conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos.

Neste artigo, o objetivo é explicitar e analisar, com base nos dados apresentados em [2], alguns dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação utilizados pelos sujeitos da pesquisa durante uma das atividades que integraram o processo que conduziu à resolução do EC elaborado, especificamente aqueles vinculados a conhecimentos acerca de conceitos essenciais para a compreensão das EDO (direcionados especificamente ao método de separação de variáveis).

4 Metodologia para a coleta e análise dos dados

Participaram voluntariamente deste estudo 10 estudantes do terceiro período do curso de Engenharia Civil de uma instituição particular, matriculados na disciplina de Cálculo III, que ainda não possuíam conhecimentos acerca dos conceitos fundamentais de equações diferenciais. Já haviam cursado Cálculo I e II e não eram alunos do pesquisador. Compareceram aos cinco encontros não presenciais, de aproximadamente três horas cada, organizados para que o EC fosse resolvido.

No primeiro encontro, explicitou-se detalhadamente aos estudantes a proposta de trabalho e propôs-se uma discussão sobre o conhecimento de que dispunham sobre o *software* Ftool, além de ter sido apresentado o EC com o qual iriam trabalhar. No segundo encontro, os estudantes, em grupos, puderam simular no *software* Ftool uma viga na condição de engaste, inclusive adotando comprimentos, formas e espessuras, além de escolher diversos tipos de materiais e de carregamento. Já no terceiro encontro, individualmente realizaram uma pesquisa desencadeada por algumas questões norteadoras que os auxiliaram a familiarizar-se com conhecimentos relativos a conceitos envolvidos no estudo de flexões de vigas. Para o quarto encontro, o pesquisador convidou um profissional de Engenharia Civil que discutiu com os sujeitos a respeito da importância do estudo de vigas no contexto da construção civil e se dispôs a responder dúvidas que ainda não haviam sido esclarecidas nos encontros anteriores. No quinto encontro e último encontro foram propostas questões a serem respondidas individualmente, visando introduzir o estudo de EDO (direcionado especificamente ao método de separação de variáveis), com o nível de rigor e formalismo matemático adequados ao que se espera na formação de um engenheiro.

Neste artigo, as análises apresentadas referem-se exatamente aos momentos de discussões vivenciados durante a atividade deste quinto encontro, composta por uma série de questões que são apresentadas na Figura 2.

Por meio da pesquisa que vocês realizaram, puderam perceber que há modelos matemáticos que são utilizados para calcular o valor da inclinação de uma viga em balanço. Passaremos a investigar o conceito matemático envolvido nesses modelos:

a) Qual o significado de um modelo matemático?

b) Defina EDO.

c) O que significa resolver uma equação diferencial?

d) Retome as simulações realizadas no Ftool. O que você pode avaliar a respeito do momento fletor M ao *plotar* no Ftool seu diagrama?

e) Considere agora as três vigas mencionadas no enunciado do EC. Represente gráfica e algebricamente a função *M* do momento fletor para cada uma dessas vigas.

f) Faça um estudo a respeito dos modelos que possibilitam calcular a inclinação de uma viga em balanço, determinando a ordem e o grau das equações presentes em cada um desses modelos, classificando-as em EDO (Equação Diferencial Ordinária) ou EDP (Equação Diferencial Parcial).

g) Como a partir da equação $E.I\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$ você obteria um sistema de equações diferenciais de primeira ordem fazendo a mudança de variável $\frac{dv}{dx} = \theta$?

h) Analise o modelo de resolução de EDO denominado "separação de variáveis" e avalie se é apropriado para resolver a equação que permite calcular a inclinação de uma viga em balanço. Justifique.

i) Qual o significado, no contexto do EC, de $\theta(2)$=0?

j) Se considerarmos $\theta(2) = 0$ a resolução da equação diferencial que nos permite calcular a inclinação de uma viga em balanço, teremos uma solução particular ou uma solução geral para tal equação? Justifique.

k) Se levarmos em consideração os dados do EC e optarmos pelo modelo representado pela equação $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{E.I}$ para a resolução do EC, verifique se as funções expressas algebricamente por: $\theta_1(x) = -\frac{15.x^2}{E.I}$ e $\theta_2(x) = -\frac{15.x^2}{E.I} + \frac{60}{E.I}$ podem ser soluções dessa equação. Justifique.

l) A partir do que foi discutido, calcule a medida da inclinação de cada viga indicada no enunciado do EC e apresente a menor medida da inclinação.

m) Qual seria a solução particular da equação diferencial se modificássemos a referência da viga 1 no EC, ou seja, se tomássemos $x = 2m$ em sua extremidade livre e $x = 0$ no engaste?

Fig. 2. Atividade de introdução ao conceito de EDO, segundo [2], p. 176-177.

Os dados foram coletados por meio de gravação em áudios e vídeos, produções escritas dos sujeitos e de anotações feitas pelo pesquisador durante a aplicação desta atividade. A partir deste conjunto de documento, identificamos, nas manifestações dos estudantes durante os debates oportunizados durante ou após a resolução das questões, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação aos quais estavam implicitamente recorrendo.

5 Alguns conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes durante a implementação do EC

Nesta seção, o objetivo é explicitar os invariantes operatórios detectados em diferentes relatos dos estudantes durante a implementação do EC. Inicialmente, no Quadro 1, apresentamos partes de um diálogo que ocorreu durante a resolução do item (a) da atividade por meio da qual almejava-se trabalhar elementos das EDO de variáveis separáveis. O pesquisador, primeiro autor deste artigo, indagou aos sujeitos sobre o significado de um modelo matemático.

Quadro 1. Invariante operatório referente ao significado de modelo matemático, elaborado a partir de [2], p. 219-220)

Diálogo ocorrido	Invariantes operatórios
Aluno A5. ***O modelo é 'tipo' uma fórmula matemática que serve para resolver um problema real****. Por exemplo, na Física tem o modelo de pressão* $P = \frac{F}{A}$ *, de velocidade* $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$*, aceleração* $a = \frac{\Delta V}{\Delta T}$*.* ***Tem também as equações da viga 'pra' achar a inclinação de qualquer viga*** *que 'a gente' pesquisou, bom é isso que entendi sobre modelo.*	**conceito-em-ação**: o modelo matemático é uma equação que resolve determinado problema.
Aluno A2: Eu também entendi mais ou menos isso Alessandro, só que tem o seguinte, ***aqueles modelos de equações não 'faz' o cálculo 'pra' qualquer viga*** *'viu'.* *Pesquisador: Como assim? Explica por favor isso para nós.* *Aluno A2: Eu dei uma olhada no YouTube, só lembro da parte que o 'cara' fala que* ***as equações não funcionam, 'tipo', se a viga na ponta for mais fina e na base for mais grossa. Tem também, se a viga for feita de dois materiais diferentes a equação não funciona****.*	**conceito-em-ação**: a adequação e a validade de um modelo matemático dependem das hipóteses que estão sendo assumidas.

No momento em que este diálogo se deu, a proposta do primeiro autor do artigo era efetivamente dar início ao estudo das EDO, explorando o que os estudantes haviam entendido a respeito do significado de um modelo matemático. Essa é uma noção fundamental na Engenharia e, especialmente nesta área de conhecimento, está estreitamente vinculada ao objeto matemático equação diferencial, uma vez que muitos dos fenômenos estudados pelos engenheiros são modelados por equações diferenciais. É essencial, portanto, que os estudantes compreendam com clareza o que é um modelo matemático.

Nota-se, por meio do Quadro 1, que, enquanto o aluno A5 explicita compreender um modelo como algo que resolve determinado problema, sem revelar, neste conceito-em-ação manifestado, a necessidade de levar em consideração determinadas hipóteses para que o modelo seja adequado, o aluno A2, a partir do conceito-em-ação que pudemos depreender de sua manifestação, percebeu que as equações diferenciais relacionadas ao modelo por meio do qual é possível determinar a inclinação de uma viga podem ser utilizadas somente sob determinadas condições, as quais o primeiro autor, durante a intervenção, havia explorado com os estudantes e que são: o material deve ser homogêneo, deve apresentar todas as propriedades físicas e mecânicas em todas as direções e ser regido pela lei de Hooke; a viga deve admitir um plano de simetria em que atuam todos os carregamentos; o deslocamento lateral deve ser nulo, entre outras.

Vejamos agora, no Quadro 2, a continuação do diálogo apresentado no quadro anterior, portanto, ainda no âmbito dos debates relativos ao item (a), quando os estudantes discutem a respeito da quantidade de vezes que precisariam recorrer à integração para determinar a inclinação de uma viga ao optar por cada um dos modelos disponíveis para isso. Este diálogo evidencia um teorema-em-ação diretamente relacionado à percepção de um dos sujeitos da pesquisa acerca de qual informação é dada pela ordem de uma EDO.

Quadro 2. Invariante operatório referente ao que indica a ordem de uma EDO, elaborado a partir de [2], p. 219-220)

Diálogo ocorrido	Invariante Operatório
PESQUISADOR: Qual modelo vocês escolheriam para calcular a inclinação da viga em balanço? E por quê? *ALUNO A5: A mais fácil 'pra' mim é a do momento de área, é só integrar uma vez.* *Aluno A7: Nada disso, 'pra' usar a* ***equação*** $\boldsymbol{E.I\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = M(x)}$ *é só integrar uma vez também 'uai'!* *ALUNO A5: Claro que não!* ***Tem que integrar duas vezes, ela não tem duas derivadas?*** *ALUNO A7: Não, pode 'vê' que se você integrar uma vez e substituir por* θ *já vai achar a inclinação direto. Agora se integrar duas vezes do jeito que você falou, vai achar é o deslocamento 'uai'.* *ALUNO A5: Ah 'tá!' Entendi, integrando uma vez vai achar* $\frac{d\vartheta}{dx}$ *aí 'joga'* θ *e já acha. É mais a do momento de área, sai mais rápido.* *ALUNO A7: Sim, é isso mesmo.*	**teorema-em-ação**: se o modelo representado pela EDO é de ordem n, então, para encontrar sua solução, é necessário calcular n integrais

Percebe-se, a partir do teorema-em-ação depreendido da manifestação do aluno A5 e destacado no Quadro 2, que este estudante associou equivocadamente o termo "quantidade de derivadas" com a ordem de uma EDO. Nota-se inicialmente que, para ele, calcular a inclinação da viga em balanço significava aplicar o procedimento (esquema) baseado na integral indefinida o mesmo número de vezes que a "quantidade de derivadas" presente no modelo. Contrariando essa ideia, o aluno A7 argumentou que a EDO $E.I\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = M(x)$ também poderia ser resolvida utilizando apenas uma integração. Ao mencionar "pode ver que se você integrar uma vez e substituir por θ já vai achar a inclinação direto", compreendemos que o estudante A7 está fazendo referência, para justificar seu argumento, ao método de reduzir equações diferenciais de segunda ordem a equações diferenciais de primeira ordem fazendo a mudança de variável $\frac{d\vartheta}{dx} = \theta$. Este método se tornou explícito para A5 quando este disse: "Ah 'tá'! Entendi, integrando uma vez vai achar $\frac{d\vartheta}{dx}$ aí 'joga' θ e já acha". Sua percepção de ter que recorrer à integração apenas uma vez ao empregar o modelo representado pela EDO $E.I\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = M(x)$ para encontrar a inclinação da viga em balanço ocorreu quando o aluno A7 se manifestou. Isso mostra a importância das discussões conjuntas em sala de aula e das interações entre os estudantes, para que se deem conta de significados até então despercebidos. Entendemos ser imprescindível que o aluno tenha oportunidade de interagir com os colegas e com o professor para promover seu desenvolvimento cognitivo.

Passemos então, no Quadro 3, à análise de um diálogo ocorrido quando os estudantes e o pesquisador discutiam, no item (c), acerca do que significa resolver uma equação diferencial.

Quadro 3. Invariante operatório referente ao que significa resolver uma equação diferencial, elaborado a partir de [2], p. 223-224)

Diálogo ocorrido	Invariante Operatório
Aluno A4: Significa que ***tem que integrar para diminuir o expoente da derivada para achar o resultado****.*	**conceito-em-ação**: resolver uma equação diferencial significa diminuir sua ordem.
Pesquisador: Que resultado seria esse? *Aluno A4:* ***Determinar um valor 'uai', pode ser em graus ou radianos para inclinação da viga.*** *Aluno A1: É muito esquisito isso de resolver equação e achar funções na resposta.* *Pesquisador: Por que você diz isso?* *Aluno A1: Porque* ***no final a gente sempre acha um valor****, igual a gente faz na equação com Bhaskara, exponencial, nas equações da Física.*	**conceito-em-ação**: resolver uma equação significa determinar um ou mais números que tornem a igualdade verdadeira.

Ao afirmar que resolver uma equação diferencial "*significa que tem que integrar para diminuir o expoente da derivada para achar determinar o resultado"*, o aluno A4 ainda não compreendia o que significa resolver uma equação desse tipo. Ao lhe questionar que "resultado" seria este, o primeiro autor do artigo tinha por intenção entender se o estudante pensava em uma função como solução de uma equação diferencial, e sua resposta revelou

que ele se referia a um número (no caso, uma medida dada em graus ou radianos). A afirmação "é muito esquisito isso de resolver equação e achar funções na resposta", do aluno A1, nos permite perceber um incômodo frente ao fato de que a solução de uma equação diferencial é uma função. Quando acrescentou que "*porque no final a gente sempre acha um valor, igual a gente fazia na equação do segundo grau, exponencial, nas equações da Física"*, interpretamos que, em sua visão, resolver uma equação diferencial é encontrar valores numéricos, do mesmo modo como fazia com as equações estudadas na Educação Básica. A não compreensão de que soluções de equações diferenciais são funções é apontada também em outras pesquisas, dentre as quais destacamos a de [10], na qual salienta-se que, dada a dificuldade dos estudantes em compreender o conceito de função - tão bem documentada na literatura -, não é inesperado que os estudantes enfrentem entraves com a noção de que as soluções de equações diferenciais são funções. Estes, segundo o mesmo autor, são agravados pelas experiências anteriores dos estudantes com as funções e com a palavra "resolver", que até então indicava a eles a necessidade de aplicar procedimentos nas equações para que encontrassem um ou mais números desconhecidos como soluções.

A seguir, por meio do Quadro 4, destacamos reflexões relacionadas às possibilidades de diferentes soluções particulares para uma equação diferencial, vivenciadas na resolução do item (m) da atividade.

Quadro 4. Invariante operatório referente às soluções particulares de uma equação diferencial, elaborado a partir de [2], p. 240)

Diálogo ocorrido	Invariante Operatório
ALUNO A3: A 'minha' solução particular deu $E \cdot I \cdot \theta = -15x^2$. *ALUNO 7: Você fez usando* $x = 0$ *na base da viga? ALUNO A3: Sim e deu essa solução. ALUNO A7: Não tem como 'dá' isso não! Isto está certo Alessandro? PESQUISADOR: Por que você acha que não é a essa solução? ALUNO A7: A minha deu muito diferente, o resultado deu* $E \cdot I \cdot \theta = \frac{-15x^2}{E.I} + \frac{60x}{E.I}$. *PESQUISADOR: Como que você fez? ALUNO A7: Primeiro eu achei a 'função do primeiro grau' pelos pontos dados, e o 'meu'* M *deu* $-30x + 60$ *e depois 'joguei' no modelo do momento de área, separei as variáveis e resolvi por integral e achei essa solução particular. ALUNO A3: Não, eu acho que 'tá' errado isso sim, a função do momento fletor é só* $-30.x$ *não tem esse 60. Pesquisador: Explica por que o seu momento fletor deu* $-30.x$. *ALUNO A3: Não precisa nem fazer conta 'pra' achar, essa viga com carga pontual* ***o momento é a carga vezes x, 'igual eu vi' no livro e nisso o 'b' vai ser zero sempre.***	**teorema-em-ação**: Em uma viga com carga pontual, o momento é sempre dado pela carga P vezes x, sendo x a distância da viga ao ponto de engaste

Por meio do Quadro 4, nota-se que o aluno A3 apontou a expressão $E \cdot I \cdot \theta = -15x^2$ como solução particular da EDO, considerando a função do momento fletor como $M = -30x$. Entretanto, tal função não corresponde à representação algébrica do momento fletor M se forem consideradas as referências oferecidas na questão: $x = 0$ no engaste e $x = 2\ m$ na extremidade livre da viga em balanço. Nota-se que esse equívoco ocorreu porque, ao tentar encontrar a função do momento fletor, o estudante talvez tenha levado em consideração a expressão $M = -P \cdot x$, pesquisada por ele no livro de [11], entendendo que tal expressão independeria da referência adotada nesse contexto de viga em balanço. É necessário aqui chamar atenção, pois há teoremas-em-ação que constituem proposições verdadeiras para algumas situações, mas que, se aplicados a outras, falham. O teorema-em-ação considerado por A3, conforme indicamos no Quadro 4, funcionará se adotarmos como referências $x=0$ na extremidade da viga e $x=2\ m$ no engaste, situação em que teremos a representação algébrica da função polinomial de primeiro grau $M=-30x$, com coeficiente linear b nulo. No entanto, se invertermos as referências para essa viga, tomando $x=0$ no engastamento e $x=2\ m$ na extremidade, conforme solicitado no item (m) da questão, teremos *b não nulo e outra função polinomial de primeiro grau,* $M=-30x+60$. Aventamos que, ao considerar esse teorema-em-ação em seus procedimentos, o estudante entendeu que, independentemente das referências adotadas, isto é, das condições iniciais – algo fundamental de ser levado em consideração na obtenção da solução particular de uma equação diferencial – a solução particular da EDO seria $M=-30x$, que não corresponde à função do momento fletor solicitada no item em foco. Com isso, percebe-se o caráter local, não universal, desse teorema-em-ação, o que constitui, de acordo com a TCC, sua principal diferença se comparado com teoremas matemáticos cientificamente comprovados.

6 Algumas reflexões

Embora tenhamos, neste artigo, nos fixado nos invariantes operatórios que puderam ser explicitados por meio do EC elaborado e implementado, nestas reflexões finais, consideramos pertinente apresentar algumas observações mais abrangentes acerca do trabalho com este tipo de situação. Em primeiro lugar, salientamos que o trabalho com o EC promoveu um ambiente que instigou nos graduandos a curiosidade, promovendo motivação e autonomia, bem como também viabilizou discussões e interações entre alunos e entre estes e o pesquisador (primeiro autor deste artigo), as quais trouxeram contribuições importantes que favoreceram a aprendizagem de conceitos fundamentais no estudo de EDO, com foco específico no método de variáveis separáveis.

Destacamos que a estratégia didática empregada durante a coleta de dados para a pesquisa da qual este artigo é um dos frutos, ao conduzir os estudantes ao trabalho com conceitos envolvidos no estudo de flexão de vigas, oportunizou a eles uma possibilidade de familiarizarem-se, de maneira articulada, com conhecimentos, tanto da Matemática quanto da Engenharia Civil, necessários para a compreensão do processo de construção do modelo matemático que possibilita calcular a inclinação de uma viga em balanço.

Por fim, salientamos que, além de, conforme apresentamos detalhadamente neste artigo, possibilitar que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação fossem explicitados pelas manifestações dos estudantes, a análise dos dados coletados durante a pesquisa de doutorado do primeiro autor, nos permite afirmar que as atividades que compuseram a estratégia didática problematizadora e contextualizadora a que ele recorreu possibilitaram a compreensão de pré-requisitos da Matemática e da Física importantes para o estudo de flexões de vigas e também a construção de conhecimentos relacionados a conceitos envolvidos nesta temática e articulados às EDO que podem resolvidas pelo método de separação de variáveis.

Referências

1. Camarena G., P. A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el contexto de las ciencias”. *Innovación Educativa*, v. 13, n. 62, p. 17-44, 2013.
2. Silva, A, R. *Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da teoria a Matemática no contexto das ciências*. Tese (doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.
3. Camarena, P.: Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, Vol. 19, No. 2, pp. 01-26 (2017) DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26.
4. Camarena, P.; Trejo, E. La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los invariantes operatorios. In: Gutiérrez, R. D; Ceniceros, C. D.; Méndez, Z. A. (Eds.). *Cognición y Procesos de Aprendizaje*. México: Red Durango de Investigadores Educativos A.C. p. 130-163, 2011.
5. Vergnaud, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.
6. Vergnaud, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In*:* Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum, 1982. p. 39-59.
7. Vergnaud, G. Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d’un example: les structures additives. *Récherche en Didactique de la Physique: Atelier International*, 1. Actes... [S.l.]: CNRS, 1984. p. 391-402. (Conférence invitée.).
8. Vergnaud, G. Teoria dos campos conceituais. In: Nasser, L. (Ed.). In: *Seminário Internacional de Educação Matemática*, 1, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: SIEM, 1993. p. 1-26.
9. Vergnaud, G. et al. Epistemology and psychology of mathematics education. In*:* Nesher, P.; Kilpatrick, J. (ed.). *Mathematics and cognition: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
10. Rasmussen, C.L. New directions in differential equations: a framework for interpreting students’ understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 20, n. 1, p. 55-87, 2001. Disponível em: < https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00062-1>. Acesso em: 12 nov. 2021.
11. Hibbeler, R.C. *Resistência dos materiais*. Rio de Janeiro: Person Prentice Hall, 2013.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
Facultad de Ingeniería UNER
UTN PARANÁ

Representações semióticas de objetos matemáticos e seus significados em uma Transposição Contextualizada na Transferência de Calor

Rieuse Lopes Pinto[1], Gabriel Loureiro de Lima[2], Barbara Lutaif Bianchini[2]
[1] Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES
Campus Universitário Prof. Darcy Ribeiro, Av. Prof. Rui Braga, s/n - Vila Mauriceia, CEP: 39401-089, Montes Claros - MG, Brasil.
rieuse.lopes@unimontes.br
[2] Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Rua Marquês de Paranaguá, 111, Bairro Consolação, CEP: 01303-050, São Paulo-SP, Brasil
{gllima, barbara}@pucsp.br

Resumo. O objetivo deste artigo, recorte de uma tese de doutorado desenvolvida pela primeira autora, é analisar, sob a perspectiva de alguns aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os significados que os sujeitos da pesquisa atribuíram, durante o processo de resolução de um problema articulando as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral e Transferência de Calor, às representações semióticas de objetos matemáticos. O problema foi elaborado e implementado em consonância aos preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências e os dados analisados foram obtidos a partir de diálogos ocorridos entre a pesquisadora, outras duas docentes que participaram da experimentação e dos estudantes (sujeitos da pesquisa) durante as diferentes etapas de resolução do problema. Os resultados indicam que, em contextos extra matemáticos, a compreensão dos significados atrelados aos símbolos empregados para representar um objeto matemático em um determinado registro semiótico é ainda mais fundamental do que em contextos puramente matemáticos.

Palavras-chave: Educação matemática no ensino superior, Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis, Transferência de calor, Teoria a matemática no contexto das ciências, Teoria dos registros de representação semiótica.

Resumen. El objetivo de este artículo, que forma parte de una tesis doctoral desarrollada por el primer autor, es analizar, desde la perspectiva de algunos aspectos de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, los significados que los sujetos de la investigación dieron, durante el proceso de resolución de un problema que articulaba las asignaturas Cálculo Diferencial e Integral y Transferencia de Calor, a las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. El problema fue elaborado e implementado según los preceptos de la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias y los datos analizados se obtuvieron a partir de los diálogos que tuvieron lugar entre el investigador, otros dos profesores que participaron en la experiencia y los alumnos (sujetos de la investigación) durante las diferentes etapas de la resolución del problema. Los resultados indican que, en contextos extra-matemáticos, la comprensión de los significados asociados a los símbolos utilizados para representar un objeto matemático en un determinado registro semiótico es aún más trascendente que en contextos puramente matemáticos.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas en la educación superior, Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables, Transferencia de calor, Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, Teoría de los registros de representación semiótica.

1 Introdução

Apresentamos neste trabalho parte dos dados obtidos em uma tese de doutorado, que teve como propósito analisar a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis em um Evento Contextualizado (EC)[1] desenvolvido com 21 estudantes de um curso de Engenharia Civil de uma instituição particular do estado brasileiro de Minas Gerais. O EC, implementado em consonância aos preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC), desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patricia Camarena Gallardo, foi concebido a partir de um problema no contexto da transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas, organizado didaticamente como uma sequência de ensino englobando uma série de conceitos matemáticos e físicos.

Neste artigo, optamos por, a partir de trechos de transcrições de diálogos ocorridos durante o processo de resolução do EC entre os sujeitos da pesquisa, a primeira autora deste artigo (também autora da tese) e outras duas docentes que participaram da intervenção realizada, explicitar e analisar, embasados pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval, os significados que os sujeitos da pesquisa atribuíram às representações semióticas de objetos matemáticos e refletir a respeito do quão essencial é uma compreensão efetiva de tais significados em contextos extra matemáticos, como é o caso da Transferência de Calor.

Nas duas próximas seções, trazemos considerações acerca dos referenciais teóricos que subsidiaram a pesquisa realizada. A TMCC nos subsidiou, dos pontos de vista teórico e metodológico, para a elaboração e a implementação do EC. Aspectos da TRRS, por sua vez, foram empregados para a análise dos dados.

2 A TMCC: subsídios teórico-metodológicos para a elaboração e implementação do EC

Desenvolvida tendo por foco subsidiar reflexões acerca do ensino e da aprendizagem em graduações que não visam formar matemáticos, mas das quais esta ciência está a serviço. Na TMCC, considera-se o cenário de ensino e de aprendizagem como um sistema complexo composto por subsistemas – as chamadas fases da teoria: *curricular*, *didática*, *epistemológica*, *docente* e *cognitiva* – que, como tal, estão intrinsecamente vinculados. Cada uma das fases da TMCC pressupõe subsídios teóricos específicos, bem como procedimentos metodológicos característicos [1].

Para a elaboração do EC em tela neste artigo, que integra Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis e noções da Transferência de Calor, recorreu-se a preceitos de duas das fases mencionadas, a saber: curricular e epistemológica. Por sua vez, sua implementação foi subsidiada pelo que é preconizado na fase didática e, para tal, foram elaboradas atividades auxiliares visando guiar os sujeitos rumo à resolução do EC.

Um aspecto fundamental da TMCC, ao qual também se recorreu neste trabalho, é a noção de *Transposição Contextualizada*, que, segundo [1], caracteriza-se como a transformação que sofre um saber matemático para tornar-se um saber de aplicação no campo profissional. Entende-se como essencial que os estudantes compreendam de que forma ocorre a aplicação de determinados conhecimentos matemáticos em situações extra matemáticas e que, portanto, desenvolvam a habilidade de realizar a transposição contextualizada.

O EC elaborado a partir de um problema identificado no livro *Transferência de Calor e Massa* [2], refere-se, como apresentado na Figura 1, à uma situação na qual há transferência de calor do ambiente externo para o interior de paredes planas de alvenaria e almeja-se analisar, do ponto de vista matemático, o conforto térmico dessas edificações, por meio da resolução de EDO de variáveis separáveis.

O processo de resolução do EC foi conduzido de acordo com os preceitos do Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo) proposto na fase didática da TMCC. Conforme aponta [3], nesse modelo, o estudante é o protagonista de sua aprendizagem e deve construir conhecimentos por meio do trabalho colaborativo, em equipes, com outros colegas, assumindo o professor o papel de mediador do processo. Para maiores detalhes, sugerimos a consulta a [4], tese da primeira autora.

Os sujeitos da pesquisa foram 21 estudantes do primeiro ano da graduação em Engenharia Civil de uma instituição particular do estado de Minas Gerais, que ainda não possuíam conhecimento dos conceitos fundamentais de Equações Diferenciais. Os participantes foram organizados em sete grupos com três integrantes. O trabalho com o EC foi desenvolvido, conforme esquematizado na Figura 2, por meio de duas situações contemplando, cada uma delas, três atividades, realizadas em seis encontros de aproximadamente 4 horas cada um.

1 Nome dado, no referencial teórico empregado, a um problema integrando disciplinas matemáticas (no caso da pesquisa relatada neste artigo, Cálculo Diferencial e Integral) e não matemáticas (no caso em estudo, Transferência de Calor).

Conforto térmico em uma edificação

Visando melhorar o conforto térmico de ambientes não climatizados, reduzir o dispêndio de energia elétrica em ambientes climatizados e racionalizar o consumo de energia, o engenheiro civil busca soluções que potencializam a eficiência energética de um projeto de edificações. Para alcançar o conforto térmico desejado, é necessário o conhecimento a respeito da transferência de calor do ambiente externo para o interior das edificações. Assim, apresentamos três paredes construídas da seguinte forma:

PAREDE 1: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm da mesma argamassa. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 2: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm de gesso. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 3: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 1,5 cm da mesma argamassa. Nessa parede, foi colado na face externa e interna um poliestireno expandido ou *expanded polystyrene* (EPS) de 2 cm. A espessura total da parede é 17 cm.

De acordo com as especificidades de cada parede, respondam:

a) Qual das três paredes apresenta maior conforto térmico em uma edificação? Por quê?

b) Qual é o comportamento térmico dos materiais de cada parede?

c) O que é preciso fazer para reduzir as perdas térmicas em uma edificação?

Figura 1. O Evento Contextualizado construído. Fonte: [4, p. 118-119].

Situação 1: conforto térmico em uma edificação

Atividade 1: apresentação do EC (pelo professor) e conjecturas iniciais (pelos estudantes)	**Atividade 2**: realização de pesquisa, pelos estudantes, acerca das propriedades termofísicas de cada material que compõem as paredes e de noções centrais relacionadas à condutividade térmica e à transferência de calor	**Atividade 3**: aula ministrada conjuntamente pela pesquisadora (professora de Cálculo), por uma professora de Física e por uma professora de Transferência de Calor, com o objetivo de esclarecer as dúvidas surgidas durante a realização da Atividade 2

Situação 2: realização da experiência e resolução de EDO

Atividade 1: no laboratório de materiais de construção foram instalados sensores de temperatura nas três paredes construídas pela pesquisadora conforme as especificações presentes no enunciado do EC e foram coletados dados que permitiram fazer predições de aquecimento máximo e do tempo necessário para que cada uma das paredes alcançasse a isotermia de aquecimento e de resfriamento	**Atividade 2**: resolução de uma questão presente na edição de 2014 do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (que tem por objetivo acompanhar o processo de aprendizagem e o desempenho acadêmico dos estudantes em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares do respectivo curso de graduação) e que trata de uma situação semelhante à presente no EC .	**Atividade 3**: aula sobre EDO ministrada pela pesquisadora, na qual foram abordados: o número de variáveis independentes da função incógnita; o número de funções incógnitas; a estrutura, a ordem e o grau da equação; solução geral e solução particular; verificação se uma função é solução de uma EDO dada; transformação de uma equação da forma normal para a forma diferencial e vice-versa; identificação de diversos tipos de Equações Diferenciais e resolução de EDO de variáveis separáveis

Figura 2. Síntese da organização da resolução do EC. Fonte: elaborado pelos autores a partir de [4].

Os dados foram coletados por meio de gravação de áudio das discussões dos sujeitos-em-ação para responderem às questões propostas, observação participante, registros escritos contendo o desenvolvimento das atividades,

além de anotações feitas pela pesquisadora (primeira autora do artigo) durante a aplicação dessas atividades. Passamos então para a apresentação dos aspectos centrais da TRRS que subsidiou a análise dos dados coletados.

3 A TRSS: subsídio para análise de diferentes registros de representação semiótica

Na TRRS, concebida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval a partir de seus estudos em Psicologia Cognitiva no *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREM) de Estrasburgo, na França, na década de 1980, aborda-se, segundo [5, p. 127], sob o ponto de vista cognitivo, "a relação entre o pensamento humano, a semiose e o desenvolvimento da atividade matemática", considerando-a primordial para a organização das situações de ensino e de aprendizagem da Matemática, uma vez que não é possível acessar os objetos dessa ciência a não ser por suas representações em diferentes sistemas semióticos como, por exemplo, o algébrico, o geométrico, o numérico, o gráfico, o da língua natural, o tabular etc.

Para [6], as dificuldades de aprendizagem da Matemática estão relacionadas, muitas vezes, ao fato de que o estudante não consegue fazer a distinção entre um objeto matemático e sua representação, diferenciação importante para a compreensão em Matemática, a qual está vinculada a uma capacidade de articulação de representações em diferentes registros. Toda comunicação em Matemática se estabelece com bases nessas representações, que são necessárias não somente para esse fim, mas igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento [7, p. 269].

Como salienta [6], para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir três atividades cognitivas fundamentais, ligadas a semiose: as operações cognitivas de *formação de uma representação* identificável (identificação do objeto matemático representado), os *tratamentos* (quando se trabalha com representações do mesmo sistema semiótico) e as *conversões* (quando se opera com representações de sistemas semióticos diferentes).

De acordo com [6], para que uma representação seja identificável, é necessário, baseando-se em um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo representado. As operações cognitivas de *formação de uma representação* em um mesmo registro semiótico têm o objetivo de expressar uma representação mental ou, ainda, recordar ou evocar um objeto real. O *tratamento*, por sua vez, é uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação em outra equivalente, porém permanecendo no mesmo registro semiótico abordado inicialmente, ou seja, é uma transformação interna a um registro do mesmo sistema semiótico. Por fim, a *conversão* é um processo de transformação de uma representação de um objeto matemático em um registro semiótico para outra representação do mesmo objeto, mas em um sistema semiótico diferente.

O mesmo autor, em [8], afirma que, nas atividades matemáticas, podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e que a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo possibilita a construção do conhecimento. Nesse sentido, o autor assegura que os fracassos dos estudantes ou possíveis bloqueios aumentam quando é necessária a mudança do registro no qual o objeto matemático está sendo representado ou quando a mobilização simultânea de representações em dois registros distintos é requerida. "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação" [8 p.14].

A conversão, segundo [8], é a atividade de transformação representacional essencial, uma vez que é ela quem conduz efetivamente aos mecanismos que subsidiam a compreensão em Matemática. Além disso, escolher o registro mais apropriado para aplicar os tratamentos nas respectivas representações de um objeto matemático implica a desenvoltura do raciocínio e, como resultado, leva à resolução dos problemas matemáticos e, consequentemente, à aprendizagem [9].

Neste artigo, nosso foco é explicitar os significados que os sujeitos da pesquisa atribuíram, durante a resolução do EC, às representações semióticas de objetos matemáticos nele envolvidos e refletir a respeito da centralidade de uma efetiva compreensão desses significados não apenas na Matemática, mas também em contextos de aplicação, como, neste caso, a Transferência de Calor.

4 Análise dos dados coletados

Nesta seção, tendo como ponto de partida trechos de transcrições dos diálogos ocorridos ao longo do processo de

resolução do evento contextualizado proposto entre os estudantes, a pesquisadora (primeira autora deste artigo) e as professoras de Física e de Transferência de Calor, analisamos, sob uma nova perspectiva, os significados atribuídos pelos sujeitos da pesquisa às representações semióticas de objetos matemáticos e refletimos acerca da importância assumida por uma efetiva compreensão dessas representações em um contexto extra matemático, particularmente, neste artigo, o da Transferência de Calor.

Observemos, inicialmente, o diálogo a seguir:

> *FELIPE: Eu pensei que eu sabia o que era temperatura e calor, e agora, mesmo lendo isso no livro eu continuo confuso.*
> *HUDSON: Engraçado 'né', como se define temperatura? Tem definições aqui? ... Eu acho que temperatura é a energia do corpo. Eu acho que é porque o calor é a transferência de energia e a transferência de calor só acontece entre dois corpos com temperaturas diferentes. Então, eu imagino que temperatura seja a energia que está no corpo e o calor é a transferência dessa energia... do corpo com maior temperatura para o corpo que tem menor temperatura.*
> *FERNANDO: Professora, olha aqui as fórmulas que Vinícius estava falando* $q''_x = -k\frac{dT}{dx}$. *Essa aqui tem derivada* $\frac{dT}{dx}$, *olha aí a taxa de variação. Mas* ***eu vi essa fórmula de dois jeitos: com k positivo e com k negativo****. Qual delas está correta?* (Fragmento do diálogo de estudantes apresentado [4], p. 216 – grifo nosso).

O trecho destacado em negrito na transcrição anterior evidencia que, em contextos extra matemáticos, a compreensão dos significados atrelados aos símbolos empregados para representar um objeto matemático em um determinado registro semiótico é ainda mais fundamental do que em contextos puramente matemáticos. Assim, na Transposição Contextualizada [1], as diferentes transformações entre representações semióticas, na acepção de [6], é ponto central para a compreensão, em termos do contexto, do que está sendo apresentado matematicamente. No caso, a equação **(1)**, à qual o estudante se refere como fórmula, é a Lei de Fourier.

$$q''_x = -k\frac{dT}{dx} \qquad (\mathbf{1})$$

Como explicam [2], esta lei indica que, para uma parede plana unidimensional com uma distribuição de temperatura T, a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área perpendicular à direção da transferência (q''_x), medida em watt por metro quadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, é proporcional ao gradiente de temperatura $\frac{dT}{dx}$ nessa direção. O parâmetro k (a constante de proporcionalidade) é uma propriedade de transporte de energia conhecida como condutividade térmica, tendo como unidade watt por metro por Kelvin $\left(\frac{W}{m\cdot K}\right)$, e é uma característica do material da parede. Os valores numéricos de k variam em extensa faixa, dependendo da constituição química, estado físico e temperatura dos materiais. Quando o valor de k é elevado, o material é considerado condutor térmico, caso contrário, é isolante térmico. Desta forma, o sinal negativo presente na Lei de Fourier, na constante de proporcionalidade, é uma consequência do fato de o calor ser transferido no sentido da temperatura decrescente.

A conversão, por parte do estudante, da representação algébrica da lei de Fourier para sua representação no registro da língua natural – a taxa de transferência de calor na direção *x*, por unidade de área perpendicular à direção da transferência, é proporcional ao gradiente de temperatura nessa direção – associada à mobilização do conhecimento, proveniente da Transferência de Calor, de que em uma troca de calor por condução ocorre uma cessão de energia da região de temperatura mais elevada para a mais baixa, é essencial para que o estudante interprete o sinal negativo da constante de proporcionalidade *k*, presente na expressão, como uma consequência de um fenômeno físico.

Notamos no diálogo anteriormente apresentado que o estudante Hudson cita a propriedade física relativa à transferência de calor, mas Fernando evidenciou não ter relacionado esse fato com a expressão que estava trabalhando. Analisemos agora a transcrição a seguir:

> *JOSÉ: Professora, qual é a diferença entre taxa de transferência de calor e fluxo de calor?*
> *VINÍCIUS: 'Moço', isso aí já foi esclarecido, 'tá' claro, não sabe, leia na Web. O problema*

são as fórmulas. ***Eu quero saber por que tem fórmula que tem a derivada e outra que tem o delta T****. Vi essas fórmulas na Web e no material que consultamos. Não sei qual delas é a de Fourier.*
PROFESSORA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR: Mais alguém tem dúvida nessa diferença e nessas fórmulas?
JOSÉ: Vi isso aí. ***Às vezes a fórmula tem A e às vezes não tem****.*
DAVI: E ***eu que vi uma fórmula da Lei de Fourier, e nela o d da derivada estava torto****. Nunca tinha visto aquele símbolo.*
PESQUISADORA: Vocês podem escrever essas fórmulas que viram aqui no quadro? (Fragmento do diálogo de estudantes apresentado por [4], p. 219-220 – grifo nosso).

Como resposta ao questionamento da pesquisadora, que encerra a transcrição do diálogo anterior, Vinícius escreveu no quadro as equações (2) e (3) e Davi a equação (4):

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}\,(\mathbf{2}) \quad ; \quad q_x = k\frac{\Delta T}{L}\,(\mathbf{3}) \quad \text{e} \quad q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad (\mathbf{4})$$

A professora de Transferência de Calor, que conduzia a sessão de trabalho juntamente com a pesquisadora e a professora de Física, explicou que as duas equações escritas por Vinícius representavam a Lei de Fourier. Mais uma vez recorrendo às ideias de Duval, podemos dizer que Vinícius apresentou duas representações em um mesmo registro semiótico (algébrico) para a Lei de Fourier. No entanto, no contexto em que os estudantes estavam trabalhando – o da Transferência de Calor –, cada uma dessas representações traz em sua essência significados físicos diferentes. Quando representada por **(2)**, indica a taxa de transferência de calor. Por sua vez, quando representada por **(3)**, indica o fluxo térmico. Essa observação ratifica, uma vez mais, a relevância das transformações entre representações semióticas no âmbito da transferência de conhecimentos, da Matemática para uma área de aplicação extra matemática, transferência esta que, segundo [10], relaciona-se à capacidade de um indivíduo de utilizar um determinado conhecimento construído para resolver problemas em uma diversidade de contextos nos quais a mobilização deste é requerida.

No caso considerado, a transformação em questão é um tratamento, no sentido de [6], no registro algébrico. Esse tratamento, além de obviamente requerer manipulações algébricas, também traz em seu âmago o emprego de noções físicas relativas à transferência de calor. No EC proposto pela pesquisadora (primeira autora deste artigo), considerou-se, por simplicidade, condições de estado estacionário, caracterizado por um fluxo constante de energia, uma vez que a temperatura de cada ponto do corpo não varia com o tempo. Nesse caso, a distribuição de temperatura é linear, o gradiente de temperatura (considerando as temperaturas $T_1 > T_2$) pode ser representado como $\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{\Delta T}{L}$, sendo L o comprimento do corpo. O fluxo térmico (taxa de transferência de calor por unidade de área), por sua vez, é representado por $q''_x = -k\frac{T_2 - T_1}{L} = k\frac{\Delta T}{L}$ (está explicada, assim, a equação **(3)**). Portanto, a taxa de transferência de calor por condução, q_x, medida em watt (W), através de uma parede plana com área A, é o produto do fluxo pela medida da área, $q_x = q''_x \cdot A$ (justificando a equação **(2)**).

Após as explicações da professora de Transferência de Calor acerca de duas das equações que haviam escrito no quadro, houve a seguinte manifestação dos estudantes:

VINÍCIUS: Professora, aliás... professoras. Perdoem a sinceridade. Fluxo térmico e taxa de transferência de calor eu entendi, nem tinha dúvida nisso aí. Eu continuo sem entender as fórmulas. Sei o que é taxa de variação, sei calcular derivadas e integrais, sei que esse k aí é da condutividade e tem tabela com esses números. Mas 'pra' mim, a senhora não respondeu o que perguntei. Na Web tem a fórmula de Fourier de todo jeito, por isso a gente fica confuso.
JOSÉ: Verdade. ***A senhora 'tá' explicando como professora de Transferência de Calor.Quero saber o que isso aí significa na Física e no Cálculo****.*
PROFESSORA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR: Sendo assim, penso que a palavra agora está com as outras professoras. (Fragmento do diálogo de estudantes apresentado por [4], p. 220-221 – grifo nosso).

Diante desse questionamento, a professora de Física reforçou aos estudantes que, na experiência realizada com as paredes, foram assumidas condições simplificadas – condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana, nas quais, como já ressaltado, a distribuição de temperaturas é conhecida e é linear. No entanto, salientou que a Lei de Fourier pode ser aplicada em situações mais complexas, nas quais a natureza da distribuição de temperaturas não é evidente. Assim, em relação à equação **(4)** escrita por Davi, a professora de Física explicou que, considerando o fluxo térmico como uma grandeza vetorial, a equação da taxa de condução, que é a Lei de Fourier, pode ser escrita da seguinte forma: $q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$ e que, a partir dessa equação, pode-se escrever:$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$, $q''_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$, $q''_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$.

Novamente ressalta-se a importância de, ao transpor conhecimentos matemáticos para outras áreas, como a Transferência de Calor, o estudante deve estar constantemente atento aos significados das representações que estão sendo utilizadas para representar matematicamente os fenômenos em estudo. É essencial também que esteja consciente acerca de como as condições físicas assumidas nos problemas com os quais está trabalhando podem interferir nas representações semióticas, no caso estudado, nas representações algébricas, uma vez que, ao considerar uma condução unidimensional do calor, na direção x, mobilizar-se-á a representação $q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$ ao invés da representação $q'' = -k\nabla T$. Convém mencionar que os estudantes se referem ao símbolo ∂ como d torto porque não haviam, até o momento em que a atividade foi realizada, estudado as noções de Cálculo Diferencial e Integral concernentes às funções reais de várias variáveis reais.

Esse diálogo, por meio da afirmação de José, que diz compreender o que está sendo trabalhado do ponto de vista da Transferência de Calor, mas que gostaria de entender também sob os pontos de vista da Matemática e da Física, revela que a transferência de conhecimentos, na acepção anteriormente mencionada, não é onerosa somente no sentido da Matemática para um contexto de aplicação extra matemático, mas também no sentido contrário. José, por exemplo, evidencia não ter clareza acerca de como transferir um conhecimento que construiu sob a perspectiva da Transferência de Calor para as perspectivas das ciências básicas que o subsidiam, a saber, a Matemática e a Física. Assim, é pertinente mencionar a constatação de [11], para as quais, da mesma forma que os contextos extra matemáticos atribuem significados e sentidos aos conceitos matemáticos, a Matemática também atribui sentido e significado aos conceitos de outra ciência. Esse é o princípio central assumido na TMCC no que se refere à inter-disciplinaridade.

Por fim, analisemos o seguinte diálogo:

> *PESQUISADORA: Então, todos já se convenceram que precisamos aprender a resolver EDO? Podemos avançar?*
> *VÍTOR: Queria perguntar só mais uma coisa.* ***Na equação da Lei de Fourier, a gente resolve para encontrar o valor de x ou de T?***
> *PESQUISADORA: O que a turma pensa sobre isso?*
> *ANA:* ***Nem x e nem T, precisamos encontrar uma função****.*
> *VÍTOR: Eu não entendo como é isso e nem como a gente vai resolver. (Fragmento do diálogo de estudantes apresentado por [4], p. 236-237 – grifo nosso).*

No diálogo anteriormente transcrito, Vítor evidencia não compreender com clareza os elementos que compõem a representação algébrica da lei de Fourier, nem do ponto de vista matemático tampouco do ponto de vista da Transferência de Calor. Ainda que o trabalho com as equações diferenciais ordinárias estivesse no início, se Vítor compreendesse que *x* representa a direção na qual ocorre a condução do calor e *T* a função que indica a temperatura em determinado ponto da parede na direção considerada, mesmo ainda não tendo em seu repertório matemático os procedimentos para a resolução de uma equação diferencial, provavelmente não teria dúvidas acerca do que deveria determinar. Da mesma forma, Ana não parece perceber que, na lei de Fourier, *T* representa uma função, uma vez que afirma não ser necessário determinar nem *x* e nem *T*, mas uma função.

Passemos então as conclusões depreendidas da análise realizada.

5 Conclusões e perspectivas para trabalhos futuros

As análises apresentadas neste artigo explicitam, de maneira contundente, a importância de, ao trabalhar com uma abordagem da Matemática contextualizada em domínios extra matemáticos, em consonância aos pressupostos do MoDiMaCo, atrelado à fase didática da TMCC, oportunizar aos estudantes momentos em que possam dialogar com os professores e com os colegas acerca do problema que está sendo resolvido, de suas dúvidas, de suas inquietações e de como está estruturando o seu raciocínio. Ao se manifestarem em relação a estes aspectos e, consequentemente, se expressarem a respeito da Matemática e de suas aplicações em diferentes áreas de conhecimento, os estudantes evidenciam aos docentes, com maior precisão, em quais pontos enfrentam maiores dificuldades.

A partir das constatações decorrentes desses diálogos, o professor estará mais bem preparado para auxiliar os estudantes na superação dos entraves evidenciados. Neste artigo iluminamos a questão dos significados atribuídos, em situações contextualizadas, às representações de objetos matemáticos e os significados inseridos pelos contextos físicos às transformações (conversões e tratamentos) realizadas sobre tais representações .Observamos, por meio das análises apresentadas que, assim como também identificado por [12], os estudantes manifestaram dificuldades na atribuição de significados aos termos de uma EDO e nas interpretações de tais equações, tanto adotando como referências os contextos físicos quanto os matemáticos. Esse aspecto revela-se essencial para o desenvolvimento da habilidade, por parte do estudante, para transpor um conhecimento matemático para uma área de aplicação (no caso a Transferência de Calor) e vice-versa, o que [1] denomina, como já mencionado, de Transposição Contextualizada.

Indo além deste artigo, pode-se afirmar que os resultados obtidos pela primeira autora em sua tese de doutorado ([4]) apontam que o contexto do EC deu significado às EDO; possibilitou ao estudante compreensões que extrapolaram a resolução procedimental, permitindo reflexões acerca de conhecimentos fundamentais vinculados às equações diferenciais que poderão ser mobilizados em diferentes situações da Engenharia Civil. Possibilitou também, conforme salientado em [13], o desenvolvimento da interdisciplinaridade e o envolvimento dos estudantes em situações oportunizando a formação de atitudes, hábitos e habilidades, tais como a leitura, a pesquisa, a argumentação e a autonomia, elementos vinculados às competências gerais requeridas do futuro engenheiro, conforme explicitado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Graduação em Engenharia [14].

Para compreender a Transferência de Calor e suas aplicações, o Engenheiro Civil precisa entender a forma como as Equações Diferenciais são mobilizadas e exploradas. Os momentos de discussão proporcionados pelo EC foram imprescindíveis para a construção desses significados. Tendo em vista a maneira como os conhecimentos relacionados ao Cálculo são mobilizados no enfrentamento de situações relacionadas à Transferência de Calor, observamos que o estudante que sabe apenas calcular derivadas ou resolver EDO, mas não compreende a ideia de taxa de variação, possivelmente não terá condições de transpor esses conteúdos matemáticos para as diferentes áreas em que são aplicados. É preciso então que o docente elabore situações que oportunizem a construção de significados para os objetos matemáticos trabalhados, a realização desse tipo de transposição e que possibilite o trânsito, com significado, tanto matemático quanto no contexto de aplicação, por representações de um determinado objeto matemático em diferentes registros semióticos.

Finalizamos nossas considerações apontando algumas sugestões para estudos futuros. Com relação ao uso dos registros de representação semiótica, sugerimos uma investigação modificando em alguns aspectos as atividades que compõem o EC construído, de forma a estimular os estudantes a recorrerem a diferentes tipos de abordagens das soluções de uma EDO: algébrica, qualitativa e numérica. Também sugerimos pesquisas com Equações Diferenciais no ensino de Cálculo, com aplicações nas diversas habilitações da engenharia, de forma contextualizada e a partir de situações-problema associadas a ferramentas computacionais para potencializar a integração entre as abordagens analítica, numérica e gráfica.

Referências

1. Camarena, P.: A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Revista Innovación Educativa*, Vol. 13, N. 62, pp. 17-44, (2013).
2. Incropera, F. P.; Dewitt, D. P.: *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC (2014).
3. Camarena, P.: Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, Vol. 19, No. 2, pp. 01-26 (2017) DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26

4. Lopes, R.: *Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor*. 2021. 316 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) —Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo (2021).
5. Duval, R.: Sémiosis, penséehumaine et activitémathématique. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Vol. 6, No. 1, pp. 126-143 (2010).
6. Duval, R.: *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física (2009).
7. Duval, R.: Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, Florianópolis, Vol. 7, No. 2, pp. 266-297 (2012).
8. Duval, R.: Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, pp. 11-33, (2003).
9. Duval, R.: Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (ed.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. São Paulo: Papirus, pp. 3-11, (2008).
10. Camarena, P.: *Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias*. 1a ed. - Santiago del Estero: EDUNSE, (2021).
11. Camarena, P.; Flores. I. P.: Epistemología de lo variacional. In: *XIII Simposium Internacional "Aportaciones de las Universidades a la Docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo*", 13., 2012, Ciudad de México. Memorias… Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional (2012).
12. Dullius, M. M.: *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. 2009. 502 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências, Universidad de Burgos, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2009).
13. Lopes, R.; lima, G. L.: Invariantes operatórios mobilizados por futuros engenheiros civis em uma abordagem contextualizada de EDO de variáveis separáveis. In: *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Anais...Uberlândia (MG) Uberlândia, (2021).
14. Brasil.: Resolução CNE/CES n. 2/2019, de 23 de abril de 2019. *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia*. https://bityli.com/1pxvh (2019). Acesso em 06 de maio de 2020.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Identificación de estilos de aprendizaje en estudiantes de ingeniería de los primeros años

Roxana G. Ramírez[1, 2], Melina B. Zapata[3], Graciela E. Yugdar Tófalo[1], Jorge R. Brandolin[1]
[1] Grupo GIEMCI, Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Almafuerte 1033, C.P. 3100, Entre Ríos, Argentina
{roxanaramirez, gracielatofalo, jorgebrandolin}@frp.utn.edu.ar,
[2] Laboratorio LAPACDA, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma De Entre Ríos
Km 10,5, R.P. 11, E3100 Oro Verde, Entre Ríos, Argentina
ramirez.roxana@uader.edu.ar,
[3] Área de investigación de la Ingeniería Biomédica, Instituto Tecnológico Regional Sudoeste, Universidad Tecnológica, República Oriental del Uruguay
65000 Fray Bentos, Departamento de Río Negro, Uruguay
melina.zapata@utec.edu.uy

Resumen. Este trabajo exhibe una investigación del tipo experimental en el que se recopilaron 254 encuestas utilizando el Modelo Felder & Silverman (1988), las cuales fueron completadas por estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería civil, electrónica y electromecánica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná. El objetivo fue identificar los estilos de aprendizaje más influyentes que desarrollan los estudiantes de ingeniería en los primeros años de esta Universidad. Esta investigación demostró que un elevado porcentaje de estos estudiantes cumple con la propuesta que plantea Felder (1993) en la que considera que el estudiantado que elige estudiar este tipo de carreras tienen preferencias por lo activo, sensitivo, visual y secuencial, en su mayoría. Esto no implica una limitación para estudiar este tipo de carreras, sino que se observa que es muy alto el porcentaje de estudiantes con estas características que eligen estos estudios universitarios.

Palabras Clave: Estilos de aprendizaje, Modelo Felder & Silverman, Estudiantes de ingeniería.

1 Introducción

En los últimos años, la Educación Superior Argentina ha manifestado la necesidad de incorporar cambios en su estructura como consecuencia del creciente y acelerado desarrollo que experimenta la sociedad frente a las nuevas tecnologías y a la innovación en nuevas disciplinas, tanto científicas como tecnológicas, incluyendo su aplicación en el campo laboral[1]. Se ha asumido que el conocimiento que circula por los sistemas educativos formales ha perdido su validez frente a la actualidad[2] [3], y esto se lo asocia con la crisis del modelo científico que ha prevalecido durante casi un siglo, basado en el concepto de racionalidad tradicional.

Las Universidades de Ingeniería no pueden ser ajenas a la Revolución Digital que estamos atravesando, conocida como la Cuarta Revolución Industrial, la cual se encuentra enmarcada por el avance tecnológico y el manejo de grandes bases de información (Big Data). Este contexto nos lleva a la necesidad de incorporar y manejar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como herramientas didácticas que permitan fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, favoreciendo, a la vez, la articulación de la enseñanza con la investigación desarrollada de manera autónoma.

En la última década se ha propuesto plantear un sistema educativo de ingeniería basado en la formación por

competencias[1][2], en el cual se plantea al pensamiento complejo como la base de las competencias complejas.

En el trabajo compilado por Roberto Giordano Lerena en el libro Competencias y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores y Desarrollo Tecnológico e Innovación[4] se estableció una base sustentada en cuatro dimensiones: una dimensión académica focalizada en los conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes en las áreas de formación científica, profesional y humanística; una dimensión profesional que pone en práctica la formación adquirida mediante el desempeño en actividades propias de la carrera, caracterizada y regulada por cada uno de los países en cuestión; una dimensión social directamente relacionada con los conocimientos de la realidad social, económica y cultural del entorno, para liderar y solucionar problemas básicos de la región; y una dimensión ambiental que abarca los conocimientos del entorno y la tecnología, para la elaboración y desarrollo de proyectos de ingeniería sostenibles que preserven el medio ambiente.

A partir de este marco basado en competencias surge la necesidad de llevar a cabo un cambio, dejar de lado el pensamiento lineal tradicional y proponer una formación de ingenieros más integral con un enfoque sistémico y de base holística, posible de llevar a cabo a partir de una visión más amplia y profunda, multidimensional e interdisciplinar[5]. El pensamiento sistémico consiste en la habilidad de ver al mundo como un sistema complejo, donde todo está conectado con todo, en el que no se puede intervenir sobre una única entidad [6]. Este pensamiento afirma que solo es posible comprender un sistema completo si se lo analiza como un todo, no por sus partes de manera aislada.

Las prácticas focalizadas en el Aprendizaje Centrado en el Estudiante (ACE), entonces, deben ser priorizadas en el aula para que un pensamiento más complejo tome lugar en el aula de ingeniería. Al ubicar a los estudiantes en el centro de la escena se lo nutre de un andamiaje de herramientas de carácter cognitivo, físico e instrumental que haga posible que la actividad cognitiva se desarrolle y alcance las metas propuestas[7].

Para alcanzar una adecuada mediación pedagógica, los profesores deben conocer la manera en que los estudiantes se acercan a la situación de aprendizaje, familiarizándose con los diferentes estilos de aprendizaje que éstos poseen. Este conocimiento puede aportar a los docentes información clave acerca de los aspectos cognitivos y de personalidad que guían las conductas habituales de un individuo para incorporar y articular nueva información con la ya preexistente[8].

Por otra parte, los docentes perciben como sus estudiantes procesan la información que reciben de maneras diferentes. Algunos se motivan al escuchar la explicación de un profesor o el análisis o la interpretación de gráficos o cuadros sinópticos, mientras que las preferencias de otros se centran en el tiempo y la dedicación que requieren para realizar una actividad y obtener resultados positivos. Tanto en un caso como en otro, se evidencia que los estudiantes manifiestan un abordaje determinado de resolver las tareas y así lograr que el aprendizaje tome lugar de la manera más memorable posible.

Además de las preferencias personales de aprendizaje, en un aula es posible identificar diferencias en los estudiantes en torno a las condiciones sociales y culturales, que impactan directamente en los niveles de autonomía alcanzados y que resultan en diferencias entre ellos en relación con la manera en que los saberes son internalizados. La autonomía en el aprendizaje es alcanzada cuando los estudiantes pueden comprender las demandas de la situación de aprendizaje y desplegar habilidades, conocimiento y comportamientos que pueden ser utilizados intencionalmente para descubrir y procesar nuevos conocimientos[9] Aquí se destaca que la influencia del entorno en el que convive el sujeto cumple un rol fundamental, ya que constituye un factor que tiende a potenciar o disminuir el proceso de autonomía en su aprendizaje.

Los estudiantes también traen estrategias a la situación de aprendizaje, que son acciones que pueden ser desarrolladas y empleadas para realizar una tarea en el aula con el propósito de resolver un problema de la manera más sencilla[10]. Los estilos y las estrategias son dos caras de una misma moneda, ya que es posible relacionar cada estilo de aprendizaje con un conjunto de estrategias específicas[11].

Los primeros estudios conectados con los estilos de aprendizaje surgieron en la década de 1950 bajo el nombre de “estilos cognitivos”[12]. Años más tarde, se pudieron establecer cuatro estilos de aprendizaje diferentes: activo, reflexivo, teórico y pragmático[13], los cuales se caracterizan por presentar una serie de rasgos principales que ayudan a perfilar las tendencias que se destacan en los estudiantes para el aprendizaje.

Con el objeto de arrojar luz sobre los estilos de aprendizaje de los estudiantes, en un trabajo de investigación seminal, Felder[14] considera que la información que perciben preferentemente los estudiantes puede ser del orden sensorial a través de la visión, los sonidos y las sensaciones físicas o de manera intuitiva a través de recuerdos, ideas o percepciones. La información puede ser percibida más eficientemente de manera visual a través de fotos, gráficos, demostraciones o de forma verbal como ser palabras, fórmulas, explicaciones. También puede ser sensitivo o intuitivo, en donde la información la puede procesar de manera activa o reflexiva, que permita comprenderlo de manera secuencial o global.

Felder y Silverman[15] proponen un modelo basado en los estilos de aprendizaje de los estudiantes, en el cual

se plantea una serie de escalas relativas de acuerdo a como estos receptan, perciben y procesan la información. De esta forma establece que las dimensiones dicotómicas de los estilos de aprendizaje (activo/reflexivo, sensitivo/intuitivo, visual/verbal, secuencial/global) no son categorías excluyentes. La preferencia de un estudiante por una de estas escalas puede ser permanente, moderada o inexistente, lo cual puede cambiar con el tiempo o con el entorno de aprendizaje.

Felder y Silverman[15], indagan sobre las siguientes preguntas:

¿Qué estilos de aprendizaje son más significativos en la educación de ingeniería? ¿Cuáles prefieren los estudiantes de ingeniería, como así también cuáles de los estilos de aprendizaje son los preferidos por los profesores para enseñar?

¿Qué herramientas didácticas se pueden implementar para llegar a los estudiantes, cuyos estilos de aprendizaje no son abordados por los métodos tradicionales de la educación de ingeniería?

Los docentes tienen el compromiso de indagar sobre los diferentes estilos de aprendizajes que tienen sus estudiantes en los primeros años de las carreras de Ingeniería, con el propósito de brindarles nuevas herramientas didácticas que les ayude a fortalecer su autonomía en el aprendizaje, pudiendo diseñar una enseñanza más equilibrada que permita cubrir e incluir las necesidades de todos los estudiantes[16].

Conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes permite a los docentes identificar fortalezas y debilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje[17], a partir de los cuales se podrá rediseñar las clases, ajustar los programas curriculares y potenciar el aprendizaje autónomo en el marco de las actividades a desarrollar en el aula como extra-aula como ser los trabajos de investigación que deberán desarrollar en equipo. Asimismo, el análisis que se puede realizar a partir de este conocimiento permite abordar diferentes enfoques de aprendizaje, los cuales son posibles de desarrollar al conocer y entender la forma en que ellos procesan la información para entenderla y aprehenderla[18].

La presente investigación se centra en estudiar los principales estilos de aprendizaje que desarrollan los estudiantes de Ingeniería para aprender en los primeros años, con el objetivo de que los docentes puedan adecuar sus prácticas de acuerdo al estilo de aprendizaje que tienen sus estudiantes, implementando estrategias, desarrollando actividades y articulando tareas basadas en la resolución de problemas afines a la ingeniería; adecuándolas a las características de los educandos. Principalmente, el objetivo de este trabajo es producir información que contribuya a prevenir el fracaso estudiantil, que hoy preocupa a la Universidad, pudiendo detectar aquellos estudiantes que presentan un alto potencial de deserción.

2 Metodología

Esta investigación se basa en un método experimental, en el cual se eligió una muestra aleatoria de 254 estudiantes que cursaron los primeros años de las carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná, durante el período 2019 - 2020. De la muestra seleccionada se logró identificar que el 40,95% corresponde a la carrera de Ingeniería Civil, el 29,53% a la carrera de Ingeniería Electromecánica y el 29,53% a la carrera de Ingeniería Electrónica. Se trabajó con el Modelo propuesto por Felder y Silverman[15], el cual es aplicable a la enseñanza de la ingeniería, por lo que cada uno de estos estudiantes respondió a la encuesta denominada Index of Learning Styles (ILS) online, para poder conocer sus preferencias de aprendizaje.

Se dispuso del campus virtual de la Universidad, que consiste en una plataforma educativa Moodle, en donde se dejó una dirección electrónica que automáticamente lo dirigía a un documento de google drive en donde cada alumno podía completar el cuestionario transcripto de ILS propuesto por Felder y Silverman de manera anónima para que se sientan con total libertad al responder dichas preguntas. Luego se trabajó en cada una de las encuestas realizadas por los estudiantes procesando las respuestas seleccionadas y volcándolas en el cuestionario online ILS, en donde se llevó a cabo el correspondiente análisis identificando las preferencias por el aprendizaje, propuesto por Felder y Silverman.

El cuestionario online consta de 44 preguntas con la posibilidad de seleccionar una de las dos opciones propuestas. Al finalizar y enviar, automáticamente le devuelve un breve diagnóstico en base a las respuestas elegidas. En el mismo les indica que se identifican cuatro dimensiones del estilo de aprendizaje con una determinada puntuación, la cual informa sobre la preferencia por uno u otra categoría.

El perfil del estilo de aprendizaje de un estudiante en ingeniería brinda información sobre las posibles fortalezas, tendencias o hábitos y constituye una herramienta que puede utilizarse para mejorar la calidad de enseñanza y aprendizaje y aumentar el rendimiento académico.

Los estudiantes pueden conocer, de acuerdo a las escalas que propone, su preferencia por el aprendizaje en base a cuatro dimensiones: activo/reflexiva, sensitivo/intuitivo, visual/verbal y secuencial/global[19], [20].

Tabla 1. Características según los diferentes Estilos de Aprendizaje.

Estilos	Características
Activo	Retiene y comprende mejor la información cuando hace algo activo con ella. Prefiere aprender ensayando y trabajando con pares.
Reflexivo	Prefiere aprender reflexionando, pensando y trabajando solo.
Sensitivo	Le gusta resolver problemas siguiendo procedimientos muy bien establecidos. Es concreto y práctico.
Intuitivo	Conceptual e innovador. Comprende rápidamente los nuevos conceptos.
Visual	La información lo prefiere tener de las representaciones visuales, diagramas de flujo, imágenes, entre otros.
Verbal	Prefiere tener la información en forma escrita o hablada, ya que lo recuerda mejor.
Secuencial	Aprende paso a paso en la medida que exista una secuencia lógica. Es ordenado y lineal.
Global	Puede resolver problemas complejos rápidamente y poner juntas cosas en forma innovadora.

Los datos fueron analizados a través del software RStudio con licencia GPL, que es un programa libre con lenguaje de programación y con un enfoque al análisis estadístico. Este programa se empleó para analizar la información obtenida de la muestra y poder responder al objetivo de esta investigación:

¿Cuáles son los enfoques de aprendizaje predominantes que se registran en los estudiantes de las carreras de ingeniería en la UTN Facultad Regional Paraná?

En este trabajo se llevó a cabo un análisis general de los estilos de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, en donde se empleó los diagramas de boxplot. Por otra parte, se utilizan técnicas multivariadas para clasificar a un conjunto de individuos en grupos homogéneos con la correspondiente verificación de los supuestos y la validación del modelo.

En una primera instancia se procedió a realizar un análisis de componentes principales y luego se determinó el número óptimo de clúster para este estudio, en donde se lo representó gráficamente. Además como validación de este agrupamiento de datos se llevó a cabo el análisis de conglomerados aplicando el método de clúster jerarquizado utilizando la distancia euclideana.

3 Resultados y discusión

Explorando los conceptos de Análisis de Componentes Principales y de Clúster, a través del uso del software libre RStudio, se logró analizar los diferentes enfoques de aprendizaje que influyen sobre los estudiantes de ingeniería en la UTN Regional Paraná.

Se llevó a cabo un estudio sobre los resultados relevados con el test de Felder & Silverman, en donde para cada estilo de aprendizaje se utiliza una categorización ponderada, comprendida entre valores positivos y negativos, que permite identificarlos. En la Fig. 1 se indica los diagramas de cajas comparativos para cada estilo de aprendizaje analizado sobre la muestra de 254 estudiantes de ingeniería.

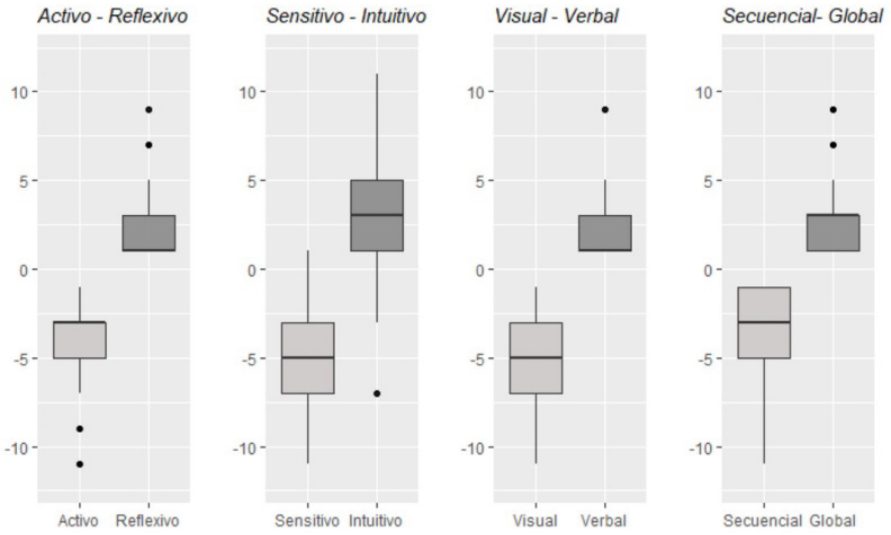


Fig. 1. Boxplot comparativo de los diferentes estilos de aprendizaje. Fuente: Elaboración propia.

En la Fig. 2 se observa que más del 50% de los estudiantes encuestados registran valores negativos por lo que se identifican con los estilos de aprendizaje del tipo: Activo, Secuencial, Sensitivo y Visual. Además, se destaca que en su gran mayoría los estudiantes de ingeniería presentan un sesgo hacia los sensitivo y visual.

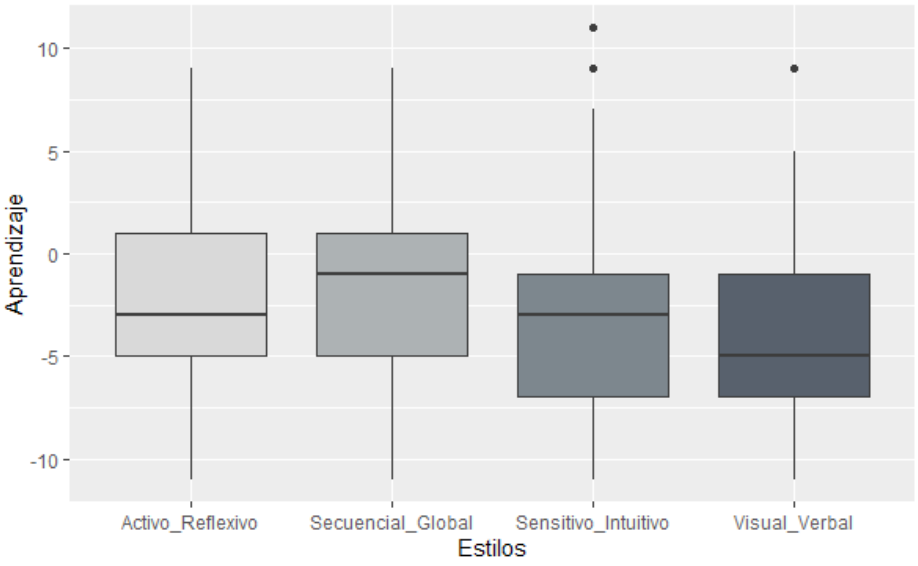


Fig. 2. Boxplot comparativo de los diferentes estilos de aprendizaje. Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, se llevaron a cabo pruebas de asociación entre las variables que definen los estilos de aprendizajes y se identificó asociación estadística significativa para las variables Activo-Reflexivo con Visual-Verbal (Test Chi Cuadrado de Pearson, p-valor = 0.01049).

Además, se identificó asociación estadística significativa entre la variable Sexo y el estilo de aprendizaje Secuencial-Global. Como también entre la variable Carrera y el estilo Sensitivo-Intuitivo (Test Chi Cuadrado de Pearson, p-valor = 0.02055). Los datos se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Proporción de los estilos de aprendizaje por Sexo y Carrera.

Estilos de Aprendizaje	Sexo: Hombre	Mujer	Carrera: Civil	Electrónica	Electromecánica
Activo	0.7356	0.6522	0.7211	0.6800	0.7600
Reflexivo	0.2644	0.3478	0.2788	0.3200	0.2400
Sensitivo	0.75481	0.8261	0.8462	0.7067	0.7200
Intuitivo	0.2452	0.1739	0.1538	0.2933	0.2800
Visual	0.8510	0.8261	0.8654	0.7733	0.8933
Verbal	0.1490	0.1739	0.1346	0.2267	0.1067
Secuencial	0.6106	0.8043	0.6538	0.6267	0.6533
Global	0.3894	0.1957	0.3462	0.3733	0.3467

De la comparación de los valores medianos para cada variable en las diferentes carreras de ingeniería se identificaron diferencias estadísticamente significativas para el estilo Visual -Verbal (Test de la mediana de Mood, p valor = 0.005984).

A continuación, se realiza un análisis de la asociación entre las variables que representan los diferentes estilos de aprendizaje, Fig.3. Este estudio permite plantear una combinación lineal que reduce la dimensión del problema para una mejor interpretación del mismo, en este caso se logra explicar el 58.60% de la variabilidad total.

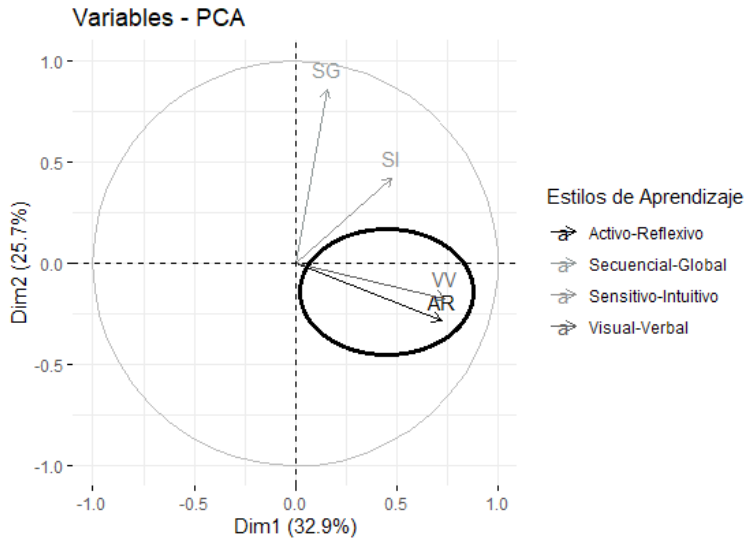


Fig. 3. Asociación entre las variables más contribuyentes del modelo planteado. Fuente: Elaboración propia.

De la Fig. 3 se pueden identificar tres grupos muy bien diferenciados, por un lado tenemos las variables Secuencial-Global, por otro lado las variables Sensitivo-Intuitivo y un tercer grupo que relaciona las variables Visual-Verbal y Activo-Reflexivo. Del análisis realizado se puede comprobar una fuerte asociación para cada grupo de variables, las cuales no se encuentran correlacionadas entre sí.

La contribución más importante en este análisis de correspondencias múltiples la hicieron los estudiantes de ingeniería que son del sexo masculino, pertenecientes principalmente a las carreras Civil y Electrónica, y que responden a los estilos de aprendizaje Visual-Verbal y Activo-Reflexivo, Fig. 4.

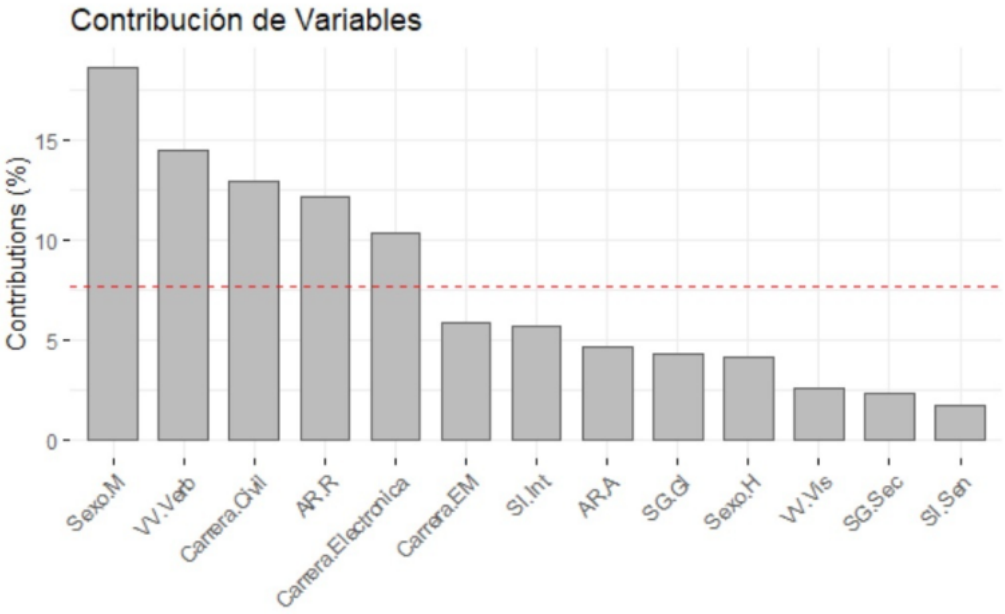


Fig. 4. Contribución de todas las variables analizadas para este estudio. Fuente: Elaboración propia.

El biplot indicado en la Fig. 5, se corresponde a un análisis de correspondencias en donde se logra visualizar dos grandes grupos. En la Facultad Regional Paraná se identifica un primer grupo en donde se incluye la carrera de ingeniería electromecánica, además de identificar como predominante el sexo masculino y las variables en estudio: Sensitivo - Intuitivo, Secuencial – Global, siendo dominante los estilos de aprendizaje Activos y Visuales. Por otra parte, el segundo grupo incluye a las carreras de Civil y Electrónica, el sexo femenino y los estilos de aprendizaje predominantes son Reflexivo y Verbal.

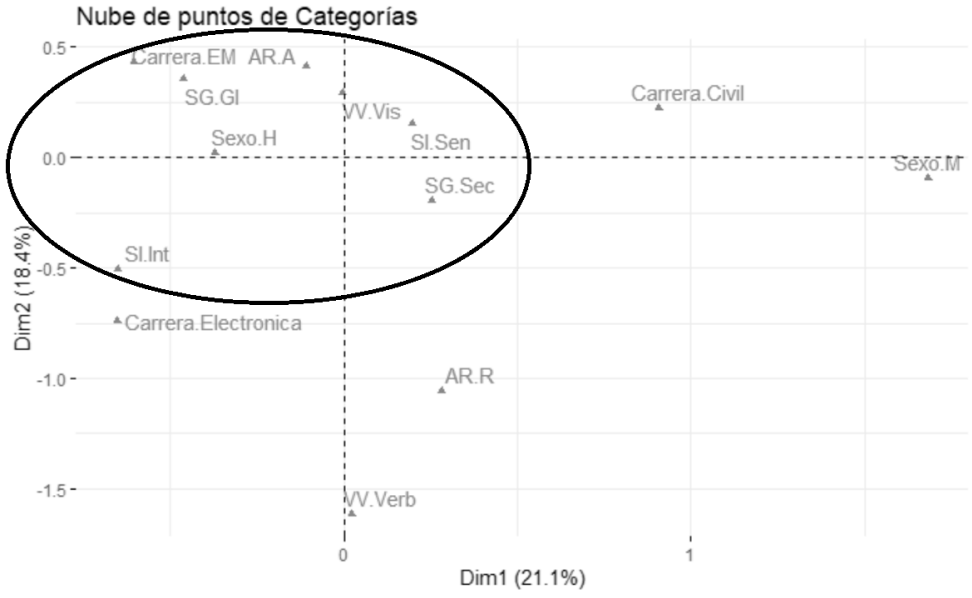


Fig. 5. Análisis de correspondencias. Fuente: Elaboración propia.

Para definir los resultados, se realizó un análisis de clúster en donde se logró identificar los grupos más significativos en esta investigación. Es decir, de las pruebas realizadas se pudo constatar tres grupos bien definidos en los cuales se identifican los siguientes grupos: clúster_1 comprende 91(36%), el clúster_2 50 (20%), y el clúster_3 113(44%) estudiantes encuestados. En la Fig. 6 se visualiza el dendrograma.

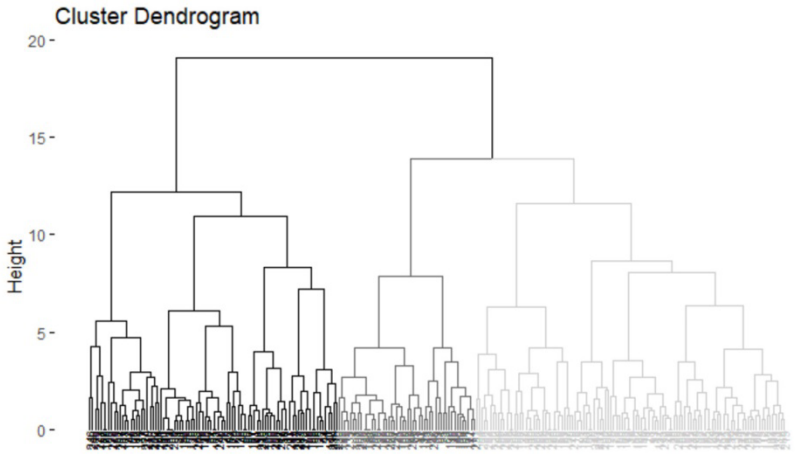


Fig. 6. Dendrograma de conglomerados. Fuente: Elaboración propia.

Las características que permiten identificar cada uno de estos grupos son: el clúster 1, identifica a los estudiantes cuyos estilos de aprendizaje son más Activos, Sensitivos, Visuales y Secuenciales. El clúster 2, engloba a aquellos cuyos estilos de aprendizaje predominante son Secuenciales y Visuales. Y el clúster 3 incluye a los educandos que en su mayoría son Activos y Sensitivos en su mayoría, pero tienen una fuerte influencia por los estilos Visuales y Globales.

Para finalizar se representó gráficamente las componentes principales del dendrograma obtenido por conglomerados, Fig. 7, en donde se visualiza una pequeña región de superposición de los tres grupos.

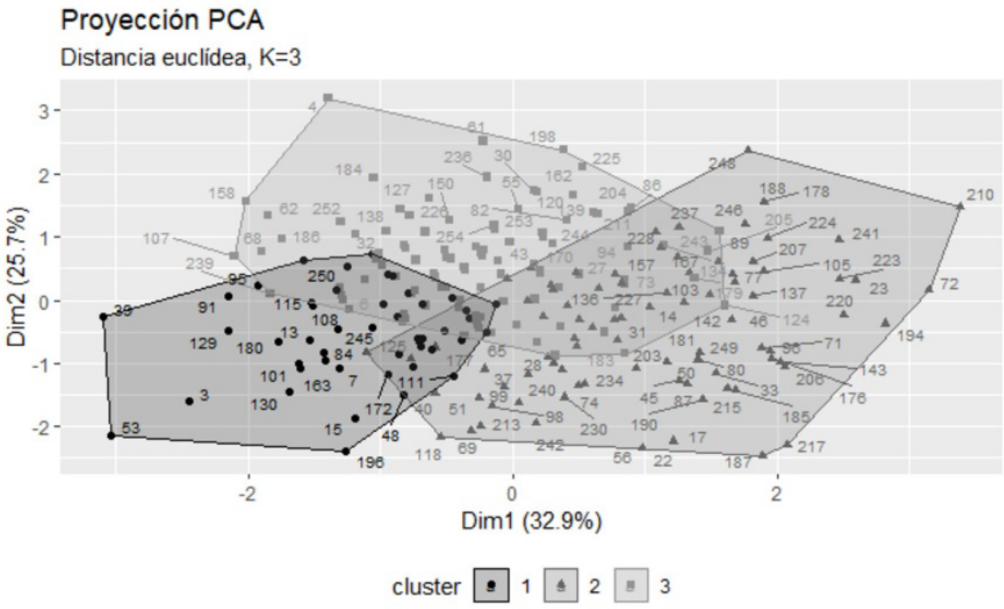


Fig. 7. Componentes principales del dendrograma por conglomerados. Fuente: Elaboración propia.

Además, se puede indicar que ninguno de los grupos analizados por la clusterización registra estudiantes que presenten una alta preferencia por un único estilo de aprendizaje, Fig. 8, sino que ellos presentan una combinación de estas diferentes aptitudes por aprender dejando de ser un condicionante para afrontar una carrera de ingeniería
.

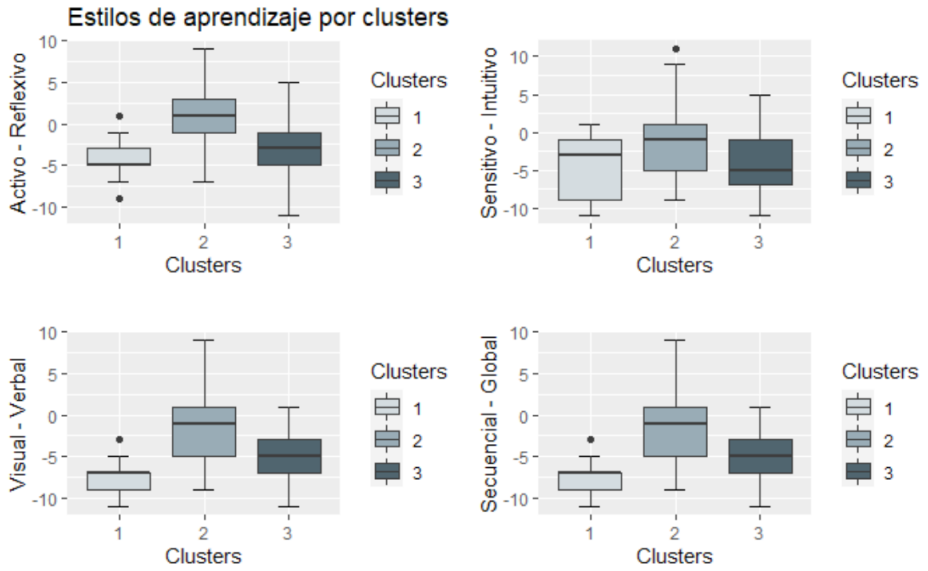


Fig. 8. Identificación de los estilos de aprendizaje por clúster. Fuente: Elaboración propia.

Podemos mencionar que en el escenario latinoamericano, Rehbein Felmer, Martínez Pool, Fisher y Fritz indagaron la relación entre los estilos epistémicos de los estudiantes y la elección de carrera en una universidad chilena, y los hallazgos demostraron que Ingeniería presenta un perfil con un elevado predominio a lo racional[21] . Por otra parte, Vázquez[22] analizó los estilos de aprendizaje de 420 estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería de una universidad tecnológica y logró comprobar que el modelo mental estaba orientado hacia la aplicación de conocimientos y de estrategias de procesamiento de la información basadas fundamentalmente en analizar los pasos de una demostración. Becher sostiene que "las actitudes, las actividades y estilos cognitivos de las comunidades científicas que representa una determinada disciplina están estrechamente ligados a las características y estructuras de los campos de conocimientos con las comunidades que están profesionalmente comprometidas"[23].

Con este estudio se plantea que todos los estudiantes ingresan a la universidad con diferentes estilos de aprendizaje, los cuales se acentúan de acuerdo al tipo de disciplina elegida. En Ingeniería se obtuvieron diferencias estadísticamente significativas para los estilos de aprendizaje activo, visual y sensitivo; es decir que los estudiantes se caracterizan en su mayoría por ser más prácticos, prefieren el material concreto, los hechos y el procedimiento lógico en una demostración, optan por el material visual, los diagramas de flujo, los videos, entre otros.

4 Conclusión

Basados en los resultados de este estudio se puede concluir que en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Paraná, los estudiantes de ingeniería se caracterizan en su gran mayoría por ser activos, visuales y sensitivos, pudiendo ser más secuenciales que globales. Esta caracterización, sin embargo, no debe limitar al estudiante que no posea estos rasgos, de iniciar sus estudios en este ámbito, sino que los docentes tecnológicos, deben ampliar y surtir sus prácticas de enseñanza a través de la organización y adecuación de su andamiaje de herramientas en lo que se refiere a la implementación de nuevas técnicas didácticas para abarcar las necesidades de aprendizaje que se le presenten. Es decir, transformar la enseñanza empleando un andamiaje de herramientas didácticas que permitan cubrir las necesidades de todos los individuos, independientemente de los estilos de aprendizaje que tengan los estudiantes de ingeniería.

Esto es una petición urgente a cubrir frente a las necesidades que nos demanda la sociedad actual, en donde se busca que el egresado universitario sea capaz de ejercer su profesión en beneficio de la sociedad argentina.

Referencias

1. Mastache, A.: *Formar personas competentes. Desarrollo de competencias tecnológicas y psicosociales.* Noveduc (2007).
2. Aguerrondo, I.: Conocimiento complejo y competencias educativas. *IBE-UNESCO Working Papers*, Vol. 8, No. May, pp. 13, (2009).
3. Tobón, S.: Los proyectos formativos: Transversalidad y desarrollo de competencias para la sociedad del conocimiento. *Instituto CIFE* (2013).
4. Giordano Lerena,R.; CONFEDI: *Competencias y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores y Desarrollo Tecnológico e Innovación (Documentos Plan Estratégico ASIBEI)*. ASIBEI (2016).
5. Serna M., E.; Serna A., A.: Complejidad y Pensamiento Complejo para innovar los procesos formativos en ingeniería. *Memorias de la Séptima Conferencia Iberoamericana de Complejidad, Informática y Cibernética (CICIC)* pp. 48–55 (2017).
6. Sterman, J.D.: System dynamics: Systems thinking and modeling for a complex world. *Massachusetts Institute of Technology Engineering Systems Division Working Paper Series.* https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/102741/esd-wp-2003-01.13.pdf?sequence=1&isAllowed=y (2002). Accedido el 18 de septiembre de 2017.
7. Gómez Mendoza, M.A.; Alzate Piedrahíta, M.V.; Arbeláez Gómez, M.C.; Romero Loaiza, F.; Gallón, H.: Intervención y mediación pedagógica: Los usos del texto escolar. *Revista Colombiana de Educación*, No. 49, pp. 83-102 (2005).
8. Freiberg Hoffmann, A.; Fernández-Liporace, M.; Ledesma, R.: Enfoques de aprendizaje en estudiantes universitarios de Buenos Aires. *Pensando Psicología.*, Vol. 13, No.21, pp. 19–32 (2017).
9. Cabrera Ruiz, I.: Autonomía en el aprendizaje: Direcciones para el desarrollo en la formación profesional. *Actualidades investigativas en educación,* Vol. 9, No. 2, pp. 1-22 (2009).
10. Biggs, J.B.: Assessing student approaches to learning. *Australian Psychologist.*, Vol. 23, No. 2, pp. 197–206 (1988).
11. Curry, L.: An Organization of Learning Styles Theory and Constructs. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (1983).
12. Cabrera Albert, J.; Fariñas León, G.: El estudio de los estilos de aprendizaje desde una perspectiva vigotskiana: una aproximación conceptua. *Revista Iberoamericana de Educación,* Vol. 37, No.1, pp.1-10 (2005).
13. Alonso, C.; Gallego, D.; Honey, P.: *Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora.* Ediciones Mensajero (2012).
14. Felder, R.M.: Reaching the second tier: Learning and teaching styles in college science education. *College of Science Teaching,* Vol. 23, No. 5, pp. 286–290 (1993).
15. Felder, R. M.; Silverman, L.K.: Cuestionario Índice de Estilo de Aprendizaje (Index of Learning Styles). *NC. State University.* https://ncsu.edu/felder-public/RMF.html. (1988). Accedido el 20 de abril de 2017.
16. Felder R.M.; Brent, R.: Understanding Student Differences, *Journal of Engineering Education*, Vol. 94, No.1, pp. 57-72 (2005).
17. Carvajal, P; Trejos, A.; Barros, A.: Análisis estadístico multivariado de los estilos de aprendizaje predominantes en estudiantes de ingenierías de la Universidad Tecnológica de PEREIRA – II Semestre de 2006. *Scientia et Technica, Año XIII*, N°34, pp. 325-330 (2007).
18. Entwistle, N.: Approaches to learning and perceptions of the learning environment. Introduction to the Special Issue. *Higher Eduation.*, Vol. 22, pp. 201–204 (1991).
19. Felder, R.: Learning and Teaching Styles in Engineering Education. *Journal of Engineering Education,* Vol. 78, pp. 674–681 (1988).
20. Ocampo Botello, F.; Guzmán Arredondo, A.; Camarena Gallardo, P.; De Luna Caballero, R.: Identificación de estilos de aprendizaje en estudiantes de ingeniería. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Vol. 9, No. 61, pp. 401–429 (2014).
21. Ventura, A.C.; Moscoloni, N.; Gagliardi, R.P.: Comparative study on the learning styles of Argentine university students from different disciplines. *CONICET Digita.*, Vol. 29, No.2 (2012).
22. Vázquez, S.M.: Rendimiento académico y patrones de aprendizaje en estudiantes de ingeniería. *Ingeniería y Universidad.*, Vol. 13, No., pp. 105–136 (2009).
23. Becher, T.: *Tribus y territorios académicos. La indagación intelectual y las culturas de las disciplinas.* Gedisa (2001).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Evaluación múltiple opción con grado de seguridad en pruebas de matemática en carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica de Uruguay región Centro Sur.

Pierina Costa Alanis, Elisa Rodríguez Infanzón, Alejandro Duarte Furiati, Matías Salomone Cayaffa.
Carreras de Ingenierías, Universidad Tecnológica de Uruguay
Francisco Antonio Maciel s/n esq. Luis Morquio, Durazno, Uruguay. Dirección postal 97000.
{pierina.costa, maria.rodriguez.i, alejandro.duarte, matias.salomone}@utec.edu.uy

Resumen. El presente trabajo es una experiencia de un equipo de docentes de matemática de la Universidad Tecnológica del Uruguay, el cual elabora, diseña y aplica una prueba de evaluación diagnóstica con grado de seguridad en la respuesta por parte del estudiante, a la cohorte 2022 que ingresan a las carreras de Ingeniería en el Instituto Tecnológico Regional Centro Sur. Los resultados de la prueba diagnóstica se presentan en función de los bloques de contenidos definidos en álgebra, modelización y cálculo, además brindan información de la percepción que los estudiantes tienen de su grado de confianza en los mismos. Estos resultados son insumos fundamentales para planificar las unidades curriculares de matemática del primer semestre y propicia desde el inicio de la carrera, el desarrollo de la autoconfianza de los estudiantes, se fomenta así, la capacidad de reflexión, la metacognición y se promueve la construcción del conocimiento matemático.

Palabras Clave: Evaluación diagnóstica, Evaluación múltiple opción, Grado de confianza en la respuesta, Metacognición.

1 Introducción

El presente trabajo es el resultado de una experiencia de investigación en evaluación de un equipo de docentes de matemática de la Universidad Tecnològica del Uruguay (UTEC) en el Instituto Tecnológico Regional Centro Sur (ITRCS). Dicha experiencia consiste en el diseño e implementación de la evaluación diagnóstica de matemática con grado de certeza en la respuesta del estudiante, al inicio de las carreras de Ingeniería en UTEC en el presente año. En los primeros semestres de las carreras de Ingeniería en Energías Renovables, (IER), Ingeniería Agroambiental (IAgro) e Ingeniería en Agua y Desarrollo Sostenible (IAgua), se dictan las unidades curriculares (U.C.) de álgebra y matemática I en IER, métodos cuantitativos I en IAgro e IAgua. Una de las preocupaciones del equipo de matemática del ITRCS, es la evaluación de en las distintas U.C., esta temática presenta una amplia variedad de modalidades, específicamente en este trabajo se presenta la evaluación múltiple opción con grado de seguridad, como una herramienta que propicia el aprendizaje matemático desde una reflexión profunda sobre lo que el estudiante percibe de su conocimiento matemático. Particularmente se diseña e implementa una prueba diagnóstica múltiple opción con niveles de seguridad para todos los estudiantes de Ingeniería que ingresaron en el presente año lectivo a la Universidad.

2 Marco teórico

El tema evaluación es un tema que demanda como docentes una impronta desde lo conceptual, los contenidos de las U.C., lo tecnológico,lo didáctico, desde una perspectiva de evaluación por competencias, es que surge la necesidad de diseñar pruebas desde las cuales el estudiante pueda ser consciente de su desempeño y logre realizar procesos de metacognición que lo ayuden a generar una actitud proactiva frente a su propio proceso de aprendizaje. . Ante esta realidad y enmarcados en la evaluación formativa es que (Ravela P.,Picaroni B.,Loureiro G., 2017,pág.207) [1] proponen que el propósito principal es ayudar al estudiante a avanzar en el aprendizaje, a partir de la constatación de la distancia entre lo que ha alcanzado y las intenciones educativas del docente. La función formativa, concretada a través de las devoluciones y de las siguientes orientaciones de cómo avanzar, puede ser realizada por el docente, por el propio estudiante y/o por sus propios compañeros. Además de lo anterior, la evaluación formativa tiene como función aportar al docente información útil para revisar y ajustar su propuesta de enseñanza.

Es en función de este paradigma que se diseña un prueba diagnóstica múltiple opción con grado de seguridad para todos los estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería en la UTEC en el ITRCS con el objetivo de realizar un diagnóstico profundo de esta generación que ingresa. Múltiples causas motivan la puesta en marcha de esta evaluación diagnóstica, entre ellas se destaca como importante el impacto de la pandemia en los procesos de aprendizaje de los estos estudiantes, quienes en su gran mayoría realizaron el bachillerato bajo esta emergencia mundial. En este sentido se pensó una prueba diagnóstica que aporta evidencias sobre los aprendizajes obtenidos por los estudiantes en cursos anteriores, que diera cuenta de los conocimientos previos con los que estos comienzan las carreras y permita al equipo docente planificar en base a estos aportes las U.C. antes mencionadas.

En este sentido (Gardner 2008) [2], plantea que la evaluación cumple un papel fundamental en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y distingue tres puntos neurálgicos:

- Los instrumentos de evaluación utilizados y las formas de evaluación impactan en el modo de estudiar y pensar de los estudiantes.
- La evaluación debe permitir que los estudiantes puedan reflexionar sobre sus pensamientos y a través de ello juzgar sus capacidades y habilidades.
- La evaluación impulsa el aprendizaje, en el sentido que la obtención de buenos logros por parte del estudiante, resultará en la obtención del objetivo perseguido por ellos, sea la aprobación de una unidad curricular, el pasaje de grado, la obtención de un título, entre otros.

En particular la evaluación diagnóstica, como plantean (Encina F., Peralta J., Cuevas O., Ansaldo J., 2017, pág.5) [3], que se aplica antes del inicio de un proceso educativo largo, se utiliza con la finalidad de averiguar principalmente si los alumnos poseen los conocimientos previos que son prerrequisitos para poder asimilar de manera significativa los nuevos contenidos por aprender en el programa por iniciar.

En base a lo anterior es que se diseña una prueba múltiple opción que se le asocia el grado de seguridad en las respuestas de cada pregunta, en cada bloque, definiendo las categorías de: nada seguro, poco seguro, seguro y muy seguro. Este tipo de evaluación promueve que los estudiantes puedan reflexionar sobre el grado de seguridad con el cual dan sus respuestas, se genere reflexión de lo que se elige, entendimiento, validación y por sobre todo un proceso de metacognición sobre su propio aprendizaje, ya que sitúa a los estudiantes en posición de conocer su grado de seguridad. Este tipo de evaluación, una vez que se realice el correspondiente feedback con el docente y sus pares, permite al estudiante generar un conocimiento personal de los contenidos que se presentan en los distintos bloques, lo que contribuye a que construyan su aprendizaje matemático.

Este tipo de pruebas mejora la autoconfianza de los estudiantes inseguros, dado que el grado de confianza no pretende manifestar una seguridad general sino que hace foco en la seguridad de cuestiones particulares. [2] Al mismo tiempo fomenta la capacidad de reflexión, la metacognición, promoviendo y motivando a aquellos estudiantes que contestan correctamente y están seguros de sus conocimientos.

Marcar el grado de seguridad de las respuestas promueve la comprensión de los problemas, la generación de justificaciones, pensar el por qué de los procedimientos mecánicos, cuestionarse sobre los resultados obtenidos y por ende a no sólo reaccionar frente a la elección de la opción correcta. [2]

La elaboración de la prueba múltiple opción implica, entre otras cosas, hacer foco en la elaboración de los distractores que presenta cada pregunta. Este elemento que forma parte de la estructura interna de la prueba, da validez a la misma y eleva la confiabilidad del instrumento. La construcción de distractores funcionales, que se fundamenten en posibles errores, determina la calidad de las preguntas y la revisión crítica de las mismas por parte de los estudiantes. En este sentido la redacción de los ítems exige un tiempo de trabajo importante para el equipo

docente, es compleja, requiere práctica y actualización, ya que su metodología está en constante desarrollo. Implica generar preguntas claras, concisas y sin ambigüedades, con distractores de calidad, que sean posibles, lógicos y consistentes. Jurado, et al. (2013) [4]

Múltiples investigaciones manifiestan una relación consistente entre "la elección de distractores y la puntuación global de la prueba". [4] Para estudiar la calidad y funcionalidad de los distractores en la prueba el Dr. Thomas haladyna establece cinco puntos:

- Reducir la cantidad de ítems.
- Mejorar la calidad de los ítems.
- Detectar las razones que expliquen los problemas de desempeño de los ítems.
- Incrementar los estudios de los procesos cognitivos en el aprendizaje.
- Analizar el funcionamiento diferencial de los distractores. [4]

Tanto (Jurado, et al. 2013; Aguirre y Ponce De León 2017) [5] plantean que un distractor que es elegido por pocos estudiantes es un distractor no funcional, que puede presentar problemas de diseño por lo cuál un número limitado de estudiantes o ningún estudiante lo elije, esto aumenta el tiempo de la prueba sin un aumento de validez de la misma. Al mismo tiempo, un distractor que es elegido mayormente por estudiantes con altos desempeños presenta problemas de efectividad, los distractores bien construídos deben discriminar según el desempeño de los estudiantes.

3 Metodología

La prueba diagnóstica de matemática múltiple opción diseñada y aplicada por el equipo de docentes encargados de las primeras U.C. de las distintas carreras de Ingenierìa en ITRCS, está definida en tres grandes Bloques: Bloque 1: álgebra, Bloque 2: modelizaciòn y Bloque 3: cálculo. En el Bloque 1 se evalúan contenidos matemáticos como expresiones algebraicas, ecuaciones y sistema de ecuaciones, el Bloque 2 evalúa el trabajo en resoluciòn de problemas asociados a distinto modelos matemáticos y trigonometría, el Bloque 3 evalúa los modelos de funciòn, lineal, cuadrático y exponencial.

Para la construcción y planificación del instrumento de evaluación se elaboró una tabla para cada pregunta. La misma contiene el Bloque de contenido asociado a la pregunta, el enunciado base, la respuesta correcta, los distractores y el grado de dificultad. Tanto la respuesta correcta como los distractores tienen el desarrollo procedimental con las justificaciones asociadas y los fundamentos de los posibles errores. Un ejemplo de estas tablas se puede observar en la Figura 1.

Bloque de Contenido		Expresiones algebraicas
Enunciado Base		
Ejercicio 1: Considere la siguiente expresión $$(xy)^2\left(\frac{x}{y^2}\right)^5$$ La única expresión equivalente a ésta es:		
Respuestas posibles		
Alternativas		Justificación del distractor y opción correcta
(a)	x^6	Realiza: $(xy)^2\left(\frac{x}{y^2}\right)^5 \underset{\text{Aplica mal dos propiedades: potencia de un producto y potencia de un cociente}}{=} xy^2\left(\frac{x^5}{y^2}\right) = x^6$
(b)	x^7	Realiza: $(xy)^2\left(\frac{x}{y^2}\right)^5 \underset{\text{No eleva el denominador}}{=} x^2y^2\left(\frac{x^5}{y^2}\right) = x^7$
(c)	$\frac{x^7}{y^5}$	Realiza: $(xy)^2\left(\frac{x}{y^2}\right)^5 \underset{\text{Aplica mal la propiedad potencia de potencia considerando el denominador}}{=} x^2y^2\left(\frac{x^5}{y^7}\right) = \frac{x^7}{y^5}$
(d)	$\frac{x^7}{y^8}$	Respuesta correcta. Realiza: $(xy)^2\left(\frac{x}{y^2}\right)^5 = x^2y^2\left(\frac{x^5}{y^{10}}\right) = \frac{x^7}{y^8}$
Grado de dificultad		Alto

Fig. 1. Ejemplo de tabla esquemática para una pregunta del Bloque 1. Se puede visualizar el enunciado base, los distractores con las respectivas fundamentaciones y la respuesta correcta.

El proceso de elaboración de la prueba, la elección, sistematización y fundamentación de los distractores, contribuyen a que la misma tenga validez y confiabilidad y en consecuencia aporte evidencias del desempeño de los estudiantes.

La prueba fue aplicada a 134 estudiantes que ingresan a las distintas carreras de Ingenierìa en el inicio del primer semestre de la cohorte 2022. Se planificó para realizarla todos en el mismo momento y con una duración de 2hs. En el proceso de implementación, cada estudiante debe elegir una opción para cada pregunta y a su vez marcar el grado de certeza de su respuesta. Luego de la aplicación de la prueba se llevó a cabo el procesamiento y análisis de resultados.

4 Resultados

La información que se obtiene del análisis de los resultados de la prueba diagnóstica es información fiable sobre el desempeño de los estudiantes dado que la prueba tiene validez y confiabilidad, está estructurada en función de los

bloques de contenidos definidos y genera evidencias de la percepción que los estudiantes tienen de sus saberes, los cuales han sido desarrollados en los cursos de educación media en años de pandemia covid.

A continuación se muestran los resultados obtenidos diferenciándose claramente, la relevancia de los mismos en función del grado de certeza con el que responde el estudiante, del resultado general de la prueba sin esta categoría de análisis. La tabla 1 muestra los resultados generales de la evaluación diagnóstica por Bloque, en el Bloque 1 de álgebra se obtuvo un 41 % de respuestas correctas, en el Bloque 2 de modelación un 38% correcto y en el Bloque 3 de cálculo un 33%. Tomando en cuenta los resultados que se presentan en la tabla 2 se tiene que del 41% de los estudiantes que responden correctamente el Bloque de álgebra, sólo un 7% lo realiza de forma muy segura, 0% lo responde de forma segura, un 15% responde correcto de forma poco segura y un 20% responde correctamente de forma nada segura. En cuanto a las respuestas incorrectas del Bloque de álgebra aquellas respuestas incorrectas muy seguro alcanzaron un 1%, las incorrectas seguras un 0%, un 24% contesta incorrectamente poco seguro y un 33% contesta incorrecto nada seguro. Figura 2 .

Los porcentajes obtenidos en las respuestas correctas nada seguro (15%), correctas poco segura (15%), incorrectas poco seguro (24%) y incorrecto nada seguro (33%), deja en evidencia que independientemente de que la respuesta sea correcta o no, el 92% de los estudiantes presentan poca o ninguna seguridad en sus respuestas, es decir, dudan de los procedimientos y justificaciones para la resolución de las preguntas. De la misma manera en los bloques de modelación y cálculo estos porcentajes globales alcanzan un 71% y 88% respectivamente Tabla 2, lo que genera que en todos los Bloques más del 70% de los estudiantes contesten de forma insegura. Estas respuestas invitan al equipo docente a profundizar en procedimientos de verificación, que den herramientas a los estudiantes en la toma de decisiones.

Tabla 1. Análisis de las respuestas por bloque Temático.

Respuesta	Bloque 1: Álgebra	Bloque 2: Modelación	Bloque 3: Cálculo
Correcto	41%	38%	33%
Incorrecto	59%	62%	67%

Tabla 2. Análisis de las respuestas por bloque Temático teniendo en cuenta el grado de seguridad del estudiante al momento de indicar la opción correcta.

Respuesta	Seguridad	Bloque 1: Álgebra	Bloque 2 : Modelación	Bloque 3: Cálculo
1. Correcto	Muy seguro	7%	16%	8%
2.Correcto	Seguro	0%	0%	0%
3.Incorrecto	Nada seguro	33%	26%	41%
4.Incorrecto	Poco Seguro	24%	23%	22%
5.Correcto	Poco Seguro	15%	7%	6%
6.Correcto	Nada seguro	20%	15%	19%
7.Incorrecto	Seguro	0%	0%	0%
8.Incorrecto	Muy seguro	1%	13%	4%

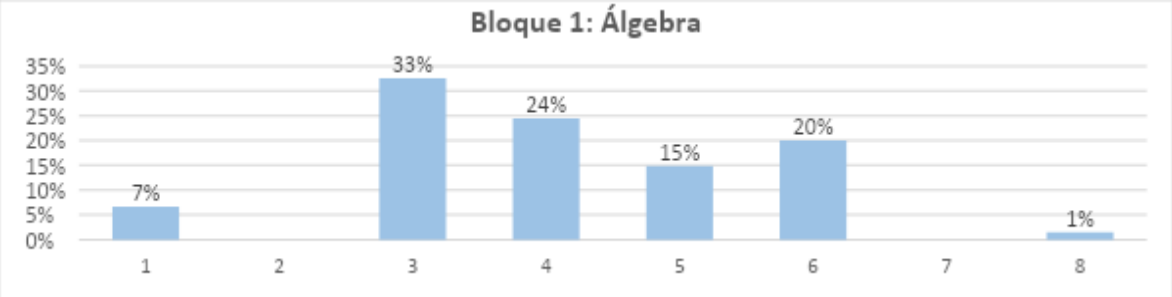


Fig. 2. Resultados del Bloque 1: Álgebra.

En la figura 3 se representan los resultados del bloque modelización donde nuevamente queda de manifiesto que del 38% de las respuestas correctas, solo el 16% lo realiza de forma muy segura. Un 15% responde de forma correcta pero con un grado de confianza nada seguro, lo cual muestra que el contestar de forma correcta no implica que el estudiante tenga consolidado los contenidos de modelización de forma solvente. Los resultados incorrectos son un 62% del cual un 26% está nada seguro, un 23 % poco seguro y un 13% muy seguro, esto muestra que los que contestaron de forma incorrecta presentan distintos niveles de seguridad en los contenidos que no tienen incorporados aún con respecto a la modelización.

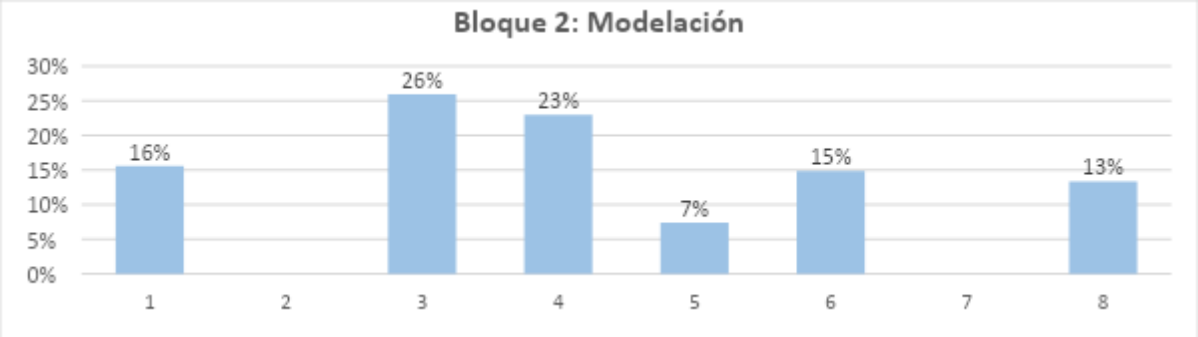


Fig. 3. Resultados del Bloque 2: Modelación.

El bloque de cálculo es el que presenta un porcentaje más bajo de respuestas correctas, solo un 33 % de estudiante responden correctamente las preguntas de este bloque. De este porcentaje solo el 8% de los que responden correctamente lo hacen de forma muy segura. De los que responden de forma incorrecta llama la atención que el 41% lo hace de forma nada segura. Figura 4.

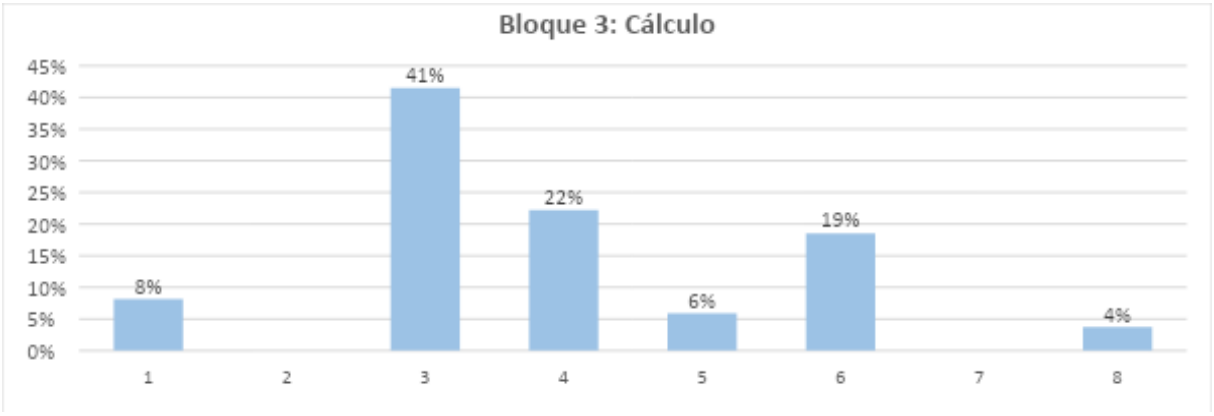


Fig. 4. Resultados del Bloque 3: Cálculo.

Es relevante observar el bajo porcentaje de respuestas correctas muy seguras en los tres Bloques, 7 % en álgebra, 16% en modelación y 8% en cálculo, que conjuntamente con la información de que ningún estudiante contestó de forma correcta segura en ninguno de los Bloques muestra el bajo porcentaje de conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes para comenzar las U.C..

Además se evidencian dificultades en el Bloque modelación dado que un 13% de los estudiantes contestan incorrectamente con un grado de seguridad, muy seguro. Esto implica un trabajo profundo del equipo docente durante el primer semestre haciendo hincapié en la interpretación de modelos de situaciones, que son el eje transversal de la educación tecnológica en UTEC.

En el otro extremo es necesario hacer foco en los altos porcentajes de respuestas correctas nada seguras, 10% álgebra, 15% modelación, 19% cálculo, que implican nuevamente aprendizajes que no han sido apropiados por los estudiantes y que requerirán un tratamiento importante de los docentes.

Contrastando las lìneas teóricas que enmarcan el presente trabajo, tomando en cuenta a (Ravela P.,Picaroni B.,Loureiro G) [1] se resalta la importancia de realizar un diagnóstico que plantee como actor central al estudian-

te en su integralidad, que no ponga foco en los resultados obtenidos, sino en los procedimiento, justificaciones y fundamentación que los estudiantes realizan, ya que en esta propuesta queda de manifiesto que los resultados puros y concretos no describen la realidad del estudiante, en cuanto a que, en el grado de certeza en las respuestas, se evidencia una gran incertidumbre en lo que sabe el estudiante y cómo lo sabe. Estos resultados son insumos fundamentales para la planificación de las U.C. de los primeros semestres, ya que el análisis de resultados de cada bloque muestra los tipos de errores que los estudiantes presentan y que son importantes para el desarrollo de los contenidos de las diferentes U.C. del primer semestre.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Esta experiencia brinda información valiosa sobre el nivel matemático con el que ingresan los estudiantes a la Universidad y permite detectar desde el comienzo de las respectivas U.C. de matemática, las dificultades para trabajar en los distintos bloques temáticos desde una perspectiva crítica, por ejemplo considerando los estudiantes que están muy seguros y contestaron de forma incorrecta y los seguros que contestaron de forma incorrecta. Este tipo de prueba, así diseñada, brinda insumos para mejorar las prácticas profesionales de enseñanza de la matemática, atendiendo a las dificultades observadas en la prueba, a los desempeños obtenidos y a los posibles errores cometidos

Una proyección importante a considerar a partir de esta investigación es el diseño de las U.C. de posteriores semestres con evaluación diagnóstica y evaluaciones formativas de múltiple opción con grado de seguridad y como complemento innovador, generar una opción de categoría, Otros, en la cual el estudiante pueda escribir por qué el grado de seguridad elegido. Esto va a permitir analizar y tomar en cuenta el hándicap que tiene y siente el estudiante con mayor profundidad.

A su vez sería bueno relacionar la respuesta y el grado de seguridad con la calificación obtenida por el estudiante, esto eleva la confiabilidad y validez de la prueba, atiende con mayor objetividad las respuestas fundamentadas de las elegidas al azar y con la práctica estimula la confianza del estudiante.

Sin dudas el tema evaluación nos desafía como profesionales de la educación a seguir innovando y tomando al estudiante como eje central para pensar la misma, en función del desarrollo integral del mismo, en pos de generar un estudiante y futuro profesional, con confianza y reflexivo de su accionar.

Referencias

1. Ravela P.,Picaroni B.,Loureiro G. (2017). *¿Cómo mejorar la evaluación en el aula?*, Uruguay, Grupo Magro Editores.
2. Gardner Medwin., T. (2008). *Perspective on Certainty-Based Marking*/Entrevistado por Reid Cornwell. Perspectivas.
3. Encinas P., Peralta F., Cuevas J., Ansaldo O. (2017). Diagnóstico de los conocimientos básicos de matemáticas en alumnos universitarios de nuevo ingreso. *Revista de Docencia e Investigación Educativa*, 3(7), 1-13.
4. Jurado M., Flores F., Delgado L., Sommer H., Martínez A., Sanchez M. (2013). Distractores en preguntas de opción múltiple para estudiantes de medicina: ¿cuál es su comportamiento en un examen sumativo de altas consecuencias?. *Elsevier. Investigación en Educación Médica*. 2(8), 202-210.
5. Aguirre R, Ponce de León RM. (2017) Factor de corrección y análisis de ítems: grado de dificultad, poder de discriminación, efectividad de las respuestas de distracción y confiabilidad. Universidad de San Carlos de Guatemala. Facultad de Odontología, Departamento de educación odontológica. URL disponible en: http://www.usac.edu.gt/fdeo/biblio/factordecorreccion.pdf.
6. Baldonado, M.; Chang, C.-C.K.; Gravano, L.; Paepcke, A.: The Stanford Digital Library Metadata Architecture. Proceedings of the 3rd International Conference on Web Information System and Technologies (WEBIST 2007), pp.108–121 (1998).
7. Ministerio de Educación. Gobierno de la República de Guatemala. (2009). *Solución a los ítems ejemplo de matemática de la evaluación TER.*

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Estudio sobre la mediación digital en pandemia del profesorado de Matemática del Nivel Superior

María C. Kanobel[1], Débora M. Chan[1], María G. Galli[1], Roxana Ramirez[3]
[1] Carrera de Informática Aplicada, Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Triunvirato 3174, CABA
{cristina.kanobel, debora.chan, gabriela.galli}@inspt.utn.edu.ar,
[2] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Almafuerte 1033, Paraná, Entre Ríos
roxanaramirez@frp.utn.edu.ar

Resumen. Se presenta un estudio exploratorio de tipo cuantitativo y alcance correlacional sobre el uso de herramientas digitales incorporadas por el profesorado de Matemática del Nivel Superior de Argentina para mediar la enseñanza en contextos de presencialidad remota en pandemia. El relevamiento fue realizado en 2021 entre 1155 docentes de distintas disciplinas de universidades e institutos superiores de todo el país. Para este estudio se seleccionaron 133 docentes de Matemática. Los resultados indican que la mayoría encuestada utiliza entre uno y dos artefactos para mediar la enseñanza. Las herramientas digitales de uso más frecuente están asociadas a la comunicación sincrónica y asincrónica y a procesadores de textos; las menos frecuentes son lúdicas y de trabajo colaborativo. Se halló asociación entre la cantidad de herramientas digitales utilizadas tanto según género como según tipo de institución donde desempeñan su labor. Se destaca una alta percepción del profesorado sobre sus propias competencias digitales docentes.

Palabras Clave: Educación Superior, Profesorado, Enseñanza remota de emergencia, Herramientas digitales, Matemática.

1 Introducción

A principios de 2020, las medidas de excepción dictadas por las autoridades argentinas a raíz de la pandemia, provocó una masiva migración de las clases presenciales de todos los niveles educativos a la denominada enseñanza remota de emergencia (ERE) [1] [2]. De esta forma, las instituciones educativas de todos los niveles se vieron obligadas a adoptar diversas estrategias mediadas por tecnología digital para garantizar la continuidad pedagógica [3]. En este sentido, las tanto las instituciones de educación universitaria como los institutos de educación superior (IES), adoptaron distintas modalidades (presencial, mixta o totalmente remota) según las disposiciones de las distintas jurisdicciones del país.

Por otro lado, el colectivo docente debió asumir el desafío de afrontar el diálogo didáctico mediado [4] en un contexto de virtualidad forzada, con distintos niveles de competencias digitales, recursos tecnológicos y servicios de comunicación. Estas condiciones definieron diversas formas de interacción y provocaron distintas acciones para la producción de conocimiento [5].

Este trabajo se propone caracterizar tipos de herramientas y artefactos digitales utilizados para mediar la enseñanza por parte del colectivo del área Matemática del nivel superior de Argentina, en contexto de presencialidad remota, durante el año 2021 y la percepción que tienen sobre sus propias competencias digitales docentes (ACDD). Se debe destacar que este estudio es parte de una investigación mayor vinculada con las características del perfil

del profesorado de Educación Superior de Argentina, su autopercepción y el nivel de sus propias competencias digitales.

2 Metodología

El relevamiento de datos se realizó al inicio del primer cuatrimestre 2021, sobre 1155 docentes de distintas áreas disciplinares del Nivel Superior de las 24 jurisdicciones de Argentina. Como criterio de selección se consideró haber estado prestando servicios en alguna institución de Nivel Superior durante el período mencionado.

Para el relevamiento de datos se aplicó un cuestionario semiestructurado, autoadministrado, de 34 preguntas. Fue distribuido vía correo electrónico teniendo en cuenta el anonimato y la confidencialidad de los datos. Para el presente estudio, se seleccionó la información dada por 133 docentes del área Matemática, vinculada con los primeros 10 ítems del formulario. El procesamiento de datos se realizó con el software R (versión 4.0.2), aplicando métodos de visualización y de estadística univariada y multivariada (α=0,05).

3 Resultados

Del total de docentes de participantes, el 64.77% corresponde al género femenino y el 35.23% al masculino. La distribución conjunta de Género y Edad se presenta en la tabla 1, donde la mayor proporción de docentes tiene entre 41 y 60 años.

Tabla 1. Distribución del profesorado por género y rango etario.

Rango Etario	Femenino	Masculino
21-30	2	3
31-40	13	7
41-50	23	13
51-60	38	13
61 o más	10	11

La antigüedad en el nivel del colectivo participante oscila entre los 1 y 46 años, con una media 18.86 años y un desvío estándar 10.43 años. En la Figura 1 se observa la distribución de la antigüedad por género: en el caso de las mujeres es bimodal y con menor variabilidad que la de los hombres; que tiene presente un solo modo intermedio entre los dos modos de la distribución femenina. De esta información se concluye que la antigüedad más frecuente del género masculino se encuentra entre los 13 y 23 años y para el género femenino, entre 6 y 13 años y entre 20 y 25 años.

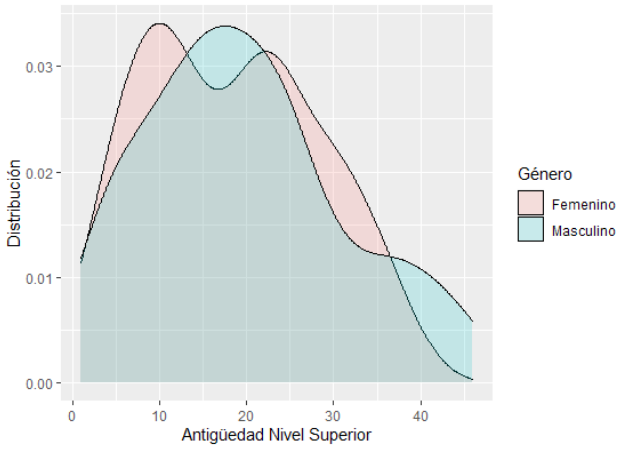


Fig. 1. Distribución de la antigüedad del profesorado por género.

La representación en el subconjunto relevado del profesorado según las distintas regiones de la Argentina se describe en la Figura 2, donde se observa una mayor proporción de docentes del Área Metropolitana de Buenos Aires (AMBA) por sobre el resto del país.

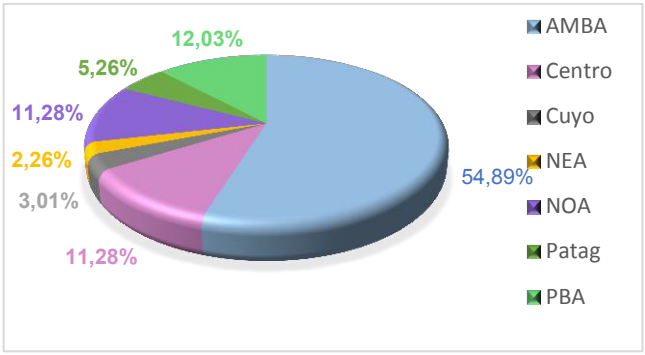


Fig. 2. Distribución del profesorado de Matemática según región geográfica.

Con respecto al tipo de institución donde trabajan, un 57% lo hace solo en el ámbito universitario, el 25% en IES y el 18 % en ambos (Figura 3).

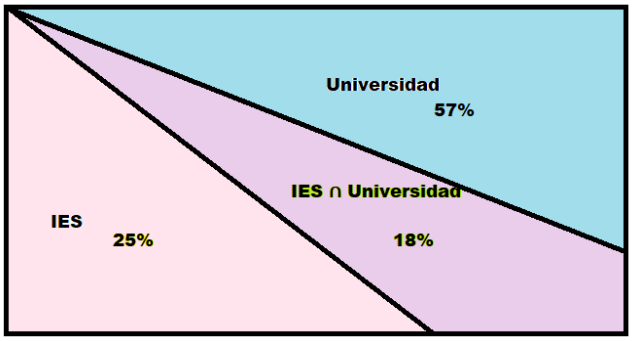


Fig. 3. Distribución del profesorado de matemática según tipo de Institución.

3.1 Tipos de herramientas digitales y artefactos usados para mediar las prácticas

Al indagar sobre los tipos de artefactos que el profesorado de Matemática utilizó para mediar los procesos de en-

señanza, se destaca que ninguno ha manifestado desarrollar sus clases solamente a través de smartphone o tablet. El 32.33% ha utilizado un solo tipo de dispositivo (computadora de escritorio, netbook o notebook), el 40.60% ha usado dos tipos (computadoras de escritorio/netbook/notebook y smartphone o tablet) mientras que el resto afirmó usar tres o más.

Con respecto a la experiencia en el uso de herramientas digitales (HD) en las clases de Matemática, el profesorado tiene una antigüedad que oscila entre 1 y 28 años, con una media de 9.08 años y un coeficiente de variación de 62.87%, valor que indica mucha variabilidad. Además, del análisis se desprende que el 90% del profesorado participante lleva no más de 15 años trabajando con HD.

En la Figura 4 se pueden visualizar grandes diferenciase en la antigüedad en el uso de HD por parte del profesorado según región geográfica: los colectivos residentes en Provincia de Buenos Aires (PBA) y Patagonia son quienes menos heterogeneidad presentan respecto del resto.

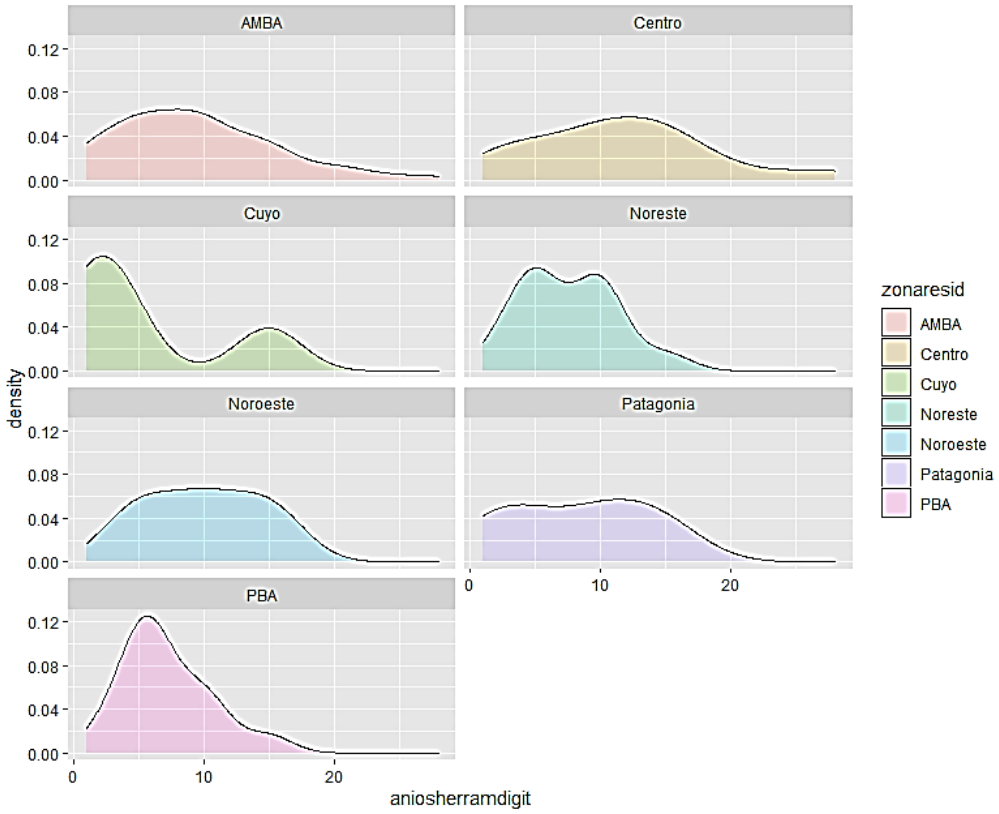


Fig. 4. Distribución de años de uso de HD del profesorado de Matemática según Zona.

En el relevamiento el profesorado ha indicado cuáles de las categorías de HD incorporaba en sus prácticas. En la tabla 2 se presenta la distribución porcentual de uso de HD.

Tabla 2. Distribución del uso de herramientas digitales por parte del profesorado de Matemática.

Herramientas Digitales	n	%
Aplicaciones Específicas	102	77
Comunicación asincrónica	117	88
Comunicación sincrónica	114	86
Cuestionarios	74	56
Construcción colaborativa	53	40
Entornos de gestión y comunicación	94	71
Multimedia online	65	49
Alojar archivos en la nube	98	74
Planilla de cálculo	75	56
Posters y Mapas Mentales	20	15
Lúdicas	12	9
Plataformas de gestión unificadas	23	17
Presentaciones	90	68
Procesador de texto	105	79
Simuladores	40	30
Edición Imágenes 2D y 3D	10	8

Los datos de la tabla 2 indican que más del 70% del profesorado utiliza procesadores de texto, herramientas de comunicación sincrónica y asincrónica, aplicaciones específicas para la asignatura, herramientas para alojar archivos en la nube y entornos de gestión y comunicación. Se destaca además que menos del 10% del colectivo encuestado utiliza herramientas lúdicas y de edición de imágenes 2D y 3D.

Al realizar un análisis sobre la cantidad de categorías de HD utilizadas, el 60% del profesorado participante afirmó incluir en sus clases por lo menos 8 de las categorías de HD presentadas en el cuestionario. Además, se concluye que existen diferencias significativas (Test de Kruskal-Wallis, p valor = 0.03) entre los grupos definidos por el tipo de institución donde se desempeña el profesorado (universidad, institutos de educación superior) como también según el género del colectivo participante (Test de Wilcoxon, p valor= 0.032). Por otro lado, solo se hallaron diferencias estadísticamente significativas según el tipo de institución (universidad e institutos de educación superior) donde se desempeña el grupo participante en las categorías de herramientas de simulación (p valor= 0.02, Test exacto de Fisher), de entornos de gestión (p valor =0.018, Test exacto de Fisher), de edición de imágenes 2D y 3D (p valor= 0.022, Test exacto de Fisher) y en las de plataformas unificadas de comunicación (p valor=0.014, Test exacto de Fisher).

Atendiendo a las categorías de uso de HD presentadas, se realizó una clasificación posterior en función del tipo de institución donde el profesorado desarrolla su labor: solo universidad, solo institutos de educación superior (IES) y en ambos. En la tabla 3 se puede apreciar que las herramientas lúdicas y las de edición de imágenes 2D y 3D son las menos utilizadas en las tres categorías de instituciones.

Tabla 3. Distribución del uso de herramientas digitales por categoría de institución.

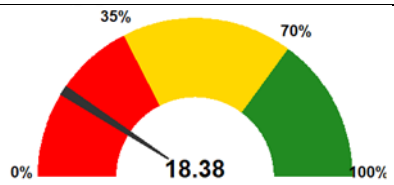
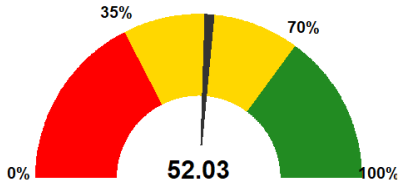
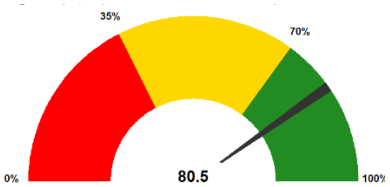
Categoría de HD	Ambos	IES	Universidad
Comunicación sincrónica	91.67	87.88	86.84
Comunicación asincrónica	87.5	87.88	85.53
Aplicaciones específicas	79.17	78.79	75
Cuestionarios	50	54.55	57.89
Lúdicas	8.33	12.12	7.89
Construcción colaborativa	50	36.36	38.16
Simuladores	54.17	27.27	23.68
Alojar archivos en la nube	83.33	81.82	67.11
Entornos de gestión y comunicación	83.33	48.48	76.32
Edición de imágenes 2D y 3D	16.67	12.12	2.63
Multimedia	58.33	54.55	43.42
Planilla de cálculo	54.17	66.67	52.63
Plataformas de gestión unificada	79.17	78.79	75
Presentaciones	79.17	63.64	65.79
Posters y mapas mentales	8.33	39.39	6.58
Procesador de texto	83.33	78.79	77.63

En la tabla 3 se visualizan los distintos niveles de uso de las HD consideradas teniendo en cuenta tres subgrupos de docentes: quienes trabajan solamente en el nivel universitario, quienes lo hacen solo en institutos de educación superior y quienes se desempeñan en ambos tipos de instituciones. Se pueden observar algunas diferencias según grupo de pertenencia. En el grupo que trabaja en IES se aprecia un mayor uso de HD lúdicas, posters y mapas metales por sobre los otros dos grupos, en el grupo de docentes que se desempeñan en ambos tipos de instituciones se destaca una mayor utilización de herramientas de simulación y de construcción colaborativa respecto del resto, en las herramientas de edición de imágenes 2D y 3D, en posters y mapas mentales.

Al considerar el promedio de uso para las categorías de HD relevadas en los tres subgrupos mencionados, se definen tres niveles. Según se visualiza en la Tabla 4, el profesorado asigna bajos niveles de inclusión en sus prácticas a aquellas HD del tipo lúdicas, posters, mapas mentales y simulaciones que son herramientas más orientadas al trabajo centrado en el estudiantado.

Por otro lado, es importante señalar que las HD más utilizadas por el profesorado son las que están orientadas a la comunicación con el estudiantado y a la gestión de la clase.

Tabla 4. Distribución del uso promedio de herramientas digitales por niveles.

Nivel de uso	Tipo de HD	Promedio
 Bajo	Lúdicas	9.74
	Imágenes 2D y 3D	10.75
	Posters y mapas mentales	18.10
	Simulaciones	34.66
 Medio	Construcción colaborativa	42.01
	Multimedia	53.02
	Cuestionarios	55.13
	Planilla de cálculo	57.97
	Presentaciones	69.53
 Alto	Entornos de gestión y comunicación	70.31
	Alojar archivos	77.96
	Aplicaciones específicas	78.16
	Plataforma de gestión unificada	78.16
	Procesador de texto	79.92
	Comunicación asincrónica	88.79
	Comunicación sincrónica	89.55

3.2 Percepciones del profesorado sobre sus competencias digitales

En una de las secciones del instrumento utilizado, se le solicitó a cada participante del estudio asignarse una calificación entre 1 y 6 para evaluar el nivel de desarrollo de su propia competencia digital, siendo 1 el valor mínimo y 6. el máximo. Los resultados obtenidos se describen en la Figura 5:

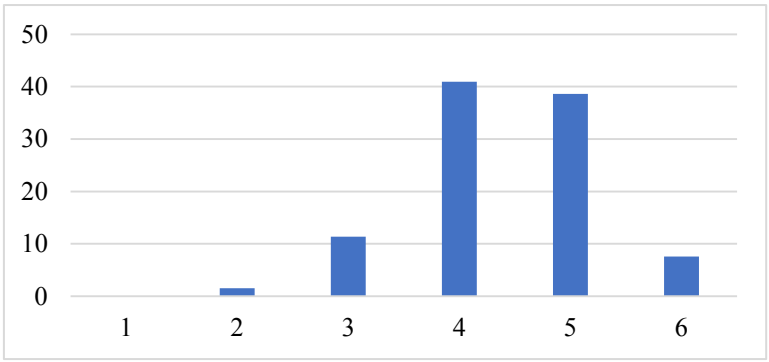


Fig. 5. Distribución de años de uso de HD del profesorado de Matemática según Zona.

En una de las secciones del instrumento utilizado, se le solicitó a cada participante del estudio asignarse una calificación entre 1 y 6 para evaluar el nivel de desarrollo de su propia competencia digital, siendo 1 el valor mínimo y 6. el máximo. Los resultados indican que alrededor de un 87% se asignan puntajes entre 4 y 6, es decir que tienen percepciones altas de su propia competencia digital.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Para finalizar este artículo, resulta interesante describir las conclusiones o ideas más importantes y los trabajos futuros que se desarrollarán a partir de éstas. Los resultados descriptos en párrafos anteriores revelan que una gran mayoría de las respuestas del profesorado que se desempeña en el área de Matemática (67%) corresponden a docentes de la Provincia de Buenos Aires (incluido AMBA) y el resto se distribuye entre las distintas regiones del país. Un 75% del colectivo participante se desempeña en universidades y un 43% en Institutos, donde el 65% de la muestra tiene entre 41 y 60 años. Se destaca que participaron del estudio más profesoras que profesores. Se observa una gran disparidad en los años de experiencia en el uso de HD para mediar la enseñanza de la disciplina.

Es importante señalar que ningún/a docente ha manifestado usar solamente dispositivos móviles (smartphones, tablets) como artefactos para mediar la comunicación. Además, se destaca que el grupo encuestado afirmó utilizar con mayor frecuencia herramientas de comunicación sincrónica y asincrónicas. Estos resultados refuerzan con las conclusiones de RedTE.ar [5] acerca de las distintas formas de interacción dadas en contexto de pandemia y evidencian los esfuerzos realizados por el profesorado por establecer comunicación con el estudiantado. Además, otras de las herramientas más utilizadas fueron los procesadores de texto y aplicaciones específicas asociadas a la enseñanza de la disciplina. En esta última categoría se ubican algunas aplicaciones que colaboran con la modelización, posibilitan el análisis y la extracción de conclusiones a partir de distintas perspectivas de un mismo problema ayudando y motivando al alumnado en el hacer matemático.

Por otra parte, más de la mitad del profesorado ha manifestado incluir por lo menos el 50% de las categorías de herramientas presentadas. Vale mencionar que se halló asociación entre la variedad de herramientas utilizadas por el profesorado y el género, como así también se encontró relación con el tipo de institución donde la muestra docente desarrolla su labor.

Por otro lado, se destaca que un gran porcentaje del grupo encuestado considera que tiene alto desarrollo de sus competencias digital docente. Sin embargo, se concluye que, en general, es baja la proporción de docentes que utilizan algunos tipos de herramientas digitales orientadas al aprendizaje del estudiantado, tales como las herramientas lúdicas, las de simulación y aquellas para la elaboración de posters y mapas metales, de carácter colaborativo.

Sin embargo, si bien la tecnología educativa es un elemento importante para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, esta mejora no depende solamente de la utilización de un software educativo, sino de su adecuada integración curricular, es decir, del entorno educativo diseñado por el docente [6].

En este sentido, se observa que la alta autopercepción que el profesorado tiene de su competencia digital podría estar restringida a la destreza instrumental de herramientas digitales y sin tener en cuenta todas las dimensiones que comprenden el desarrollo de dichas competencias: compromiso profesional, contenidos digitales, enseñanza y aprendizaje, evaluación y retroalimentación, empoderamiento de los estudiantes y desarrollo de la competencia digital de los estudiantes.[7]

Para finalizar, consideramos que en el escenario actual donde predominan variedad de tecnologías digitales, se debe poner en valor la necesidad de gestar una nueva cultura del aprendizaje colaborativo por sobre el uso instrumental de diversas herramientas digitales. En este sentido, sería pertinente explorar acerca de los propósitos didácticos de la inclusión de HD en las prácticas pedagógicas del colectivo docente del área matemática del Nivel Superior.

Agradecimientos. Agradecemos al colectivo docente de Educación Superior de Argentina que participó del estudio y a la Universidad Tecnológica Nacional (INSPT, FRA, FRBA, FRP) donde desarrollamos nuestra investigación.

Referencias

1. Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., Bond, M.: La diferencia entre la enseñanza remota de emergencia y el aprendizaje en línea. https://er.educause. edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning (2020). Accedido el 25 de Mayo de 2022
2. Kanobel, M.C.: Motivación y rendimiento académico de estudiantes en contextos de enseñanza remota de emergencia: un estudio en el nivel universitario. En A. Rosas (Ed.), *Resúmenes del 6° Congreso Internacional de Matemática Educativa* pp. 85-86. Editorial Lectorum (2020)

3. Salinas, J.: Educación en tiempos de pandemia: tecnologías digitales en la mejora de los procesos educativos. *Innovaciones Educativas,* Vol. 22, Nro. especial, pp. 17-21 (2020)
4. García Aretio, L.: El diálogo didáctico mediado en educación a distancia. *Contextos Universitarios Mediados*, Vol.12, No 34 (2012)
5. RedTE.Ar: APUNTES sobre/para la docencia universitaria. *Boletín SIED. Nº3.* Universidad Nacional de Mar del Plata. (2020).
6. Díaz Pinzón, J.E.: Aprendizaje de las Matemáticas con el uso de Simulación. *Sophia*, Vol. 14, Nro. 1, pp. 22-30, (2018).
7. Redecker, C.: Marco Europeo para la Competencia Digital de los Educadores: *DigCompEdu.* (Trad. Fundación Universia y Ministerio de Educación y Formación Profesional de España). Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Formación Profesional de España (2020).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Los Trabajos Prácticos de Laboratorio como motivadores del aprendizaje y favorecedores de competencias en un entorno virtual

Eduardo De Santis[1], Cecilia Puccinelli[1], Sandra Ramirez[1], Sonia Pastorelli[1]
[1] Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe , Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610. Santa Fe. Argentina.
{edesantis, cpuccinelli, scramirez, spastorelli}@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Ante la necesidad de continuar el dictado de asignaturas del área matemática de todas las carreras de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional se necesitó, durante el 2020 y 2021, apelar a las clases de manera virtual. En este artículo queremos evidenciar los cambios que se fueron implementando en los Trabajos Prácticos de Laboratorios de la asignatura Análisis Matemático II, intervenciones que luego de evaluadas, dejaron cambios para la presencialidad. Finalmente explicitaremos las valoraciones de los estudiantes sobre las distintas opciones y las opiniones del equipo docente participante.

Palabras Clave: Trabajos de Laboratorios. Educación Remota de Emergencia. Competencias.

1 Introducción

Ante la emergencia sanitaria mundial generada por la pandemia las instituciones educativas de todos los niveles tuvieron que adaptarse a la situación. La virtualidad irrumpió en todos los niveles y la Universidad no fue la excepción [1]. Si bien en el 2020 la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional (FRSF -UTN) contaba con experiencias prácticas en Educación a Distancia tales como numerosos cursos de especialización, maestrías, doctorados, carreras cortas, algunas opciones del Seminario de Ingreso, servicios a instituciones nacionales e internacionales, etc.; dichas prácticas no alcanzaban a las asignaturas del ciclo básico de las carreras de ingeniería que en ella se dictan. También es de destacar que la mayoría de los docentes de los primeros años de ingeniería se manifestaban no adherentes a cualquier tipo de prácticas que no sea "la presencial".

Por aquel entonces -que hoy parece lejano-, los docentes de Materias Básicas e integrantes del Proyecto de Investigación "Relación entre los contenidos de las asignaturas de materias básicas y los utilizados en los proyectos finales de carrera en la FRSF de la UTN" estábamos concentrados en detectar en los proyectos finales el uso de conocimientos del área de materias básicas y las competencias que en las asignaturas básicas se favorecen. El objetivo perseguido: potenciar la relación con los más necesarios para la especialidad.

Desde que en 1973 McClelland [2], definiera competencia como "aquello que realmente causa un rendimiento superior en el trabajo", el concepto ha contado con distintas acepciones. El término competencia es sinónimo de la capacidad para resolver problemas en determinado contexto. Cuando el contexto es profesional, suele hablarse de "competencia profesional".

Es sabido que se exige al futuro profesional, en nuestro caso ingenieros, que su trabajo sea un aporte para lograr los objetivos de la organización. Abandonar los principios de división técnica del trabajo (bases del fordismo y del taylorismo) implica un gran desafío, lo que lleva a redefinir necesariamente las habilidades y conocimiento de los trabajadores [3]. Según Mastache, [4] "El cambio incluye el desplazamiento de la división del trabajo, al trabajo en equipo, del trabajo de ejecución al de planificador, del trabajo dirigido externamente al autodirigido, del control

ajeno a la responsabilidad propia".

Se requiere del profesional una actitud flexible y abierta como herramienta de adaptación al cambiante contexto, incondicional seguidor de la excelencia; capaz de liderar grupos; de manejar una adecuada comunicación con pares, subordinados y superiores; experto en la interpretación de documentación técnica y de gestión; experimentado para resolver situaciones imprevistas, autogestor de sus conocimientos, etc. Desde Materias Básicas deseamos aportar en el desarrollo de estas capacidades desde el inicio de la cursada y las evaluaciones de numerosas experiencias muestran que el desarrollo de Trabajos Prácticos de Laboratorios grupales, colaboran con el objetivo. Dichos trabajos, al ser un pilar para el desarrollo de las competencias, es deseable que estén presentes en todas las versiones de cursados: ya sean presenciales o no presenciales.

1.1 Trabajos de Laboratorio en la presencialidad

En Análisis Matemático I y II, desde hace años se trabaja utilizando Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC o CAS). Cabe destacar que este uso es una exigencia ya que la resolución 68/94 del Consejo Superior de la UTN: "Parte Homogénea del Diseño Curricular actual" [5] declara que la enseñanza de la matemática debe ser "motivada y no axiomática" y que "los trabajos prácticos de todas las materias del área matemática serán realizados en computadora, utilizando softwares especializados que permitan manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación".

Para acreditar ese empleo, como requisito para la aprobación de la cursada, los estudiantes deben aprobar Trabajos Prácticos de Laboratorios (TL) de elaboración grupal.

Cada año las consignas, formas de presentación, y propuestas de los TL sufren modificaciones derivadas de prácticas anteriores, los resultados observados, sugerencias en valoraciones, tanto de los docentes como de los estudiantes. Algunas veces los agrupamientos son libres y otras designados por el equipo docente. En algunos casos cada grupo tiene consignas diferentes y en otros, iguales. La presentación puede ser escrita y/u oral. El software a elección del grupo o designado por la cátedra.

Algunas apreciaciones de las experiencias anteriores mostraron, por ejemplo, que la conformidad y ventajas del desarrollo de estas actividades es dispar entre las distintas carreras. El reporte de investigación presentado en la CAREM 2009 [6] destaca que los estudiantes de Ingeniería en Sistemas de Información valoran más favorablemente el desarrollo del TL que sus pares de Ingeniería Industrial. También refleja que los estudiantes reconocen que mejora la comprensión de los conceptos y desarrollo de habilidades (ejemplo: el 89 % de los jóvenes acuerda que "Realizar el TL ayuda a que aprenda a presentar informes"). Desde la visión de los docentes la tarea de diseñar, acompañar a los jóvenes al desarrollo de los TL y finalmente valorarlos es productiva pero también ímproba. En reuniones de cátedra varias veces se escuchó la idea de compilar, para luego compartir como material de estudio algunos TL para los siguientes años, con el objetivo que esa tarea extenuante sea aprovechada por otros grupos. La realidad es que nunca se hizo, al menos formalmente.

1.2 Los cambios impuestos por la pandemia y la no presencialidad

Luego de la necesidad de enfrentar la imprevista situación, la que en muchos casos nos dejó sabor a triunfo, es que nos vimos en la necesidad (o en la elección) de profundizar los conocimientos sobre intervenciones didácticas no presenciales (en la que los TL no estaban ausentes) y en analizar marcos teóricos existentes, incluso para reconocer si, aunque sea de forma intuitiva, trabajamos en uno de ellos. Encontramos que surgen entonces algunas denominaciones como Educación en Línea, Educación Virtual, Educación a Distancia y Educación Remota de Emergencia, cada una de ellas con particularidades [7].

- Educación en Línea: aquella en la que los docentes y estudiantes intervienen en un entorno digital a través de las nuevas tecnologías y de las redes de computadoras, haciendo uso intensivo de las facilidades que proporciona internet y las tecnologías digitales. La participación es de manera sincrónica, en forma activa, haciendo uso de diversas plataformas como Zoom, Google Meet, Microsoft Teams, entre otras. El rol del docente es de tutor y necesita conocer los contenidos no solo para responder consultas sino para pueda reconocer los debates emergentes y asumir una moderación conceptual de los espacios de debate. Como ventajas se puede mencionar que permiten el acompañamiento a los alumnos, promueven la autogestión, reducen el gasto (como traslado a la institución educativa), permiten debates y promueven la participación de los protagonistas. Como desventajas puede mencionarse la necesidad de buena conexión a internet, muchas horas frente a la pantalla con algunas consecuencias en la salud, posibilidad de distracciones al estar en línea, fomento de "trampas" en exámenes, falta de interacción física entre alumnos.

- Educación Virtual: docentes y alumnos participan de manera asincrónica, a través de una plataforma multimedia. Los materiales didácticos se suben a dicha plataforma y se interactúa a través de foros, subiendo sus producciones y recibiendo la retroalimentación por parte del docente o de sus pares. La ventaja es no estar atado a un horario fijo, la desventaja es desconocer el uso de la plataforma, las potencialidades que ésta presenta y el presupuesto horario que el docente necesita para otorgar devolución de los conocimientos traficados en foros y producciones compartidas. Según Göller [8], la educación virtual, presencial y a distancia, ofrece ampliar las oportunidades de acceso a los grupos sociales desatendidos y aquellos cuyas necesidades así lo requieren, garantizando y mejorando la calidad de los servicios educativos prestados, aplicando los desarrollos tecnológicos a los procesos de enseñanza y aprendizaje, estimulando las innovaciones en y de las prácticas educativas contemporáneas de manera holística.
- Educación a Distancia: a diferencia de la educación virtual, esta modalidad combina espacio presencial con otro virtual, variando la proporción en cada propuesta. Es una forma de enseñanza en la cual los estudiantes no requieren asistir físicamente al lugar de estudios, empleando técnicas y estrategias de enseñanza centradas en el propio estudiante, propiciando la autogestión del aprendizaje; educación flexible y auto dirigida. Como ventaja es que no es necesario contar con una plataforma ya que el acceso a los materiales puede darse por correo, correos electrónicos, medios de comunicación, entre otros; elimina las barreras geográficas, proporciona flexibilidad en el horario ya que no hay hora exacta para acceder a la información, El alumno desarrolla una alta capacidad para autorregular su propio aprendizaje favoreciendo así sus actitudes y valores de responsabilidad, disciplina y compromiso para lograr ser autónomo. Contar además con una plataforma facilita compartir los materiales usando un repositorio. El docente debe proveer estos materiales y luego evaluar, acreditar y retroalimentar los aprendizajes. Un obstáculo de esta modalidad es que el estudiante debe ser muy organizado y asumir que no cuenta con un acompañamiento fluido con sus profesores, la responsabilidad del aprendizaje recae sobre él. También se dificulta la socialización
- Educación Remota de Emergencia: esencialmente como una "enseñanza virtual cara a cara", donde se ejecutan lecciones a través de videoconferencias. Es la que adoptamos en la FRSF durante la emergencia sanitaria generada por el COVID-19. En nuestro grupo de trabajo la mencionamos como "clases presenciales, mediadas por la tecnología". Tuvimos que adaptar, en un corto tiempo, materiales y métodos para continuar con el dictado de clases. Es una modalidad completamente nueva, por eso roles y herramientas no están definidos de manera única: hubo que trasladar los cursos presenciales a una nueva forma de dar clase combinando las modalidades anteriores: en Línea, Virtual o a Distancia. Las desventajas observadas especialmente en el primer año de pandemia: reticencia del colectivo docente a enfrentarse a situaciones desconocidas y que exigía un gran presupuesto horario para adaptar los recursos a utilizar en las clases, disparidad de recursos para la conexión virtual en el colectivo educativo (que alcanzaba tanto a alumnos como a docentes). Las ventajas que esta educación de emergencia dejó (o está dejando) son muchas, y seguramente las iremos reconociendo día a día. Para los docentes es una perfecta situación de aprendizaje (forzado quizás, pero efectivo también). Nos descubrimos actitudes y aptitudes que desconocíamos tener: descubrimiento de potencialidades de uso de herramientas, trabajo en equipo para adaptar materiales y asistirnos mutuamente; necesidad de romper con esquemas tradicionales en evaluación lo que permite hoy usar estrategias de valoración de aprendizajes impensados antes de la pandemia.

Muchos de los que, en un contexto de carreras de grado, rechazábamos - o al menos no avalábamos- la Educación en Línea, la Virtual o a Distancia reconocemos hoy que no es sólo una más de las opciones para el desarrollo de asignaturas en la Universidad, sino que es una herramienta útil para usar en casos de emergencias no sanitarias (ejemplo: paros de transporte). Este camino transitado, por momentos incierto, necesitó de cambios en la planificación, y los TL no fueron ajenos a esas variaciones. En el próximo apartado describiremos la metamorfosis ejecutada a los TL.

2 Los Trabajos de Laboratorios durante la pandemia

Durante el 2020 no se realizaron en la mayoría de los cursos, debido a que todo el esfuerzo del equipo docente estuvo dirigido a producir los materiales para el desarrollo de las clases sincrónicas en la plataforma Microsoft Teams. Dichos materiales incorporan el uso de SAC. La exigencia curricular en acreditar el uso de éstos por los estudiantes no se hizo a través de los desarrollos de los TL, sino haciendo uso de SAC durante las clases de trabajos prácticos y permitiendo el uso en los exámenes parciales y finales virtuales.

En el 2020 no hubo promoción de trabajos grupales, ni siquiera en su forma virtual. Las competencias promovidas y las desarrolladas en antiguas versiones de TL, en esta oportunidad se pospusieron o excluyeron.

Atravesado ese primer año de intensos aprendizajes y adquisición de competencias para el grupo docente de las cátedras involucradas, en el 2021 se volvió al desarrollo de los TL, con la particularidad que el jefe de trabajos Práctico asignaba todas las semanas un TL, cada uno de ellos a un grupo de 2 o 3 alumnos que atravesaba los contenidos desarrollados en la clase. Este año, los TL debían ser presentados y aprobados, como requisito para la aprobación de cursada, por todos los alumnos de Análisis matemático II siete comisiones de en promedio 45 alumnos.

Las consignas fueron ejercicios elegidos de la guía de ejercicios presentes en los textos de cátedra ([8],[9]) y que el autor cataloga como "proyectos" o de "tecnología".

Cada grupo debía resolverlos, realizar un documento que se presentaba "públicamente" al inicio de la clase virtual teórica siguiente y en la corrección participaban tanto alumnos como docentes.

El compartir estos TL servía para recuperar contenidos, permitía descubrir errores o falencias frecuentes los que, al quedar grabados en la clase, resultaría ser un material valioso para el estudiante a la hora de reconocer los conocimientos adquiridos.

Es de destacar que varios estudiantes solicitaron hacer más de un TL porque la experiencia les resultó gratificante.

En la figura 1 se muestra una captura de pantalla de la clase virtual donde un grupo de alumnos, usando una presentación que incluye una simulación con GeoGebra, escogen el mapa de contorno y gráfica correcta de una función de dos variables, justificando las razones de la elección.

Fig. 1. Imagen de la presentación de un TL en clase virtual.

Los resultados de las encuestas de la experiencia del 2021 exhiben que:

- el 88,5% de los estudiantes afirma que el TL le sirvió para estudiar y aprender el tema involucrado en la consigna dada;
- el 79% considera que realizar el TL permitió mejorar las habilidades para trabajar en grupo (el 44 % cree que el aporte fue importante, mientras que un 35 % moderado).
- El 90% opina que la realización del TL permitió mejorar sus habilidades para investigar y/o aprender en forma autónoma (el 71% opina que fue una contribución importante, mientras que el 19% moderada).
- Sólo el 5,8% de los estudiantes opinaron que los TL de sus compañeros no contribuyeron a su aprendizaje de contenidos.
- El 36% de los jóvenes no consultaron la producción de sus compañeros como material de estudios, mientras que el 64% dividió su opinión entre la consulta de algunos o de casi todos los Trabajos Prácticos de Laboratorios.

Fueron alentadores los comentarios que los estudiantes dejaron ante la consigna "¿Qué recomendación nos das

para mejorar el TL? (sobre cualquier aspecto)". Transcribimos algunas:

- Que mantengan la iniciativa, es muy dinámica y ayuda a relacionarnos mejor con nuestros compañeros y tener un poco más de expresión oral
- Que se siga haciendo de a pares y con actividades de libro. En comparación a Análisis Matemático, muchísimo más cómodo, practico, educativo y fácil
- Me gustaría que los TL se realicen más seguido: por ejemplo 1 por tema y si los profesores consideran que no hay tanto tiempo para exponerlo, que sólo se exponga uno al año, esto haría que todo el año lleve la materia al día sí o sí.
- Creo que exponerlo está bueno para exponer de forma oral, pero a la vez no me pareció muy útil escuchar el de compañeros
- Estaría bueno que sea por lo menos un TL por cuatrimestre porque el hecho de tener que hacerlo te obliga de alguna manera a tener la materia al día, lo cual puede traer buenos resultados al momento de el/los parcial/es

También reconocemos la importancia de críticas constructivas, las que serán tenidas en cuentas para próximas planificaciones de TL:

- "Un tiempo mayor entre la fecha que nos avisan que tenemos que exponer y la fecha de exposición estaría muy bien, al menos dos semanas, ya que muchas veces los alumnos estamos atendiendo cosas urgentes de otras materias (como en mi caso fue un parcial) o quizás varias al mismo tiempo"

3 Los Trabajos de Laboratorios post pandemia

De regreso a la presencialidad el equipo consideró importante continuar con la propuesta de TL desarrollada durante el 2021 porque, por un lado, los estudiantes la valoraron de manera positiva (tanto como que muchos querían repetirla); por el otro no resultó ser una tarea extenuante para el equipo docente (distribuían y corregían a lo sumo dos TL por semana por comisión) y un tercer punto a favor: contamos con una videoteca de las presentaciones, que se comparten en el aula virtual. Sin embargo, en el 2022 las condiciones cambiaron, las clases son presenciales, no siempre se dispone de proyector para la presentación y menos aún de la posibilidad de grabar las presentaciones.

Es por ello, que en este año 2022 los estudiantes se agrupan libremente y los jefes de trabajos Prácticos distribuyen los problemas de forma similar al año anterior. Cada grupo de alumno resuelve el TL y prepara una presentación que el docente aprueba. Luego el grupo realiza un video, lo sube a la web y envía el link que se comparte en la biblioteca del campus de la asignatura. En la descripción del video, si es necesario, los docentes pueden advertir errores o falencias, dar indicios para que los jóvenes que lo vean los descubran, valorizar los aciertos y proponer otras formas de resolución.

Algunos grupos usaron la plataforma Microsoft Teams para grabar el video, otros usaron recursos web más tradicionales como video desarrollado por Apple.

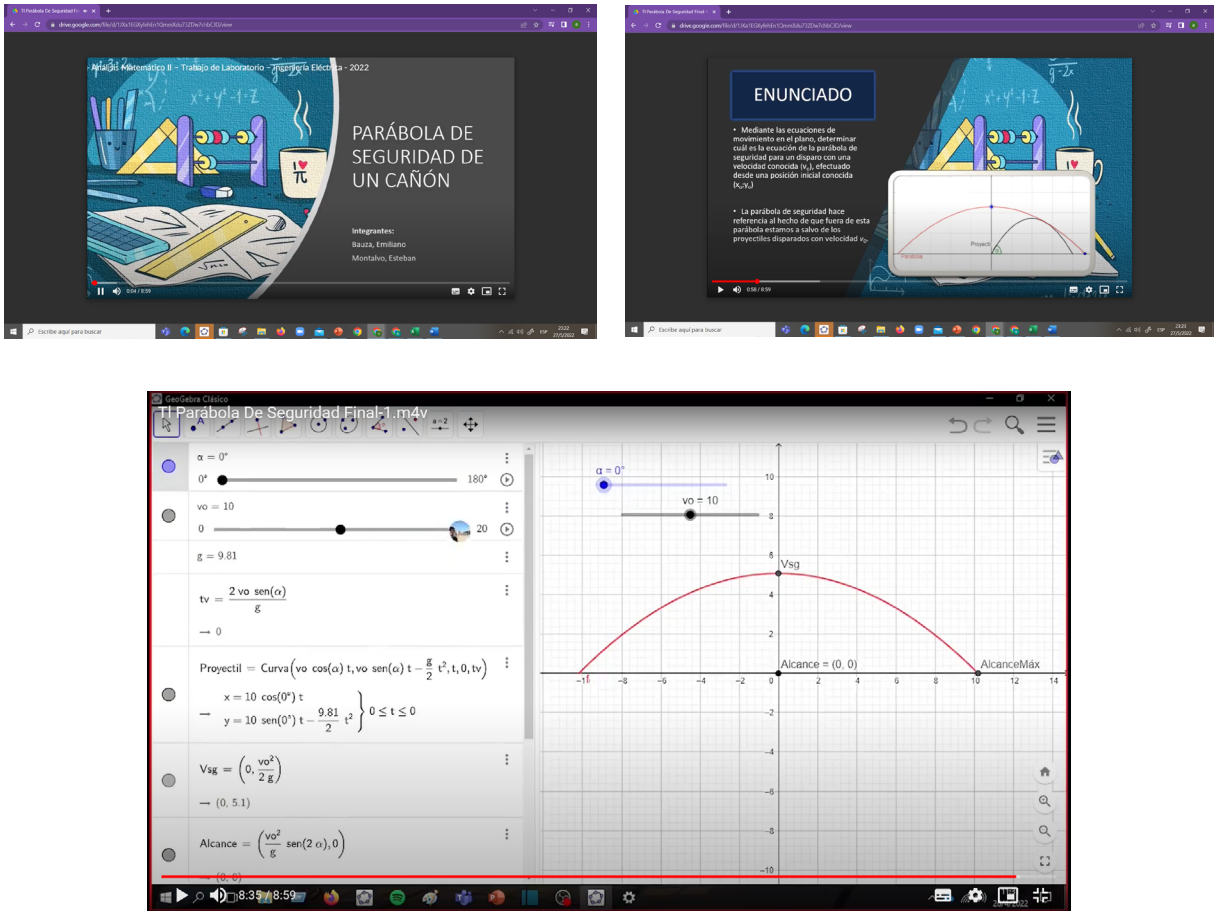


Fig. 2. Imágenes capturadas de video TL donde se integran los contenidos de AM II con los de Física I.

No es posible valorar aún la experiencia para las carreras de cursado anual, pero para la de cursado cuatrimestral (Análisis Matemático II de Ingeniería Eléctrica), un curso de 35 alumnos, contamos ya con varios trabajos, la mayoría de calidad. En este grupo se les dejó la posibilidad a los jóvenes de elegir el problema, y en la generalidad no optaron por ejercicios sencillos sino por los conceptuales o los que se relacionan con los de otras asignaturas.

Es de destacar que todas las encuestas hasta ahora respondidas confirman lo que los docentes imaginábamos: que fue una tarea desafiante y gratificante para los jóvenes y que valorizan el trabajo tanto para desarrollar capacidades de investigación como para la comunicación eficaz. En la Figura 3 y 4 se muestran capturas de ellas (todas son similares).

1. ¿Fue útil el TL para investigar y aprender el tema que te tocó?

□ Si □ Moderadamente □No □ No sabe □ no contesta
Otro ……
……

2. ¿Te sirvió realizar el TL para mejorar tus habilidades para trabajar en grupo?7

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

3. ¿Te sirvió realizar el TL para mejorar tus habilidades para hacer presentaciones de forma oral?

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

4. ¿Te sirvió realizar el TL para mejorar tus habilidades para investigar y/o aprender en forma autónoma?

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

5. ¿Te sirvió realizar el TL para mejorar tus habilidades utilizando software de cálculo matemático?

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

6. ¿Crees que realizarlo aportará a mejorar futuras presentaciones, como proyecto finales de asignatura o de la carrera?

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

Fig. 3. Captura de pantalla de parte de una encuesta sobre el TL modalidad 2022.

7. ¿Crees que es relevante relacionar en los TL los contenidos de AM II con los de otras asignaturas (física, química, economía, etc)?

□ Si □ Moderadamente □No □No sabe □no contesta
Otro ……
……

8. ¿Qué recomendación das para mejorar el TL? (sobre cualquier aspecto)

No tengo ninguna recomendación para hacer sobre cómo nos presentaron y cómo desarrollamos los Trabajos de Laboratorio.
Quizá podría ser interesante que propongan como T.L. alguna propuesta o necesidad de algún docente o laboratorio. En otras palabras, algo como "Tal docente tiene que desarrollar tal tema de química/física/etc. ¿A alguien le interesaría estudiarlo?"

9. ¿Para qué te sirvió resolver el TL? ¿Qué aprendiste? ¿Te sirvió para mejorar alguna habilidad?

Me sirvió para trabajar la exposición de resultados. En nuestro caso, no solo era llegar a tal o cual ecuación partiendo de ciertas hipótesis, sino que también debíamos pensar en cómo mostrar el desarrollo de tal forma que se entienda.
Gran parte del trabajo fue pensar cómo diagramar el video para que lo que teníamos desarrollado sea suficiente para una comprensión de cómo nosotros habíamos pensado la resolución del objetivo del TL.

10. ¿Qué opinión te merece el TL y la modalidad adoptada? Ejemplo: demasiado dificultoso, poco productivo, etc. ……
Creo que la modalidad adoptada y las exigencias de entrega de la profe fueron excelentes. Nos dio rienda suelta tanto en los plazos de entrega como en el tema para exponer, lo cual no sumó estrés al estrés que el alumno ya tiene por ser alumno y estudiar ingeniería.

Fig. 4. Captura de pantalla de parte de una encuesta sobre el TL modalidad 2022

Podemos resaltar que el 100% de los estudiantes que respondieron la encuesta (que son sólo 8 al momento de presentar este informe) confirman que realizar el TL:

- "Fue útil para investigar y aprender el tema que te tocó";
- "para mejorar tus habilidades para trabajar en grupo",
- "para mejorar tus habilidades para investigar y/o aprender en forma autónoma",
- "aportará a mejorar futuras presentaciones, como proyecto finales de asignatura o de la carrera",
- "es relevante para los contenidos de AM II con los de otras asignaturas (física, química, economía, etc)". Cabe mencionar que en esta última afirmación el 12,5% consideró que la importancia es moderada.

Nos parecen notables las recomendaciones y/o apreciaciones de los estudiantes, por ejemplo, la que propone que se resuelvan consignas atendiendo a problemas de otras asignaturas.

- "No tengo ninguna recomendación para hacer sobre cómo nos presentaron y cómo desarrollamos los Trabajos de Laboratorio. Quizá podría ser interesante que propongan como T.L. alguna propuesta o necesidad de algún docente o laboratorio. En otras palabras, algo como "Tal docente tiene que desarrollar tal tema de química/ física/etc. ¿A alguien le interesaría estudiarlo?"

También es relevante, que un estudiante explicita que realizar el trabajo de Laboratorio permitió refinar sus desempeños de comprensión. Los desempeños de comprensión son actividades que desarrollan y demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben, de nuevas maneras. Bajo la mirada de la Enseñanza para la Comprensión ([10] Blythe, Stone Wiske [11]), la comprensión nunca es completa ni acabada, se refina mejorando los desempeños de comprensión. La comprensión tiene 4 dimensiones: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación:

- La dimensión Contenidos evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas, el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica.
- La dimensión Métodos evalúa la capacidad de mantener un sano escepticismo acerca de lo que conocen o lo que se les dice, así como el uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos.
- La dimensión Propósito: evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo.
- La dimensión Formas de comunicación: evalúa el uso de sistemas de símbolos para expresar lo que se sabe (escribir ensayos, realizar una presentación o explicar un algoritmo).

En el comentario de un estudiante "Me sirvió para trabajar la exposición de resultados. En nuestro caso, no sólo era llegar a tal o cual ecuación partiendo de ciertas hipótesis, sino que también debíamos pensar en cómo mostrar el desarrollo de tal forma que se entienda. Gran parte del trabajo fue pensar cómo diagramar el video para que lo que teníamos desarrollado sea suficiente para una comprensión de cómo nosotros habíamos pensado la resolución del objetivo del TL", sin proponérselo aclara que hacer el TL mejoró los niveles de sus desempeños de comprensión.

También es muy interesante como un estudiante valoriza desarrollar competencias sociales y actitudinales necesarias para su futuro profesional "Siento que fue productivo el hecho de realizar un TL sobre un ejercicio que no aparece en la guía de práctica ordinaria (parábola de seguridad). También el hecho de haber realizado el trabajo con otra persona te ayuda a comprender que todos tienen una forma distinta de realizar los trabajos, lo cual puede servirnos a futuro para cuando trabajemos de forma profesional con nuestros futuros compañeros".

4 Conclusiones y trabajos futuros

Si bien año a año se imponían cambios para mejorar los objetivos de los TL, ningunos de ellos han sido tan radicales como los producidos por la emergencia sanitaria. La evaluación de esos cambios está aún en proceso, pero los resultados hasta ahora obtenidos son alentadores. El equipo de tareas no duda que la pandemia significó un quiebre en la visión de la educación universitaria. Los docentes adquirimos y desarrollamos competencias a la par de nuestros estudiantes.

En nuestro grupo de tareas hemos potenciado tanto competencias genéricas como las tecnológicas, sociales y actitudinales. Avanzamos en desempeñarnos de manera efectiva en equipos de trabajo, comunicarnos con efectividad, actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, en aprender en forma continua y autónoma. Estamos mucho más preparados para el futuro: considerar un entorno de aprendizaje que incluya una combinación de estudiantes que están presentes en el aula física y otros que se incorporan de forma virtual. No será en lo inmediato, porque este modelo de aula híbrida debe contar con la tecnología adecuada aún no incorporada masivamente en nuestra institución. Pero el cambio se inició, casi sin la opinión ni el consentimiento de los actores (alumnos, docentes, investigadores, gestores). Y más allá que ha sido impuesto, lo consideramos exitoso, las investigaciones que fueron necesarias para llevar adelante cada intervención educativa dejan mucha informa-

ción, la que a futuro permitirá seleccionar, para cada situación particular, entre educación presencial o a distancia, virtual, remota, en línea y/o propuestas híbridas.

Por último, acordamos con Stone Wiske [11], en que "Las tecnologías digitales y las herramientas informáticas permiten que los alumnos expresen su comprensión en una rica variedad de formas. Estas tecnologías también permiten registrar el trabajo de los alumnos en formatos que pueden corregirse, combinarse y distribuirse más fácilmente", por lo que estamos seguros en que seguiremos apostando a los Trabajos de Laboratorios Grupales, incorporando año a año cambios que mejoren tanto la comprensión como las competencias que alcancen nuestros estudiantes.

Referencias

1. Valero-Cedeño, N.; Castillo-Matute, A.; Rodríguez-Pincay, R.; Padilla-Hidalgo, M.; & Cabrera-Hernández, M.: Retos de la educación virtual en el proceso enseñanza aprendizaje durante la pandemia de Covid-19. *Dominio de las Ciencias*. https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/1530 (2020). Accedido 03 sep. 2022.
2. McClelland, D.: Testing for competence rather that inteligence. *American Psychologist*, Vol. 28, No.1, pp.1-14. (1973).
3. Estrada M, John H. La formación por competencias y el mundo del trabajo: de la calificación a la empleabilidad. *Revista de salud pública*. https://www.scielosp.org/pdf/rsap/v14s1/v14s1a09.pdf (2012). Accedido 03 sep. 2022.
4. Mastache, A.: *Formar personas competentes. Desarrollo de competencias tecnológicas y psicosociales*. Ediciones Novedades educativas. Buenos Aires. (2007).
5. Resolución 68/1994 de Consejo Superior: *Parte homogénea del diseño curricular de las carreras de la Universidad Tecnológica Nacional* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/ salida_nuevo_sitio_rectorado. php3?tipo= RES& numero=68 &anio=1994&facultad=CSU. Accedido 28 mayo de 2022.
6. Pastorelli, S.; Pampiglioni, H,; Casco, E: Trabajos De Laboratorios Grupales Mediando El Desarrollo De Competencias Profesionales, El Uso Eficiente Del Tiempo Y El Aprendizaje Del Cálculo. *Resumen en anales del VIII CAREM: Conferencia Argentina de Educación Matemática*. pp. 32. **(**2009).
7. Scorzo, R; Ocampo, G; Villamil,C.: Educación Remota de Emergencia en el Curso de Ingreso de la UNLaM. *Libro de Actas JEIN 2021-VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería*. https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/issue/current (2022). Accedido 20 de mayo de 2022.
8. Göller,R.: Educación Virtual O Virtualidad De La Educación. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana, vol. 14, No. 19, pp. 137-150*. (2012). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=86926976007 . Accedido 20 mayo de 2022.
9. Stewart, J.: *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Thomson Learning Publishers. 6ª Edición. (2008).
10. Stewart, J.: *Cálculo Multivariable*. International Thomson Editores. 6ª Edición. (2008).
11. Blythe, T y colaboradores. et al: *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente.* Paidós. (1999).
12. Stone Wiske, M. (comp.): *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós. (1999).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Evaluación de los Resultados del Aprendizaje Mediado por Tecnología

Sandra C. Ramirez[1], Olga E. Scagnetti[1], Eva S. Casco[1]
[1] Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe , Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610. Santa Fe. Argentina.
{scramirez, oscagnetti, ecasco}@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo tiene como objetivo evaluar estrategias mediadas con tecnología, para promover un mejor desempeño académico en estudiantes del curso de Análisis Matemático I de la Facultad Regional Santa Fe. Se apuesta en este caso al aprendizaje colaborativo mediante el trabajo en grupos con resolución de problemas y su defensa con coloquios distribuidos a lo largo de la cursada. Se evalúa taxonómicamente los resultados mediante Structured of the Observed Learning Outcomes (SOLO). La experiencia fue muy satisfactoria esto se evidenció en cada una de las instancias de evaluación desarrolladas y en los resultados finales obtenidos por los alumnos. En base a la teoría Students Approaches to Learning (SAL) y la taxonomía SOLO el 71% de los alumnos obtuvo un aprendizaje profundo y el 29% aprendizaje estratégico.

Palabras Clave: Resultados de aprendizaje, Evaluación taxonómica, Estrategias de enseñanza con tecnología.

1 Introducción

Argumentar y modelar son habilidades que deben ser promovidas desde los primeros años de ingeniería en todas las materias básicas y en particular en matemática. El desarrollo del pensamiento matemático comprende, entre otros, el desarrollo de habilidades cognitivas que promueven el pensamiento, en particular, la argumentación y la modelación, entendiendo que argumentar es formular opiniones fundamentadas, verbalizando sus intuiciones y concluyendo correctamente, así como detectar afirmaciones erróneas o generalizaciones abusivas; y modelar se refiere a construir una versión simplificada y abstracta de un sistema más complejo, que involucra una variedad de representaciones de datos seleccionando y aplicando métodos apropiados y herramientas para resolver problemas. [1]

Los nuevos diseños curriculares nos interpelan a adecuar la forma de evaluar, las recomendaciones del Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI) se basan en obtener resultados de aprendizaje por competencias, tanto genéricas como específicas, este tipo de perspectiva promueve capacidades autónomas en el estudiante que no solo debe saber, sino también saber hacer, para incorporar esto son necesarias metodologías y técnicas activas.

Para enfrentarse a los retos que se plantean se requieren nuevas formas de funcionamiento por parte de profesores y estudiantes. En relación con los alumnos, no basta con ser experto en una determinada materia, ya que se deben desarrollar múltiples competencias fundamentales entre las que destacan la capacidad de resolver problemas, la capacidad de trabajo en equipo, las habilidades comunicativas, las habilidades de aprendizaje autónomo, el pensamiento crítico y la toma de decisiones [2].

Así mismo en la actualidad uno de los principios básicos del CONFEDI consiste en centrarse más en la perspectiva del aprendizaje del alumno que en la del profesor que enseña. Teniendo una tendencia más contextual autores como Entwistle o Biggs proponen un nuevo concepto, los “enfoques de aprendizaje de los estudiantes” (Student Approaches to Learning, SAL). Con metodologías inicialmente cualitativas y después cuantitativas basadas en cuestionarios, la teoría SAL explora el aprendizaje y su contexto a partir de la propia experiencia de aprendizaje del

estudiante, universitarios en nuestro caso, es decir, de la autopercepción que tiene de sus habilidades y estrategias de aprendizaje y estudio en su propio contexto.[3]

El objetivo de este trabajo es evaluar estrategias mediadas con tecnologías, para promover un mejor desempeño académico en estudiantes del curso de Análisis Matemático I de la Facultad Regional Santa Fe.

Se pretende desarrollar competencias cognitivas y habilidades matemáticas en nuestros alumnos y lograr una evaluación de los resultados del aprendizaje. Se brinda una estrategia de enseñanza y un método de evaluación. Cambiar la clase expositiva y el modo de evaluación tradicional que produce resultados poco satisfactorios evidenciados en los altos índices de aplazos, repitencia, dilación en el tiempo de aprobación, uso deficiente de los recursos que la materia proporciona, entre otros desajustes.

2 Metodología

2.1 Participantes y contexto

La experiencia se realiza en una comisión de cursado cuatrimestral de la asignatura Análisis Matemático I (AMI) del año 2021 de la FRSF. Los alumnos de este curso, un grupo de 40 estudiantes recursantes de todas las especialidades y con al menos un aplazo en la materia, con nota mayor que 3, teniendo así un conocimiento previo de la materia.

2.2 Estrategia de enseñanza y evaluación

Desde el inicio de la pandemia por COVID-19, la educación como la conocíamos ha tomado una perspectiva diferente forzando a instituciones de todo el mundo y de todos los niveles a desarrollar nuevas metodologías que incluyan la educación en línea, utilizando todas las herramientas tecnológicas con el fin de mantener vigente la enseñanza en sus estudiantes [4].

Es por ello que en el 2021 atravesando aún la pandemia en nuestra cátedra se consideraron diferentes estrategias de enseñanza y evaluación acordes a la situación, mediadas por tecnologías.

En esta experiencia la estrategia de enseñanza se basó en clases sincrónicas y asincrónicas, las clases asincrónicas consistieron en videos disponibles en el campus de la materia junto con material de lectura. En los videos se desarrollaron los temas teóricos de cada tópico de la asignatura, ejemplos de ejercicios prácticos y problemas resueltos. En las clases sincrónicas se realizaron consultas donde se despejaron dudas de los alumnos y se desarrollan ejercicios de las guías prácticas y ejercicios integradores juntamente con los estudiantes. Dada la modalidad en línea con que se desarrollan las actividades universitarias este año, las clases sincrónicas fueron a través de la plataforma en Microsoft Teams.

En los años anteriores la evaluación en la cátedra de AMI fue mediante exámenes teóricos-prácticos. En la presencialidad eran exámenes escritos mientras que en la virtualidad los alumnos debían aprobar tres instancias de evaluación. En la primera se evaluaba la teoría con ejercicios tipo verdaderos/falso o múltiple opción. En la segunda parte práctica se planteaba la resolución de ejercicios y la tercera instancia fue oral donde se les hacía preguntas sobre errores cometidos o para profundizar en algún tema. Ambas modalidades acordes a un estilo más tradicional de enseñanza y evaluación.

En esta experiencia la evaluación de los desempeños de los alumnos en cada uno de los tópicos de la asignatura se aborda desde la evaluación formativa. Se realizan coloquios cada quince días que abordan los tópicos desarrollados en ese período. Esta instancia de evaluación, oral y en grupos, consiste en 7 coloquios distribuidos a lo largo de todo el cuatrimestre. En la tabla 1 se detallan los temas evaluados en cada coloquio de acuerdo con la planificación de la asignatura.

Tabla 1. Temas evaluados por coloquio.

Coloquio	Tema
1	Funciones
2	Límite y continuidad
3	La derivada y sus aplicaciones
4	La integral y sus métodos
5	Aplicaciones de la integral
6	Sucesiones y Series
7	Series de Taylor

En cada coloquio se entregó tres ejercicios por grupo contando con cinco días para resolverlos para luego exponer su resolución. Uno de los ejercicios era un problema de aplicación. Para la exposición oral se promueve el uso de herramientas tecnológicas como powerpoint, y el software matemático Geogebra. Con el objeto de fomentar la adaptación a distintos grupos de trabajo, se eligieron cada dos coloquios los grupos al azar. La virtualidad posibilitó grabar los coloquios lo que permitió revisar las exposiciones.

El rol de los docentes fue actuar como guía. Sus interacciones con el estudiante se centraron en facilitar el papel activo del alumno, y de ayudarlo a descubrir por sí mismo cómo se realiza la tarea para obtener una producción final que lo conduzca paulatinamente a los resultados de aprendizajes esperados.

2.3 Procedimiento de análisis de las respuestas a los ejercicios

La taxonomía SOLO de Biggs y Collis [5] describe el incremento de la complejidad en el desempeño de tareas de aprendizaje, lo que brinda un enfoque para categorizar el rendimiento cognitivo teniendo en cuenta la estructura del resultado de aprendizaje observado, de modo que una respuesta viene a ser un resultado de aprendizaje que puede observarse, la cual es provocada por una pregunta. En ese sentido, la taxonomía SOLO postula cinco niveles ascendentes:

- *Preestructural (PE)*: el nivel más bajo, la respuesta que no ha captado la pregunta;
- *Uniestructural (UE):* la respuesta dada al ítem capta solo una parte de la tarea;
- *Multiestructural (ME):* la respuesta es solo una descripción cualitativa de la situación;
- *Relacional (R):* la respuesta da cuenta que integra la descripción cualitativa con un aspecto cuantitativo;
- *Abstracto ampliado (A+):* la respuesta integra lo cualitativo.

En la tabla 2 se describen de manera más desarrollada los niveles jerarquizados PE, UE, ME, R y A+.

Tabla 2. Niveles jerarquizados de la taxonomía SOLO. Nota: Elaboración Vidal-Estrella [6].

Nivel	Descripción
(PE) Preestructural,	Es el nivel más bajo, la respuesta da cuenta que el individuo no ha captado la pregunta. En otras palabras, se utiliza un dato o proceso incorrecto de forma simplista que puede llevar a una conclusión irrelevante. El individuo puede incluso no comprometerse con el problema, por lo que no hay ningún tipo de cierre en la respuesta.
(UE) Uniestructural	Es el nivel en que la respuesta dada a la pregunta atiende a solo una parte de la tarea. Un único proceso o concepto se aplica al menos a un dato. Se extrae una conclusión, pero a menos que el proceso único junto con los datos seleccionados sean suficientes para la correcta solución del problema, la conclusión no será válida del todo.
(ME) Multiestructural	Es el nivel en que la respuesta tiene una descripción cualitativa de la situación. Se utiliza una serie de procesos o conceptos sobre uno o más datos, pero sin síntesis de la información ni conclusiones intermedias. Esta falta de síntesis puede ser aceptable en el caso de una de una pregunta sencilla, o puede indicar un rendimiento cognitivo inferior que se requiere para resolver el problema con éxito.
(R) Relacional	Es el nivel en que la respuesta integra la descripción cualitativa con un aspecto cuantitativo. Una respuesta relacional se caracteriza por la síntesis de información, procesos y resultados intermedios. Para llegar a la conclusión, se aplican conceptos a algunos de los datos, dando resultados intermedios que luego se relacionan con otros datos y/o procesos.
(A+) Abstracto ampliado	Es el nivel más alto en que las respuestas abstractas ampliadas son estructuralmente similares a las respuestas relacionales, pero en este caso los datos, conceptos y/o procesos (más habitualmente los dos últimos) se extraen de fuera del dominio de conocimiento y experiencia que se supone, hipotéticamente, en la pregunta.

Es importante observar que el grado de complejidad en la respuesta depende tanto de la capacidad cognitiva del individuo como de la dificultad de la pregunta.

En Biggs y Collins se aportan ejemplos aplicables a diversas disciplinas, mostrando la manera en que los cinco niveles de la taxonomía se localizan en los productos alcanzados por los estudiantes, después de la realización de tareas. El nivel preestructural es simple, indica que no ha habido comprensión. En los niveles uniestructural y multiestructural, se concibe comprender como un incremento cuantitativo de los resultados alcanzados. Las respuestas construidas en torno al más alto nivel incluyen los más bajos y un poco más. El poco más, en el caso del nivel relacional sobre el multiestructural, implica una reestructuración conceptual de los componentes y el reconocimiento de un sistema que los integra. El último nivel supone que el alumno se implica profundamente con el material, relaciona los contenidos con los conocimientos previos y generaliza sobre aspectos no presentados en el material original. La principal línea divisoria esta entre los niveles III y IV. En los niveles IV y V, las respuestas dan evidencia de comprensión, en el sentido de estructurar e integrar las partes del material.

Para autores como Romero [7] la teoría SAL propone tres enfoques principales de aprendizaje y estudio: los enfoques *superficiales*, *profundo* y *estratégico*. En el contexto universitario, el enfoque profundo consistiría en estudiar comprendiendo el significado del material que se quiere aprender y, por tanto, buscando relaciones entre las ideas, reflexionando sobre los conceptos obtenidos en las clases, cuestionando lo que se lee, examinando los detalles para apoyar los argumentos que se hacen, etc. El enfoque superficial supondría estudiar lo mínimo necesario para ser meramente capaz de reconocer y reproducir los materiales con objeto de superar la evaluación académica, lo cual a veces suele llevar consigo consecuencias negativas tales como sensación de "estar perdidos" en el material de estudio y con problemas para darle sentido o ver las relaciones entre las ideas. Conceptualmente los enfoques superficial y profundo tienen su base en distinciones tales como aprendizaje superficial y aprendizaje significativo de Ausubel o asociativo y constructivo [8] [9].

El enfoque estratégico podría no incluirse en todos los cuestionarios, y es más bien una dimensión de control del procedimiento, que lleva al estudiante a organizar cuidadosamente su tiempo, mantenerse motivado, no distraerse, poner mucho esfuerzo en su trabajo y estar determinado a hacerlo bien con arreglo a las demandas, aplicando enfoques profundos o superficiales según el contexto.

De lo anterior:

- *Aprendizajes superficiales*: I) Preestructural: Las respuestas son erróneas o realizan tautologías que no dan prueba de un aprendizaje relevante. II) Uniestructural: las respuestas se enfocan en el dominio relevante y toma sólo un aspecto para trabajar. Dejan de lado atributos importantes. No se llega al resultado. III) Multiestructural: En las respuestas se evidencian cada vez más aspectos relevantes o características correctas, pero no los integra. "Cuenta un conocimiento" apabulla con información, pero no los estructura como debiera.
- *Aprendizajes Profundo*: IV) Relacional: La respuesta integra cada aspecto relevante con los otros, de manera que el todo tiene una estructura coherente y significado. Este es el primer nivel en el que se puede utilizar adecuadamente el término "comprensión" en un sentido académicamente relevante. Se logra relacionar información vieja con la nueva, reorganizar el conocimiento, generar respuesta a diversas situaciones.
- *Aprendizajes estratégicos*: V) Abstracto Ampliado: la respuesta trasciende lo dado. El todo se conceptúa en un nivel superior de abstracción. Se logra aplicar conocimiento, encontrar un propósito, criticidad, solucionar problemas, autorregulación, creatividad.

Para organizar la información, valorar las respuestas de los estudiantes y ofrecer una retroalimentación luego de calificar se utilizó una rubrica. Además de calificar el resultado, permite calificar las estrategias que utilizó el estudiante.

En la tabla 3 se describen los criterios usando SOLO las respuestas permiten discriminar los niveles taxonómicos. Dada la naturaleza de la evaluación se agruparon categorías.

Tabla 3. Rubrica para evaluación por taxonomía SOLO.

Categoría SOLO	Criterio	Valoración Máxima
I, II y III	- Resolución Matemática.	3
IV	- Planteo y resolución de problemas. - Relaciona información vieja con la nueva. - Reorganiza el conocimiento. - Genera respuestas a diversas situaciones	3
V	- Uso de recursos tecnológicos para justificar resolución. - Búsqueda de resoluciones no tradicionales.	1

En cada coloquio las respuestas a los ejercicios se clasificaron por medio de la taxonomía SOLO, puesto que permite examinar las soluciones por nivel para describirlas y caracterizarlas de acuerdo con la manifestación de los conocimientos detallados en los criterios de la tabla 3.

3 Resultados y Conclusiones

Se muestra en a figura 1 el promedio de notas obtenidos en cada coloquio.

De acuerdo con los resultados observados por coloquio el tema 2, límite y continuidad, es en el que se evidenció mayor dificultad promedio 4,5. Se observa el pico más alto, promedio 5,6 en el tema aplicaciones del integral tema central en las carreras de ingeniería. Y una línea de tendencia en alta en los coloquios 3,4 y 5 que corresponden a los temas derivadas e integrales, tópicos medulares de la asignatura.

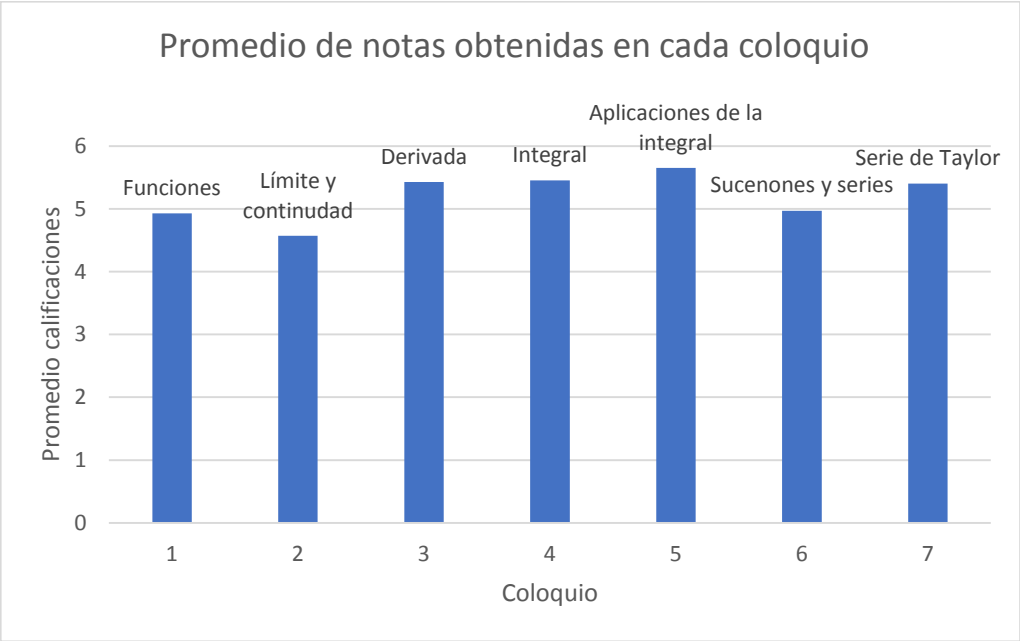


Fig. 1. Promedio de notas obtenidas en cada uno de los 7 coloquios.

Con un promedio general en todos los coloquios fue de 5,2 y la mediana 5,4 la nota máxima 7. Las respuestas se concentraron en la categoría IV racional de la taxonomía SOLO, los estudiantes mostraron un aprendizaje profundo.

En base a la teoría SAL y la taxonomía SOLO, el 71% de los alumnos obtuvo un aprendizaje profundo y el 29% aprendizaje estratégico.

Se puede concluir que con la taxonomía de SOLO los alumnos pudieron profundizar en el conocimiento y en su autopercepción sobre sus saberes con la ventaja que el profesor conoce el nivel real del alumnado. Se dio la taxonomía de evaluación a usar para que, en forma complementaria, se pudiera cuantificar y clasificar tanto el aprendizaje como las competencias puestas en juego.

Es posible que los resultados se hayan visto descentrados dado la naturaleza del grupo, recursantes y con aplazo en la asignatura, pero consideramos que esta experiencia fue favorecedora para los resultados de aprendizajes, en especial para este grupo que trae conceptos y concepciones sobre sus saberes erróneos. Mejorando la autopercepción que tienen estos estudiantes de sus habilidades y estrategias de aprendizaje y estudio.

Referencias

1. Estrella, S.; Alvarado, H.; Olfos, R.; Retamal, L.: Desarrollo de la alfabetización probabilística: textos argumentativos de estudiantes (según niveles de razonamiento de la taxonomía SOLO). *Revista Paradigma*, Vol.40, No 1, pp. 280-304. (2019).
2. Cortez, C.; Nussbaum, M.; Woywood, G.; Aravena, R.: Learning to collaborate by collaborating: a face-toface collaborative activity form easuring and learning basics abouteam work. *Journal of Computer Assisted Learning*, Vol. 25, pp. 126-142. (2009).
3. Carrascal Torres, N., Alvarino Bettín, G., Díaz Buitrago, E.: *Estrategias mediadas por TIC para el desarrollo de enfoque de aprendizaje profundo en estudiantes universitarios.* http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-48702009000100001&lng=en&tlng=es (2009). Accedido 14 de Mayo de 2022.
4. Valero-Cedeño, N.; Castillo-Matute, A.; Rodríguez-Pincay, R.; Padilla-Hidalgo, M.; Cabrera-Hernández, M.: Retos de la educación virtual en el proceso enseñanza aprendizaje durante la pandemia de Covid-19. *Dominio de las Ciencias*. https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/1530 (2020). Accedido 03 sep. 2022.
5. Biggs J; Collis K.: Hacia un modelo de desarrollo y evaluación del plan de estudios basado en la escuela utilizando la taxonomía SOLO. *Revista australiana de educación*, Vol. 33, No 2, pp151-163. (1989).

6. Vidal-Szabó, P.; Estrella, S.: Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista Chilena De Educación Matemática*, Vol. 13, No 4, pp134–148. (2021).
7. Romero Medina, A.; Hidalgo Montesinos, M. D.; González Javier, F; Carrillo Verdejo, E.; Pedraja Linares, M. J.; García Sevilla J.; Pérez Sánchez, M. A.: Enfoques De Aprendizaje En Estudiantes Universitarios: Comparación De Resultados Con Los Cuestionarios ASSIST Y R-SPQ-2F. *Revista De Investigación Educativa*, Vol. 31, No 2, pp. 391 (2013).
8. Pozo, J.I. *Aprendices y maestros. La nueva cultura del aprendizaje*. Alianza. (2008).
9. Romero, A.: Aprendizaje cognitivo y/o complejo. *En A. Puente (Ed.), Psicología contemporánea básica y aplicada*. pp. 320-345. Pirámide. (2011).

XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

Innovación en la Enseñanza de las Ciencias para el Abordaje de Sistemas Complejos

Eduardo A. Gago[1], Paola A. Szekieta[1], Ada E. Mascheroni[1], Lucas I. D'Alessandro[1]
[1] Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario
Zeballos 1341
eagago@gmail.com, paolasz@gmail.com, aemascheroni@hotmail.com, dalessandro.l87@gmail.com

Resumen. En este trabajo se relatan las acciones realizadas en el Proyecto de investigación "Ingeniería Matemática y Computacional: Innovación en la Enseñanza de las Ciencias para el Abordaje de Sistemas Complejos". El proyecto propone como actividad fundamental investigar y desarrollar convenientes estrategias didácticas para conectar e integrar la matemática computacional con las tecnologías básicas y aplicadas en las carreras de Ingeniería. En este sentido, se pretende fomentar las actividades de carácter multidisciplinar de la currícula, con el objetivo de incidir en la formación de profesionales capaces de proponer y resolver modelos complejos mediante el uso de tecnología apropiada. El desarrollo de las herramientas digitales han cambiado los modos y las estrategias de enseñanza y estos sucesos han impactado fuertemente en la formación disciplinar de los futuros ingenieros. En definitiva, el proyecto pretende indagar cómo las innovaciones curriculares en la enseñanza de Matemática introducen los problemas de ingeniería desde el Ciclo Básico.

Palabras Clave: Ciencia, Tecnología, Complejidad, Interdisciplinariedad, Enseñanza de la Ingeniería.

1 Introducción

La utilización de la tecnología informática en la enseñanza de Matemática ha cambiado paulatinamente los modos y las estrategias de enseñanza. El concepto de modelo matemático se ha diversificado y comprende la representación de procesos mediante entornos virtuales como así también el desarrollo de algoritmos de simulación. Estos cambios en la Educación universitaria no sólo se deben al desarrollo digital sino también son el resultado de las demandas sociales.

Estas tecnologías están basadas en algoritmos complejos que logran producir, a través de un uso apropiado, trabajos impensados hace algunos años, tienen una fuerte base matemática que permiten conceptualizar los métodos de trabajo capaces de resolver los problemas de Ingeniería.

Para lograr el análisis y utilización de sistemas complejos de diseño y generar modelos experimentales no lineales, los aportes de la matemática computacional son fundamentales, tanto en la etapa de formación del ingeniero como en su vida profesional.

La organización del proceso de investigación está regulada por fases de coordinación e integración para lograr una cultura científica interdisciplinaria. Se analizan los diferentes marcos teóricos y metodológicos de los enfoques de la complejidad para pensar, conceptualizar y abordar los problemas en sus múltiples dimensiones, orientados al estudio y aplicación de sistemas físicos, que hacen uso de la modelización matemática y de la simulación por computadora.

Se considera el carácter inter y multidisciplinario de matemática para diseñar las estrategias de cambio necesarias en el abordaje de la disciplina, para lograr interactuar con otras disciplinas correspondientes a las tecnologías

aplicadas, con el propósito de producir nuevos resultados [1].

Las innovaciones curriculares deben incluir aspectos multidisciplinarios, organizar actividades interdisciplinares, enfatizar los puntos de vista de sistemas, e introducir problemas de ingeniería, principios, prácticas y soluciones desde muy temprano en la enseñanza.

2 Identificación del proyecto

El proyecto de investigación al que se hace referencia se denomina Ingeniería Matemática y Computacional: Innovación en la Enseñanza de las Ciencias para el Abordaje de Sistemas Complejos, y se desarrolla en la Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Rosario, siendo la Unidad Científico Técnica el Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas. El período concedido para su realización es desde 01.01.2019 hasta el 31.12.2022.

Las actividades que se desarrollan dentro del proyecto enfatizan los diferentes puntos de vista de los sistemas complejos considerando el carácter inter, trans y pluridisciplinario de la matemática para conceptualizar y abordar los problemas en sus múltiples dimensiones y lograr interactuar entre las distintas disciplinas con el propósito de producir nuevos resultados en educación.

3 Objetivos

En la necesidad de implementar un proceso de enseñanza aprendizaje sistémico vinculando la matemática con la informática, e intensificando una formación basada en un enfoque por competencias, se pretende que el alumno alcance a lo largo de su proceso de asimilación de los contenidos una formación multidisciplinar. En este sentido, este proyecto persigue como objetivos:

3.1 Objetivo general

El objetivo general está basado en implementar estrategias didácticas, generando nuevas formas de trabajo en el aula con apoyo de las teorías de la didáctica de la matemática, para vincular la matemática computacional desde las ciencias básicas de la ingeniería con las tecnologías básicas y aplicadas, propiciando las competencias que debe alcanzar el alumno.

3.2 Objetivos específicos

Los objetivos específicos que permiten llevar adelante las actividades que se quieren desarrollar, tienen como pautas lo expresado a continuación:

- Diseñar objetos de aprendizaje para el abordaje inter y multidisciplinario de problemas que involucren la aplicación de métodos avanzados de modelado y simulación y construir soluciones analíticas, aproximadas o heurísticas.
- Fundamentar las estrategias de enseñanza multidisciplinar, desde la perspectiva de las teorías del aprendizaje, para mostrar donde se aplican los conceptos en proyectos reales de ingeniería.
- Realizar planteamientos estratégicos que doten de disposición y capacidad para el trabajo interdisciplinario en equipo.
- Realizar cambios metodológicos en la enseñanza, destacando las competencias que se requieren.
- Lograr un entorno interactivo que promueva actividades tendientes a realizar cambios en las planificaciones curriculares de las distintas cátedras.

4 Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas

El Laboratorio Informático y Multidisciplinar de Ciencias Básicas es la unidad científico técnico del proyecto dentro de la FRRo equipado con 25 computadoras de escritorio con conectividad a internet y con una pequeña biblioteca disponible para docentes y alumnos.

Las actividades realizadas brindan apoyo a las cátedras del área Matemática para cumplimentar los aspectos del cálculo numérico, simbólico y gráfico de las asignaturas del área. El equipo docente está involucrado en la implementación de nuevas estrategias metodológicas para el desarrollo de los contenidos curriculares, generando el material didáctico necesario para la realización de talleres de carácter teórico-práctico tecnológico.

Desde la línea de innovación educativa en ingeniería se continúa trabajando sobre nuevos paradigmas de enseñanza con la intención de lograr, en la Educación Superior, un mayor desarrollo de capacidades intelectuales, adquisición de destrezas, la sustitución de técnicas obsoletas por medios más eficientes y rápidos, y una mejor interacción en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En función de esto, y gracias a la inclusión de los nuevos avances en informática, se investiga sobre la implementación de nuevas metodologías pedagógicas y diversas estrategias didácticas, apuntando al trabajo interdisciplinario que se considera necesario en el área de la Ingeniería y que debe abordarse desde las Matemáticas. Porque todos los ángulos, dimensiones, perspectivas de cualquier cuestión, problema, idea o concepto pueden ser contemplados desde diferentes áreas disciplinares y presentados de manera inmediata a través de los recursos tecnológicos actuales [2].

Con la utilización de esta tecnología y herramientas web disponibles en la FRRo se ha creado, a través de actividades, recursos educativos, interacción y comunicación, un espacio educacional ampliado que trasciende el aula y acerca a los ámbitos cotidianos tanto de los estudiantes como de los docentes nuevas formas de comunicación y expresión.

5 Formación de Recursos Humanos

El equipo de investigación está compuesto por profesionales de la Ingeniería de varias especialidades, Química, Eléctrica, Mecánica, y en Sistemas de Informática, todos ellos con experiencia en diferentes asignaturas interesados en transformar los programas y procesos de enseñanza de las ciencias para lograr una mayor conexión con el curriculum de ingeniería tendiente a la interdisciplinariedad. El propósito es mostrar el lugar de la matemática no desvinculada de la realidad y del entorno profesional; fomentando el debate, el sentido crítico, favoreciendo el trabajo colaborativo entre disciplinas.

La dinámica de trabajo que se propone conduce a una actividad académica en constante evolución, tanto en lo que refiere a la búsqueda de estrategias de enseñanza, como a la revisión de las prácticas docentes actuales. Se pretende lograr la transferencia de las investigaciones que se realizan, a la formación integral de los alumnos, al material correspondiente lograr los objetivos expuestos.

El grupo tiene experiencia en la utilización de información relacionada con el cálculo simbólico, numérico y gráfico, insoslayable en la educación en Ingeniería, dado los avances en informática y la comunicación, que han delineado un nuevo paradigma en la enseñanza de las ciencias.

Esto favorece el desarrollo de las capacidades intelectuales que deben incorporar los alumnos, la sustitución de técnicas obsoletas por medios eficientes y rápidos, la interpretación de los conceptos mediante simulaciones y animaciones, y una mejor interacción en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta forma de trabajo permite integrar conocimientos de distintas disciplinas, conducentes al inicio de actividades de investigación en líneas de reciente desarrollo.

6 Actividades desarrolladas en el marco del Proyecto

El enfoque que se le dan a las actividades que se diseñan contemplan incorporar en el proceso de enseñanza aprendizaje diversas estrategias como por ejemplo, la organización de actividades inter cátedra con las del ciclo

de las tecnologías aplicadas y utilizar los laboratorios virtuales para presentar problemas interdisciplinarios donde intervengan los docentes de las disciplinas involucradas.

Se organizan actividades teórico-práctica tecnológicas para promover investigaciones que conduzcan a métodos y aplicaciones originales que conjuguen la matemática computacional y las tecnologías, basada en simulaciones interactivas promoviendo un proceso de comunicación entre docentes y estudiantes que trascienda el aula, generando un sistema de aprendizaje que ponga en valor actividades de investigación que permitan al estudiante inferir lo próximo y autogestionar su propio conocimiento [3].

Para ello se requiere un trabajo previo de coordinación de contenidos y acuerdos sobre el marco teórico y metodológico que se sustentarán en los nuevos enfoques de la complejidad.

Es fundamental desarrollar la aplicación de métodos avanzados de modelado y simulación, para resolver los problemas de ingeniería y diseñar estrategias de enseñanza de las ciencias en ingeniería, teniendo en cuenta el paradigma, teorías y métodos de la complejidad.

Dentro de las actividades programadas se organizaron distintas actividades para docentes y auxiliares de docencia y docentes de los departamentos de carrera organizados en los siguientes cursos aprobados por el CD de la UTN FRRo:

- Diseño de ambientes de aprendizaje
- Bases para la Enseñanza en Entornos Virtuales
- Administración y uso de ambientes de aprendizaje en el Campus Virtual de UTN – FRRo.
- Desarrollo de talleres teórico-práctico tecnológico.
- Planificación y desarrollo de actividades interdisciplinarias para resolución de problemas de complejidad creciente.
- Dirección de Tesis de Maestría: Se están comenzando a dirigir dos tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática por parte del Director del Proyecto.

Dentro de los talleres teórico-práctico tecnológico se realizaron diversas intervenciones en las cátedras de Calculo Avanzado, Algebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático, actividades programadas para introducir nuevas temáticas y lograr las competencias matemáticas en modelado y simulación de un amplio rango de problemas multidisciplinares.

Dichos talleres proveen de capacitación a los estudiantes de las cátedras antes mencionadas respecto al uso y manipulación de los programas MATHEMATICA y GOEGEBRA, para luego realizar trabajos prácticos con aplicaciones de sistemas sencillos de problemas de tinte ingenieril.

7 Publicaciones relacionadas con el PID

El proyecto comenzó en el año 2019 y cuenta con las siguientes publicaciones: 11 publicaciones en revistas internacionales con referato, 14 publicaciones derivadas de la presentación de trabajos en congresos nacionales, y un libro digital.

Las publicaciones internacionales se realizan en importantes editoriales como la IATED.org y la WSEAS.org. Una de estas publicaciones se desgrana de la participación de uno de los integrantes del Proyecto en el evento EDULEARN 2019 acaecido en la cuidad de Palma de Mallorca.

Las publicaciones nacionales resultan de la presentación y exposición de trabajo en congresos (CAIM, JEIN, CADI, CLADI, CAEDI).

8 Ejemplos de trabajos asignados y actividades desarrolladas

A partir de los objetivos planteados en el proyecto, surge la pregunta: ¿Cuál sería una clase ideal, ajustada a estos cambios? Aquella que se desarrolle en un ambiente de construcción de conocimiento, donde el laboratorio virtual juegue un rol fundamental en este nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje [4].

La educación basada en sistemas computacionales permite desarrollar capacidades en los estudiantes promo-

viendo un pensamiento crítico, facilitando la interpretación y limitaciones de la teoría, es decir esta forma de estudio experimental prepara a los alumnos para desafíos profesionales donde las herramientas informáticas juegan un papel primordial.

El aprendizaje basado en actividades de carácter ingenieril o en situaciones que involucren la reflexión de los alumnos, es una metodología que les permite adquirir los conocimientos y capacidades básicas claves (competencias) mediante la elaboración de proyectos que dan respuesta a problemas de la especialidad.

Se presentan a continuación dos ejemplos de actividades académicas de grado que se realizaron en el marco del proyecto.

8.1 Introducción a los Autómatas Celulares en la enseñanza del Álgebra Lineal

Una de las actividades que se presentan a modo de ejemplo es el diseño de problemas de índole tecnológica mediante el análisis de objetos y sistemas. Con esta intención se realiza un diseño metodológico para poder llevar adelante aplicaciones del Algebra lineal que incentiven la capacidades básicas en los alumnos.
Con este cometido, se propicia una clase experimental de carácter colaborativo abrevando sobre un modelo de Autómata Celular: el Juego de la Vida.

El objetivo es que los alumnos desarrollen una aplicación del tema Matrices relacionándolo con el estudio de los autómatas celulares con la utilización de software específico. La propuesta para poder mostrar el Juego de la vida utilizando software MATHEMATICA y para eso hace necesita un tablero, una vecindad, la forma de obtener la vecindad de cada celda y las reglas de transición [6].

Se pretende que el alumno asimile los conceptos de los autómatas celulares como así también que desarrolle su capacidad de análisis aprovechando el carácter racional y deductivo propio del ***Álgebra Lineal***.

Se presenta a los alumnos el Juego de la vida, creado en 1970 por el matemático británico Conway, es el autómata celular más famoso. Fue el primer programa que se ejecutó sobre la Connection Machine, la primera computadora en paralelo del mundo.

Este autómata es un juego de cero jugadores, lo que implica que su evolución está determinada por el estado inicial y no necesita ninguna entrada de datos posterior. El juego se desarrolla sobre una grilla bidimensional como tablero. Cada posición del tablero se denomina célula, que poseen ocho células vecinas, que son las que están próximas a ella, incluidas las diagonales.

Las células tienen dos estados: están vivas o muertas los que se representa con los números 1 y 0 respectivamente. La cantidad y disposición de células vivas sobre el tablero evoluciona a lo largo de unidades de tiempo discretas. El estado de todas las células se tiene en cuenta para calcular el estado de las mismas al instante de tiempo siguiente.

Todas las células se actualizan simultáneamente. Las transiciones dependen del número de células vecinas vivas: Una célula muerta con exactamente 3 células vecinas vivas nace (al turno siguiente estará viva). Una célula viva con 2 o 3 células vecinas vivas sigue viva, en otro caso muere o permanece muerta (por soledad o superpoblación) [6].

El juego planteado continúa hasta que se obtengan dos estados sucesivos idénticos o bien hasta que se alcancen un cierto número de transiciones realizadas. El tablero se representa por matriz una cuadrada de 4 x 4, y cada uno de los elementos de la matriz es el estado de una célula en un tiempo determinado *t.* A partir de la matriz *A*,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se les solicita a los alumnos que comiencen a modelar el juego, considerando una disposición inicial de células sobre *A* en el tiempo $t = 0$.

Con este propósito se les indica en primer término que encuentren los vecinos de *A* de acuerdo al concepto de vecindad de Moore con límites periódicos, y que luego determinen la cantidad de vecinos vivos de los elementos de *A*, y que además obtengan la cantidad de vecinos en el primer estado que rodean a cada célula.

Los alumnos aplicando las condiciones del juego analizan el estado de *A* en el tiempo *t* y la cantidad de vecinos vivos que tienen cada célula, y de acuerdo a esa información obtienen el estado siguiente en el tiempo $t + 1$.

En las siguientes matrices se muestra la respuesta y la explicación que dan los estudiantes de la evolución de *A* cuando pasa de $t = 0$ a $t = 1$, resultando la matriz *B*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consecuentemente aplican las condiciones establecidas por el juego a la matriz B y obtienen la evolución para los tiempos $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$, resultando las matrices C,D y E.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se muestra en la Fig. 1 un extracto de la respuesta del trabajo realizado por los estudiantes con el software.

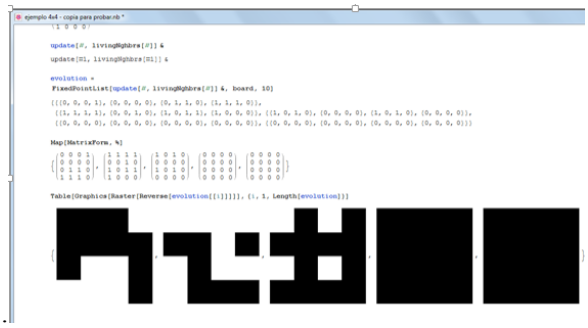


Fig. 1. Evolución de la matriz aplicando el Juego de la Vida (Fuente: Elaboración propia).

A continuación se visualizan algunos ejemplos que ellos desarrollaron sobre diferentes disposiciones iniciales a partir de dichos modelos conocidos.

En la Fig. 2 se observa un autómata celular que posee una vida corta, ya que en paso número ocho se observa que el tablero comienza a estar en blanco.

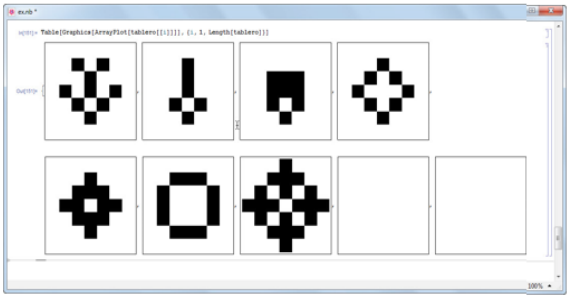


Fig. 2. Autómata celular de corta vida.

En la Fig. 3 se muestra la evolución de autómata celular armónico y perpetuo ya que su gráfica oscila entre una barra horizontal y otra vertical en forma indefinida.

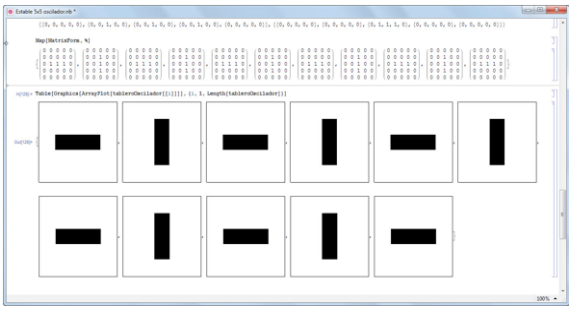


Fig. 3. Autómata celular: oscilador armónico.

En la Fig. 4 se muestra otro ejemplo de un autómata que tiene una evolución que no tiene un comportamiento definido. El comportamiento aleatorio produce movimientos en las células originales

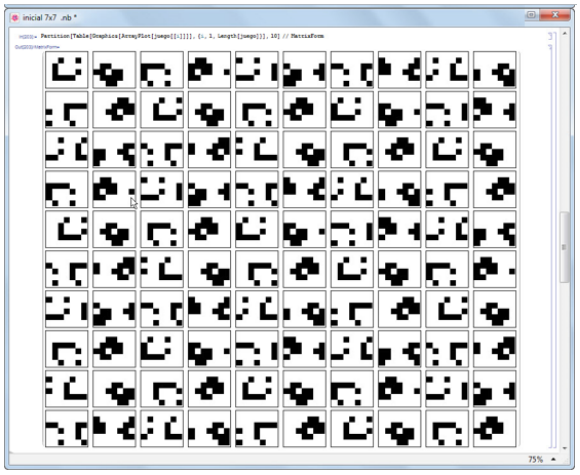


Fig. 4. Autómata celular de comportamiento aleatorio.

8.2 Determinación de la función de transferencia de un sistema de calentamiento de agua en la enseñanza de Cálculo Avanzado

En esta experiencia los alumnos estudian los datos suministrados por un dispositivo que está formado por un vaso de precipitado que contiene agua a 23ºC en la que se introduce un termómetro recubierto por una vaina con 2 ml. de glicerina pura a temperatura ambiente y se ajusta por medio de un tapón de goma perforado.
En el recipiente se calienta el fluido hasta la temperatura de ebullición, instante en el que se coloca el conjunto termómetro-tubo de ensayo dentro del baño de agua, produciéndose un cambio brusco en la lectura en la escala del termómetro.

En esta experiencia los estudiantes tratan de conocer en primer término cómo evoluciona la temperatura del termómetro ante la aplicación de una perturbación, de tipo escalón, que llevó la temperatura a 100 º C, tomando como serie dato 74 valores a intervalos de tiempo constante.

Los alumnos tabulan la temperatura que experimenta el termómetro en intervalos de medición cada 5 seg. Los valores obtenidos experimentalmente se grafican y se observan en la Figura 2 utilizando el programa MATHEMATICA.

Los alumnos pretenden encontrar un modelo matemático conceptual que represente al sistema físico de la Fig. 5, y posteriormente analizaron los cambios que se producen en dicho sistema para avanzar con el análisis y luego establecer un modelo matemático aproximado que les permitió analizar el comportamiento del mismo.

Luego plantean el balance de energía, con ayuda de bibliografía específica, y logran encontrar el modelo del sistema para los datos suministrados por el laboratorio real [7].

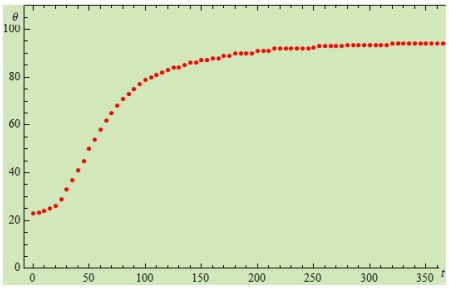


Fig. 5. Serie de datos.

Analizan el sistema considerando que el calentamiento de un termómetro en un baño de agua corresponde a un sistema de primer orden, pero si se interpone un tubo de ensayo –vaina– entre el fluido y el termómetro, el sistema cambia de comportamiento resultando un sistema de segundo orden hiperamortiguado, como se evidencia en la función de transferencia del sistema de la ecuación (1).

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_b(s)} = \frac{1}{(T_t s + 1)(T_v s + 1) + R_v C_t s} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde: $\theta_o\ (s)$ y $\theta_b\ (s)$ son las transformadas de Laplace de las funciones temperatura del termómetro y del agua, respectivamente; T_t y T_v son las constantes de tiempo del material constitutivo del termómetro y de la vaina, respectivamente, R_v coeficiente de transmisión del calor de la vaina y C_t es la capacidad térmica del termómetro.

La función de transferencia obtenida en la ecuación (1) que surge del análisis del balance de energía del sistema, indica que el modelo que describe matemáticamente la experiencia es complicado.

Una nueva hipótesis que completa el análisis del prototipo anterior es que la utilización de una vaina produce un retraso en la lectura de las mediciones de temperatura.

Los alumnos indagan y enuncian que esta particularidad ocurre en un intercambiador de calor cuando un elemento de medición de temperatura se encuentra corriente abajo y pasa cierto tiempo antes que el fluido caliente, que abandona el equipo, alcance el punto donde se mide la temperatura. Este hecho, de importancia para poder diseñar correctamente la ecuación de transferencia de calor, se tuvo en cuenta para realizar cambios en el modelo y también considerar que el sistema fue excitado mediante una función escalón.

El elemento de tiempo muerto, comúnmente llamado demora de distancia versus velocidad, es un fenómeno que se encuentra en la gran mayoría de los sistemas de proceso.

En el punto de toma de temperatura todo sucede igual que en el punto *s* (punto de salida del fluido), luego de *L* segundos, o lo que es similar en el punto de toma de temperatura, se produce lo que sucedía en *s*, *L* segundos después.

Los alumnos consideran que en el punto donde se toma la temperatura sucede lo mismo que en el punto de salida del fluido, luego de *L* segundos. Entonces un nuevo parámetro es considerado en la experiencia denominado tiempo muerto o demora del sistema, por lo tanto se multiplicó a la función de transferencia por el factor e^{-Ls}.

A los fines de simplificar el estudio de los sistemas de control, y que a partir de esta simplificación el sistema responda a la situación real, obtienen una buena aproximación en sistemas de orden 2 mediante un sistema de segundo orden con la misma constante de tiempo más el elemento de tiempo muerto.

Cuando un sistema de orden 2 es representado por 2 elementos de primer orden, y además cada uno de esos elementos introduce su propio retardo, la respuesta total del sistema deviene proporcionalmente más lenta con cada retardo o tiempo muerto agregado [7].

Entonces la ecuación de transferencia en forma simplificada, teniendo en cuenta el elemento de demora *L* y unificando la constante de tiempo, cuando el sistema se excita con una función escalón la función de transferencia resultante la describe la ecuación (2):

$$F(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(Ts + 1)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Donde: *F(s)* función de transferencia simplificada del sistema de orden 2, *K* constante y *T* constante de tiempo.

La antitransformada de *F(s)* se puede obtener aplicando el segundo Teorema de traslación de Transformada de Laplace, y esto condujo a la ecuación (3):

$$f(t-L) = 1 - \left(1 + \frac{t-L}{T}\right) e^{\frac{-(t-L)}{T}} \qquad \textbf{(3)}$$

Donde: f es la transformada inversa de Laplace; L constante de retardo o de tiempo muerto, T constante de tiempo y t variable tiempo.

Con la ecuación teórica aproximada que ajusta al comportamiento del sistema físico y con los datos de la tabla temperatura-tiempo se realizó un ajuste de los parámetros asociados a la ecuación (4) mediante el método de aproximación de mínimos cuadrados. Entonces la ecuación de la temperatura final resultó la ecuación (4):

$$\theta_o(t) = 23 + 71\left[1 - \left(1 + + \frac{t-5{,}47}{34}\right) e^{\frac{-(t-5{,}47)}{34}}\right] \qquad \textbf{(4)}$$

La gráfica que representa al modelo expresado en la ecuación (4) se observa en la Fig. 6

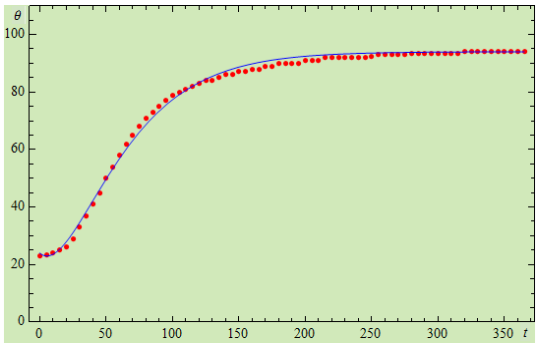


Fig. 6. Serie de datos.

Esto permite obtener el tiempo de retardo L, que es uno de los parámetros de la ecuación de transferencia, y el otro parámetro que es la constante de tiempo T. En la gráfica se observa la recta tangente al punto de inflexión que el punto de inflexión de la misma representa el valor de $L + T$, y la intersección de la recta tangente a dicho punto de inflexión indica el valor del tiempo de retardo L, por diferencia se obtiene el valor de T. Los valores obtenidos fueron: $L = 5{,}47$ seg. y $T = 34$ seg.

9 Material didáctico en formato electrónico

Las actividades se sustentan en un trabajo coordinado del equipo docente y en la generación de material didáctico concebido en formato electrónico. Los apuntes, tutoriales y otros documentos se encuentran en el campus de la Facultad. Se cuenta actualmente con las siguientes publicaciones:

- Modelos funcionales de una variable real.
- Simulaciones, gráficos y animaciones con Geogebra.
- Sucesiones y series numéricas.
- Sistemas acoplados masa-resorte.
- Análisis de movimientos oscilatorios y periódicos de sistemas físicos.
- Ecuaciones diferenciales ordinarias: Modelado con aplicaciones en Ingeniería.
- Introducción a los Fractales.
- Simulaciones computacionales del Autómata Celular denominado Juego de la vida.
- Aproximaciones de funciones mediante Series de Fourier. Análisis de señales.
- Transformada de Laplace: Aplicaciones a la Ingeniería.
- Análisis complejo: Mapeos, series, singularidades, polos y residuos.

- Modelos espectrales para el análisis de fallas en sistemas mecánicos.
- Soluciones analíticas de problemas de Ingeniería Mecánica mediante modelos de funciones complejas.
- Ajuste de curvas por mínimos cuadrados.

10 Consideraciones finales y actividades futuras

Dentro de la investigación la búsqueda, diseño y presentación de problemas que requieran la modelización matemática permite aplicar apropiadamente los distintos métodos de solución e identificar las herramientas desarrolladas en cada método para seleccionar en forma crítica el algoritmo a aplicar [5].

Las tareas de aprendizaje deben aproximarse de alguna forma a los requisitos del enfoque que plantea el modelo de la complejidad en la enseñanza, conducentes a la subversión cuando se requiera, de la simplicidad en el pensamiento del estudiante y en sus aplicaciones a la práctica; no se trata del simple debate o ejercicio práctico, se trata de estudiar el proceso de enseñanza especificando los mecanismos y esquemas mentales instaurados a fin de localizar donde se debe provocar el cambio.

Es una especificidad de las ciencias de la complejidad explorar espacios, abrir horizontes y anticipar procesos, fenómenos y dinámicas. Es en este sentido que el uso del modelamiento y la simulación se revela esencial para explorar modelos, espacio de soluciones, dimensiones y cruces entre ellas, para el estudio de comportamientos caracterizados por inestabilidad, incertidumbre, adaptación, no-linealidad.

El enfoque que se les da a las actividades que se diseñan contemplan incorporar en el proceso de enseñanza aprendizaje diversas estrategias como por ejemplo, modelar las señales generadas en sistemas físicos por funciones de unas o más variables que representan las características o comportamiento de algún proceso, modelar los sistemas como dispositivos que se encargan de transformar las respuestas de las señales produciendo otras o algún resultado deseado, como así también fundamentar y desarrollar habilidades en el manejo de metodologías y herramientas matemáticas para el tratamiento de señales y sistemas de tiempo continuo y discreto, tanto en el campo temporal como en el dominio de la frecuencia, suponiendo modelos de orden determinístico como estocásticos.

El modelamiento y la simulación suponen, exigen o implican un trabajo de formalización matemática, pero esto no es siempre así, en ocasiones la matematización puede realizarse posteriormente como una verificación o demostración de lo que se ha modelado o simulado. Se cree necesario puntualizar que la simulación y el modelamiento demandan un trabajo conceptual y/o teórico previo que conduce precisamente a la necesidad de considerar problemas algorítmicos o computacionales.

En el futuro, los integrantes del proyecto se enfocan en el entrenamiento de utilizar las plataformas de simulación multifísica con carácter experimental para luego llevar esas investigaciones al ámbito de la enseñanza de grado.

Referencias

1. Beckers J.; Crinon J.; Simons, G.: Aprendizaje por competencias: Reducir las desigualdades de aprendizaje entre los alumnos. Popular. pp. 236-258 (2014).
2. García Aretio, L.: Historia de la Educación a distancia. Revista Iberoamericana de Educación a distancia. pp. 125–180 (1999).
3. Bischof G.; Bratschitsch E.; Casey A.; Rubesa D.: Facilitating Engineering Mathematics Education by Multidisciplinary Projects. *Journal of American Society for Engineering Education*, pp. 57-189 (2007).
4. Male, S.: Generic Engineering Competencies: A Review and Modelling Approach, Journal of Education Research and Perspectives. Vol.37. No.125. pp. 25-51 (2010).
5. Posada Álvarez, R.: Formación Superior Basada en Competencias, Interdisciplinariedad y Trabajo Autónomo del Estudiante. *Revista Iberoamericana de Educación*, pp. 237-305 (2011).
6. Szekieta, P.; Gago, E.: Introducción a los Autómatas Celulares en la enseñanza de Matemática en las carreras de Ingeniería. *Actas de la VI Jornada de Enseñanza de la Ingeniería*. pp. 332-337 (2019).
7. Tinnirello, A.; Gago, E.; D'Alessandro, L.: La Emergencia de la Matemática Computacional en Ingeniería: Proyectos Integradores en Cálculo Avanzado en Ingeniería Mecánica. *Actas del IV Congreso Argentino de Ingeniería y X Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería*. Pp. 1331-1342 (2018).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Consideraciones sobre la enseñanza y el uso del Teorema Central del Límite. Alternativas al uso de reglas mecánicas

Barrea Leonardo, García, Román,
Escuela de Ingeniería Industrial, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
leonardobarrea@yahoo.com.ar, romannicolasgarcia@gmail.com

Resumen. El Teorema Central del Límite es base de muchos resultados en Estadística. Pero la forma en la que se enseña a aplicarlo genera dudas en cuanto a ciertos procedimientos. En este trabajo se analiza en profundidad la distribución de la suma de variables aleatorias para distintas cantidades de variables sumadas (n) y distintas distribuciones de las variables que se suman. Luego se busca establecer criterios sobre el valor mínimo de n en distintos casos para alcanzar una buena aproximación y contrastarlo con la regla de n>30.

Entre los resultados se destaca que con n=30 la aproximación es mala para los percentiles más usados cuando la distribución es Exponencial o Lognormal.

Claramente queda en evidencia que la regla de n>30 no tiene ningún sustento y no es recomendable mencionarla en la currícula ya que el alumno se "mecaniza" y desecha la posibilidad de comprender lo que sucede en cada situación.

Palabras clave: Teorema central del límite, Reglas de aplicación, Aproximaciones.

1 Introducción

El teorema central del límite sirve como sustento para muchos resultados, teoremas, reglas y otras cuestiones en Estadística. Es ampliamente utilizado en inferencia estadística y en otros ámbitos para determinar la distribución de estimadores o variables. Este teorema y sus aplicaciones principales se enseñan en todos los cursos básicos de Estadística en Ingeniería. Entre ellas se destaca la obtención de manera aproximada de la distribución de ciertos estimadores y por ende el cálculo de intervalos de confianza o valores críticos en pruebas de hipótesis. Pero la forma en la que se aplica o se enseña a aplicarlo deja dudas en cuanto a ciertos procedimientos, que en muchos casos no tienen el sustento suficiente desde lo numérico o probabilístico. Ejemplo de esto es la regla del n>30, la cual se puede encontrar en apuntes de clases de universidades, portales de internet y en hasta libros de estadística [1] [2]. Comúnmente la misma se aplica en cualquier situación y de manera casi determinística. En muchos casos, los alumnos terminan entendiendo que solo si n (tamaño de la muestra o cantidad de variables sumadas) es mayor que treinta se puede aproximar la distribución de la suma con una Normal, a pesar de que puedan conocer el resultado de que la suma de seis variables con distribución U(a, b) tiene una distribución que se puede aproximar muy bien por la Normal. Entender cómo es "el proceso" en el que la distribución de la suma de variables se aproxima cada vez más a la Normal a medida que aumenta la cantidad variables sumadas es fundamental para poder utilizar el teorema en diversas situaciones y permite también entender cómo puede afectar a las conclusiones utilizar distribuciones no adecuadas.

En este trabajo se analiza en profundidad la distribución de la suma de variables aleatorias para distintas cantidades de variables sumadas (n) y distintas distribuciones de las variables que se suman. Luego se establecen criterios sobre el valor mínimo de n en distintos casos para alcanzar una aproximación similar a la de la suma de seis uniformes y se contraponen estos resultados con la regla de n>30. Para definir cuando una aproximación es

similarmente “buena” a otra se hace un análisis por separado para determinados percentiles en donde se obtiene una diferencia numérica entre lo “real” y lo “aproximado” y se la compara con el caso de suma de seis Uniformes. Se obtienen resultados para cada percentil, buscando clarificar lo que sucede en determinados casos muy utilizados en diferentes aplicaciones.

Si bien se han estudiado en muchas oportunidades cuestiones relativas a aproximaciones utilizando el Teorema Central del Límite [3] [4] [5], en este trabajo se pretende realizar un análisis que permita enseñar el uso de este teorema de una forma innovadora y sin reglas mecánicas.

2 Metodología

Para obtener la distribución de la suma de variables en distintas situaciones se realiza una simulación con el software R [6] en la cual se obtiene una gran cantidad de veces (un millón de replicaciones) un conjunto de n valores que simulan a un grupo de observaciones de las n variables sumadas. Luego se calcula la suma de los n valores correspondientes a un conjunto replicándola un millón de veces, generando así una distribución de frecuencias de la suma de n variables aleatorias con el millón de valores obtenidos. Esta distribución de frecuencias, por estar realizada con una cantidad extremadamente alta de observaciones, es considerada una muy buena aproximación de la distribución suma y se la toma como “distribución real”. A partir de esta distribución se puede obtener la diferencia entre la probabilidad real que acumula un percentil y la que debería acumular. De la distribución aproximada (Normal) se obtiene el percentil elegido y luego se calcula la probabilidad que este valor acumula en la distribución real (simulada), encontrando finalmente la diferencia buscada. Este cálculo se realiza para distintos valores de n, distribuciones y percentiles.

En este trabajo se considera como buena aproximación de la Normal al caso de suma de seis Uniformes y a los valores obtenidos se los considera como referencia. Luego se realiza el análisis para el resto de las distribuciones comparando con los valores de referencia. También se estudia en detalle lo que sucede al sumar treinta variables aleatorias para verificar si existe algún sustento en la regla que involucra ese número. Se obtienen resultados discriminados por percentil.

Se tienen en cuenta las siguientes distribuciones de la variable:

- Uniforme
- Exponencial
- Lognormal
- Triangular asimétrica

Y se consideran los percentiles correspondientes a las siguientes probabilidades:

- 0,005
- 0,01
- 0,025
- 0,05
- 0,1
- 0,25
- 0,5
- 0,75
- 0,9
- 0,95
- 0,975
- 0,99
- 0,995

Las diferencias se calculan siguiendo los siguientes pasos, una vez obtenida la “distribución real”:

- Se fija el valor de probabilidad acumulada (Prob. teórica o fijada).
- Se obtiene el valor del percentil correspondiente a la probabilidad en una distribución Normal con igual media y desvío que la distribución real.

- Se obtiene la probabilidad que acumula el percentil en la distribución real (Prob. real).
- Se restan los valores obtenidos en los pasos 1 y 3. Dif = Prob. fijada – Prob real

En la figura 2 se visualizan las dos probabilidades (teórica y real) para un caso puntual.

3 Desarrollo del análisis y resultados

3.1 Suma de variables aleatorias. Teorema Central del Límite

En diversas situaciones se puede definir una variable aleatoria que es suma de otras variables. Esto sucede por ejemplo en errores aleatorios de medición o en estimación de parámetros. Existen propiedades y teoremas que apuntan a obtener parámetros y forma de la distribución, en función de lo que se conoce de las variables que son sumadas. Para la esperanza y la variancia, las propiedades fundamentales son:

$$Esperanza\ [X+Y] = Esperanza\ [X] + Esperanza\ [Y] \quad \textbf{(1)}$$

$$Varianza\ [X+Y] = Varianza\ [X] + Varianza\ [Y] + 2\ Covarianza\ (X,Y) \quad \textbf{(2)}$$

Estas fórmulas pueden generalizarse para suma de n variables.

Para el modelo (o forma) de la distribución, es preponderante el teorema central del límite. Es aquí donde surgen algunas controversias en cuanto a su aplicación y la forma de enseñarlo. Específicamente en cuanto a qué valor de n es suficientemente grande para obtener una buena aproximación.

Se plantea estudiar en profundidad para qué valores de n se obtienen aproximaciones adecuadas para uso práctico. Para esto se establece como criterio de buena aproximación a la que se obtiene con la suma de seis distribuciones uniformes. Una forma de analizar "la bondad" de una aproximación es a través de sus percentiles, es decir, comparando lo que debería acumular un determinado valor (si la distribución fuese Normal) con lo que realmente acumula usando la distribución simulada.

3.2 Planteo de escenarios

Se analiza el grado de aproximación a la distribución Normal de la distribución de la suma de variables aleatorias con las siguientes condiciones:

Las n variables sumadas son independientes e igualmente distribuidas, considerando los siguientes casos:

- Uniforme (en el intervalo (0,1))
- Exponencial (parámetro igual a 1)
- Lognormal (media igual a 0 y desvió estándar igual a 1)
- Triangular asimétrica (en el intervalo (0,1), moda igual a 0.2)

Las cantidades de variables sumadas (n) son:

- Uniforme: $2 \leq n \leq 6$
- Exponencial: $2 \leq n \leq 100$
- Lognormal: entre $2 \leq n \leq 100$
- Triangular asimétrica: $2 \leq n \leq 100$

También se obtuvieron los resultados para valores de n=1, lo que no sería una suma de variables sino una distribución determinada de las mencionadas anteriormente.

3.3 Obtención mediante métodos computacionales de la distribución de la suma de n variables idénticamente distribuidas

Luego de realizar todos los cálculos con el software R se obtienen todas las distribuciones planteadas. Como ejemplo se muestra lo obtenido para los casos de la suma de seis uniformes y de treinta exponenciales.

Fig. 1. Gráfica de la distribución real de la suma de seis (6) variables con distribución Uniforme obtenida por simulación con R junto con una curva Normal.

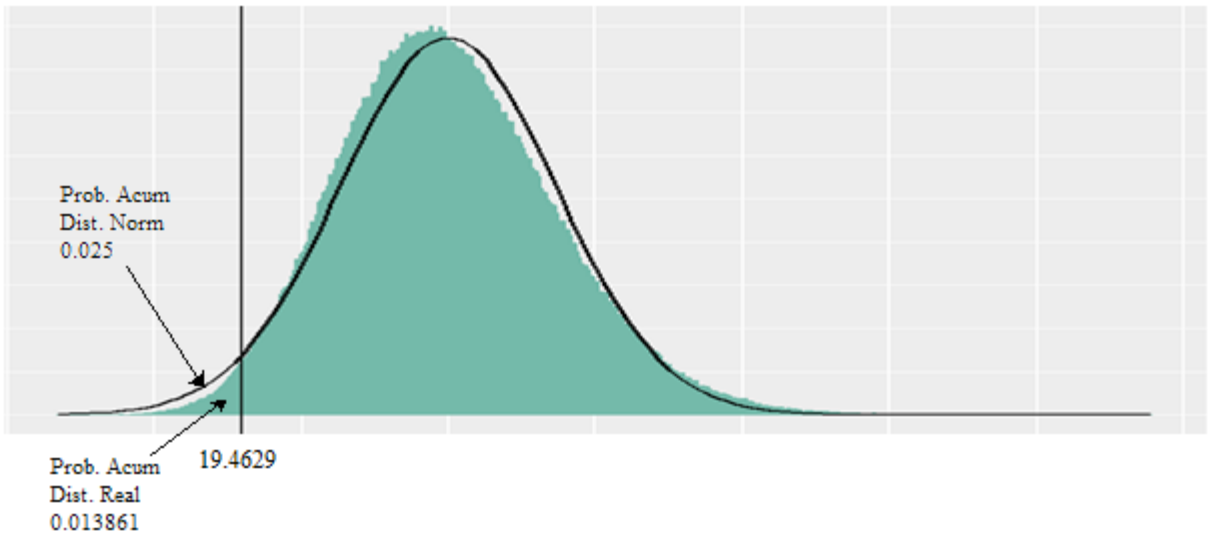


Fig. 2. Gráfica de la distribución real de la suma de treinta (30) variables con distribución Exponencial obtenida por simulación con R junto con una curva Normal.

Gráficamente, si se observa la distribución de la suma de treinta exponenciales (sin la curva) pareciera que tiene forma similar a la Normal, pero acompañando el gráfico con la curva de la distribución Normal se observa una cierta asimetría. Esto se comprueba al analizar las diferencias mencionadas para determinados percentiles.

3.4 Obtención de la probabilidad acumulada (real) correspondiente a los percentiles obtenidos suponiendo distribución Normal

A partir de la distribución de la suma de variables obtenidas, se calculan los percentiles planteados y con estos valores se obtienen la probabilidad que acumula el mismo en la distribución Normal con misma media y desvío. Como ejemplo, considerando el caso de distribución Exponencial n=30 y la probabilidad acumulada de interés 0,025 (representada en la figura 2 como el área que se encuentra a la izquierda de la línea vertical y debajo de la

curva Normal), la distribución real tiene una media de 30 y un desvío de 5,477. Se obtiene que el percentil de la distribución Normal con esa media y desvío es 19,4629. Luego, este valor acumula una probabilidad de 0.013861 en la distribución real (representada en la figura 2 por la zona sombreada de verde a la izquierda de la línea vertical). Y finalmente se obtiene que la diferencia 0.025-0.013861 es igual a 0.011139 (representada en la figura 2 como la zona a la izquierda de la línea vertical y debajo de la curva Normal que no se encuentra sombreada de verde).

En la tabla 1 se presentan todos los resultados obtenidos de las diferencias para la distribución Uniforme. Luego, en la tabla 2 se muestra lo mismo pero para la distribución Exponencial.

Tabla 1. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Uniforme con n de 1 a 6.

Percentil	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
n=1	0,005	0,01	0,025	0,025749	-0,03011	-0,05572	-0,000143	0,055227	0,030049	-0,02423	-0,025	-0,01	-0,005
n=2	0,005	0,00876	0,005169	-0,003706	-0,01377	-0,0125	-0,000245	0,01272	0,013694	0,004041	-0,005059	-0,008774	-0,005
n=3	0,003454	0,003662	0,001643	-0,0017	-0,00542	-0,01027	-0,000348	0,009919	0,005707	0,00167	-0,00142	-0,003478	-0,003361
n=4	0,002126	0,002225	0,001403	-0,00066	-0,00417	-0,00677	-0,000401	0,00715	0,004306	0,000971	-0,001162	-0,002092	-0,002126
n=5	0,001573	0,001726	0,001284	-0,000469	-0,00331	-0,0057	-0,000103	0,005645	0,003356	0,000709	-0,00105	-0,001665	-0,001595
n=6	0,001333	0,001513	0,000897	-0,000355	-0,00264	-0,00501	-0,00012	0,004435	0,002641	0,000776	-0,000837	-0,001378	-0,001191
n=7	0,001043	0,001229	0,001026	-0,000284	-0,0024	-0,00375	-0,000313	0,0038	0,002252	0,000409	-0,000622	-0,000973	-0,000956
n=8	0,00089	0,001097	0,000639	-0,000475	-0,00204	-0,0033	-0,000011	0,003315	0,001939	0,000293	-0,000524	-0,000979	-0,000837
n=9	0,000877	0,001	0,000634	-0,000306	-0,0017	-0,00298	-0,000359	0,003192	0,001712	0,000295	-0,000428	-0,000811	-0,000811
n=10	0,000748	0,000829	0,000528	-0,00028	-0,00126	-0,00277	-0,000414	0,003073	0,001627	0,00032	-0,0005	-0,000701	-0,00069

Tabla 2. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Exponencial con n de 1 a 30.

Percentil	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
n=1	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	-0,02753	-0,13234	-0,0631	0,00205	0,020936	0,026873	0,026024	0,023007
n=2	0,005	0,01	0,025	0,05	0,084693	-0,03092	-0,09416	-0,04435	0,006365	0,020566	0,023938	0,021676	0,018495
n=3	0,005	0,01	0,025	0,049484	0,055951	-0,02755	-0,07786	-0,03569	0,007569	0,019112	0,021519	0,018925	0,0158
n=4	0,005	0,01	0,024998	0,043943	0,042141	-0,02501	-0,06663	-0,03064	0,007473	0,017808	0,019761	0,017047	0,014198
n=5	0,005	0,01	0,024551	0,038629	0,03471	-0,02316	-0,05946	-0,02745	0,007449	0,016615	0,018265	0,015666	0,012766
n=6	0,005	0,009998	0,023413	0,034302	0,029479	-0,02119	-0,05424	-0,02487	0,007287	0,015861	0,01719	0,014516	0,011661
n=7	0,005	0,00997	0,022138	0,031037	0,026239	-0,01982	-0,05013	-0,0226	0,007227	0,014972	0,016177	0,013469	0,010808
n=8	0,004999	0,00988	0,021084	0,028556	0,023587	-0,01899	-0,04676	-0,0216	0,006927	0,014427	0,015318	0,012868	0,010335
n=9	0,004992	0,009743	0,02001	0,0266	0,021534	-0,01807	-0,04401	-0,02019	0,006804	0,014057	0,014776	0,012195	0,009644
n=10	0,004975	0,009541	0,019088	0,024916	0,019718	-0,01745	-0,04148	-0,01876	0,006809	0,013756	0,014363	0,011581	0,009032
n=11	0,004947	0,009334	0,01824	0,023497	0,01855	-0,01696	-0,03967	-0,01761	0,006877	0,013237	0,013691	0,011099	0,008667
n=12	0,004923	0,009137	0,017515	0,022349	0,017382	-0,01641	-0,03835	-0,01706	0,00715	0,012749	0,013345	0,010613	0,008208
n=13	0,004859	0,009002	0,016992	0,021211	0,016366	-0,01592	-0,03707	-0,01628	0,006889	0,012435	0,012826	0,010222	0,007832
n=14	0,004808	0,008803	0,016361	0,020357	0,015506	-0,01513	-0,03576	-0,0155	0,006442	0,012449	0,0125	0,009882	0,007622
n=15	0,004736	0,008651	0,015813	0,019481	0,014854	-0,01471	-0,03461	-0,01484	0,0067	0,012067	0,012028	0,009498	0,007422
n=16	0,004734	0,008495	0,015287	0,018625	0,014255	-0,01379	-0,03365	-0,01467	0,006518	0,011498	0,011593	0,009266	0,007258
n=17	0,004673	0,008338	0,014752	0,017915	0,013558	-0,01382	-0,03278	-0,01407	0,006444	0,011008	0,011311	0,009086	0,007042
n=18	0,004596	0,008138	0,014271	0,017511	0,013104	-0,01325	-0,03186	-0,01354	0,006095	0,011018	0,010985	0,008789	0,006913
n=19	0,004552	0,007977	0,014024	0,016871	0,012739	-0,01303	-0,03078	-0,01301	0,005832	0,01072	0,010803	0,00864	0,006704
n=20	0,004505	0,00783	0,013629	0,016368	0,01224	-0,01279	-0,03006	-0,01297	0,006108	0,010285	0,01069	0,00846	0,006487
n=21	0,004472	0,007706	0,013332	0,015796	0,01191	-0,01255	-0,02923	-0,01268	0,005583	0,010166	0,01058	0,008368	0,006348
n=22	0,004395	0,007594	0,013024	0,015373	0,011565	-0,01192	-0,02831	-0,01265	0,005484	0,010109	0,010304	0,008181	0,006308
n=23	0,004315	0,007416	0,012683	0,014928	0,011198	-0,01147	-0,02756	-0,01243	0,00524	0,00993	0,01013	0,008021	0,006154
n=24	0,004282	0,00724	0,012395	0,014428	0,011096	-0,01135	-0,02713	-0,01244	0,005393	0,009692	0,010033	0,007829	0,006008
n=25	0,004223	0,007187	0,012161	0,014406	0,0107	-0,01112	-0,02646	-0,01238	0,00531	0,009731	0,009959	0,007754	0,00588
n=26	0,004146	0,007067	0,011951	0,014054	0,010107	-0,01099	-0,02563	-0,01223	0,005014	0,009706	0,009817	0,007511	0,005733
n=27	0,004099	0,007028	0,011751	0,013703	0,009871	-0,01051	-0,02559	-0,0116	0,005475	0,009559	0,009478	0,007419	0,00555
n=28	0,00404	0,006868	0,011494	0,013448	0,009591	-0,01055	-0,02506	-0,01138	0,005362	0,009292	0,00937	0,007261	0,005461
n=29	0,003991	0,006725	0,011328	0,013192	0,009608	-0,01056	-0,02454	-0,01132	0,005215	0,009093	0,009218	0,007194	0,005407
n=30	0,003939	0,006641	0,011139	0,012957	0,009361	-0,01008	-0,02472	-0,01112	0,00518	0,009017	0,00905	0,007052	0,005472

Se observa en ambas tablas que al aumentar el valor de n las diferencias van disminuyendo.

3.5 Análisis de resultados

Los valores que se observan en la tabla 1 en la fila correspondiente a n=6 sirven de referencia para analizar el grado de aproximación de las distintas distribuciones suma.

En el caso de la distribución Exponencial se obtiene que para n=100 todas las diferencias son mayores que las obtenidas con la suma de seis uniformes. Es decir, sumando cien exponenciales (o menos) no se llega al grado de

aproximación considerado “bueno”. Mucho menos con valores menores como treinta. En la tablas 3 y 4 se visualizan las diferencias correspondientes a la distribución Exponencial para n=100 y n=30 respectivamente.

Tabla 3. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Exponencial con n=100.

0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
0,00231	0,00364	0,00531	0,00568	0,00329	-0,0068	-0,01297	-0,00462	0,00386	0,00616	0,0057	0,00439	0,0032

Tabla 4. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Exponencial con n=30.

0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
0,00394	0,00664	0,01114	0,01296	0,00936	-0,01008	-0,02472	-0,01112	0,00518	0,00902	0,00905	0,00705	0,00547

En la tabla 4, se observa que para los percentiles 0,025 o 0,05 la aproximación no es buena. Los valores reales acumulados son 0,01386 y 0,03704 respectivamente. Para los percentiles 0,975 y 0,95 pasa algo similar, los valores reales son 0,9409 y 0,9651. Para los percentiles más extremos, por ejemplo 0,005 y 0,995 las diferencias son más significativas. Para estos dos valores, las probabilidades reales acumuladas son 0.00106 y 0.98953 respectivamente, lo que significa que la probabilidad real en la cola sería la quinta parte (izquierda) o el doble (derecha) de lo que correspondería.

Para la distribución Lognormal sucede algo similar. En la tabla 5 se muestran las diferencias obtenidas para n=100. Estos valores son aún mayores que los de la Exponencial por tener una distribución más abultada en una de sus colas.

Tabla 5. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Lognormal con n=100.

0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
0,004779	0,008859	0,017399	0,023567	0,02227	-0,00918	-0,0418	-0,0253	0,001615	0,010321	0,012924	0,011953	0,010014

Para la distribución Triangular asimétrica los resultados son diferentes a los correspondientes a las dos distribuciones anteriores. En la tabla 6 se muestran los resultados para n=10.

Tabla 6. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Triangular asimétrica con n=10

0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
0,002228	0,003314	0,004605	0,004267	0,001797	-0,00618	-0,0093	-0,001422	0,003557	0,004146	0,003468	0,002228	0,003314

Para los percentiles 0,025, 0,05, 0,975 y 0,95 si bien la aproximación no es como la suma de seis uniformes (las diferencias son mayores), se puede considerar que es relativamente buena (las diferencias son bajas respecto del percentil correspondiente).

Al sumar treinta distribuciones Triangulares se obtiene:

Tabla 7. Diferencias entre la probabilidad teórica y la real para cada percentil de la distribución suma de variables idénticamente distribuidas con distribución Triangular asimétrica con n=30

0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
0,001249	0,001824	0,002316	0,002314	0,001098	-0,00326	-0,00448	-0,001718	0,00159	0,002105	0,001966	0,001314	0,000886

En general la aproximación es buena para todos los percentiles, aunque para algunos aún es peor que para la suma de seis uniformes.

4 Conclusiones

Se puede ver en detalle qué tanto la distribución de la suma de variables se aproxima a la Normal mediante el cálculo de la probabilidad real que acumulan ciertos percentiles.

Se observa que para la suma de treinta variables con distribución Exponencial la aproximación es mucho peor que para la suma de seis uniformes y se puede ver el grado de error en la probabilidad acumulada por ciertos percentiles comúnmente usados en inferencia estadística. Lo mismo se puede observar para la suma de treinta variables con distribución Lognormal. Aun sumando cien variables con alguna de esas dos distribuciones asimétricas se encuentra un grado de aproximación peor que con la suma de seis uniformes.

En contraste, en el caso que las variables tengan distribución Triangular asimétrica, para algunos percentiles, se logra una buena aproximación con n=10. Para otros percentiles, se logra con n=25.

La asimetría de la distribución de las variables sumadas repercute en la distribución de la suma, dando como resultado que en los percentiles extremos se obtengan aproximaciones peores. Incluso se puede ver que la aproximación puede ser diferente en una cola o en la otra.

De esto se deduce que no puede haber una regla que sirva para cualquier caso. Siempre se debe hacer algún tipo de análisis tratando de acercarse al conocimiento de las distribuciones con las que se trabaja. Si bien en muchos casos no se conoce la distribución de las variables, con una cantidad de datos no tan grande se puede tener una idea como para saber si se trabaja en una situación más cercana por ejemplo a la suma de exponenciales o la suma de uniformes. Y también se puede considerar qué percentiles se necesitan utilizar para saber el grado de aproximación que se alcanzará.

Esto permite tener en cuenta la posibilidad de dejar de lado por completo la regla de n>30 en los cursos de Estadística en ingeniería y apuntar a que los alumnos puedan analizar en cada situación la posibilidad de usar alguna aproximación o buscar otra alternativa. Siempre tratando de que el mismo enfrente el problema con un espíritu crítico y proactivo.

En otro trabajo posterior se realizará un análisis similar pero con el estadístico t-student para determinar qué tan correcto es usar este estadístico en situaciones donde la población no es Normal y de esta manera poder establecer criterios en la forma de enseñar el uso de esta distribución que prescindan del uso de reglas mecánicas comúnmente usadas.

Referencias

1. Hines, W.W; Montgomery, D.C: Intervalo de confianza sobre la media de una distribución normal con varianza desconocida: *Probabilidad y estadística para ingeniería y administración.* Compañía editorial continental, pp. 304 (1996).
2. Marta, M.M; ¿Qué es el teorema central del límite?. *SuperProf.* https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/estadistica/inferencia/teorema-central-del-limite.html *(2020).* Accedido el 8 de junio de 2022.
3. Alvarado, H; Batanero, C ; Contreras, A .El significado del teorema central del límite: evolución histórica a partir de sus campos de problemas*. Investigación en Didáctica de las Matemáticas/Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. 257-277 (2006).
4. Alvarado, H. Significados del teorema central del límite y sus campos de problemas en los textos de estadística para ingenieros. *Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada, España*. Vol. 34, No. 2, pp. 7-28 (2004).
5. Aronna, M.S; Del Barco, V.J; Tolomei P.B; Vittone,F ; Teorema Central del límite*. Departamento de Matemática, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.* https://web.fceia.unr.edu.ar/images/PDF/secretaria_cyt/tcl42.pdf (2004)*.* Accedido el 8 de junio de 2022.
6. R Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/.

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Modelización del mecanismo biela-manivela en un curso de Algebra y Geometría Analítica

Mario Di Blasi Regner
Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional
Hipólito Irigoyen 288, General Pacheco, Tigre.
mdiblasi@red.frgp.utn.edu.ar

Resumen. En este trabajo presentaré el diseño y la implementación de un dispositivo didáctico que permitió que estudiantes de primer año de Ingeniería reconstruyeran la organización matemática "elipse" y modelizarán un mecanismo biela – manivela. El proceso de estudio y de modelización se concibieron y gestionaron enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Desde esa perspectiva, es importante que esos procesos se originen, y se desarrollen, en la búsqueda de la respuesta a una pregunta "significativa" para las y los estudiantes. En este caso esa pregunta, intramatemática, fue: *¿cómo determinar si una curva plana cerrada es una elipse?* Un escenario de aprendizaje mediado por TIC facilitó las tareas en las que se pudieron identificar niveles avanzados de modelización. Las y los estudiantes pudieron articular los enfoques, analítico y sintético, de la geometría.

Palabras Clave: Ingeniería, Desarrollo de competencias, Modelos matemáticos.

1 Introducción

1.1 Respecto de la modelización matemática

La conceptualización de modelización matemática que adoptaré en este trabajo está descripta en García [1]: "…la actividad de modelización matemática se interpreta como proceso de (re)construcción y articulación de praxeologías matemáticas que se amplían y completan a medida que avanza el proceso y con el objetivo de responder a la/s cuestión/es de inicio".

Esta concepción, adoptada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) [2] [3], habilita a considerar que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización.

Ruiz Munzón [4] describe la modelización algebraico-funcional partiendo de considerar que el fundamento de la geometría analítica es el hallazgo de que las ecuaciones algebraicas de la forma f(x, y) =0 corresponden a lugares geométricos determinados por los puntos cuyas coordenadas la satisfacen.

Distingue tres niveles de modelización. En el tercer nivel de modelización de un sistema el modelo se expresa mediante familias de funciones de dos o más variables y las correspondientes fórmulas asociadas. En este último nivel, el rol de los "parámetros" y de las "variables" es intercambiable y se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función.

1.2 ¿Qué es una Actividad de Estudio e Investigación?

En oposición al monumentalismo de los sistemas de enseñanza dominantes en la actualidad, desde la TAD se plantea la necesidad de introducir en ellos procesos de estudio funcionales, donde los saberes no constituyan mo-

numentos que el profesor enseña a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver cuestiones problemáticas.

Las Actividades de Estudio e Investigación nacen como un modelo didáctico para abordar esa problemática; se trata así, de superar la estructura binaria tradicional de la enseñanza de la matemática que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos-teóricos y luego tareas como medio para la aplicación de los primeros.

Una AEI es, en principio, una organización didáctica donde la clase, bajo la dirección de un profesor, va a hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a los alumnos una cierta organización matemática local (OML). Según explica Otero , para que esto es necesario partir de una cuestión generatriz Q cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta R, y esta contenga los elementos esenciales de la OML inicial.

2 Cuestiones, tareas y situaciones en la AEI

En la siguiente figura se muestran las relaciones entre la cuestión generatriz, las cuestiones secundarias derivadas de ella, los tipos de tarea que debieron enfrentar las y los estudiantes y las situaciones que componen la AEI.

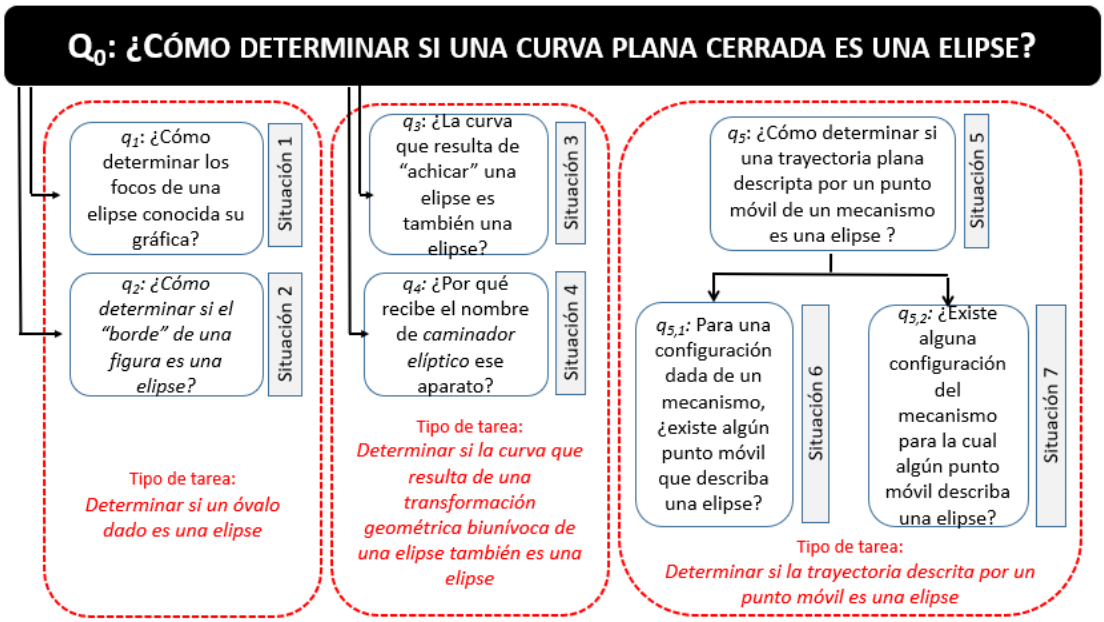


Fig. 1. Relaciones entre cuestiones, tareas y situaciones.

Describiré brevemente las últimas tres situaciones y el proceso de estudio y modelización llevado a cabo por las y los estudiantes en la resolución del último tipo de tarea por su relevancia en la AEI.

En las mencionadas situaciones, las y los estudiantes se encontraron frente a la necesidad de modelizar el funcionamiento de un caminador elíptico (figura 2) con la meta de decidir si el punto de apoyo del pie describía al moverse una elipse.

Fig. 2: Caminador elíptico.

Para poder responder la cuestión secundaria q_5 las y los estudiantes, habituados a trabajar con GeoGebra, construyen un modelo simplificado del funcionamiento del caminador, que puede verse en la figura 3:

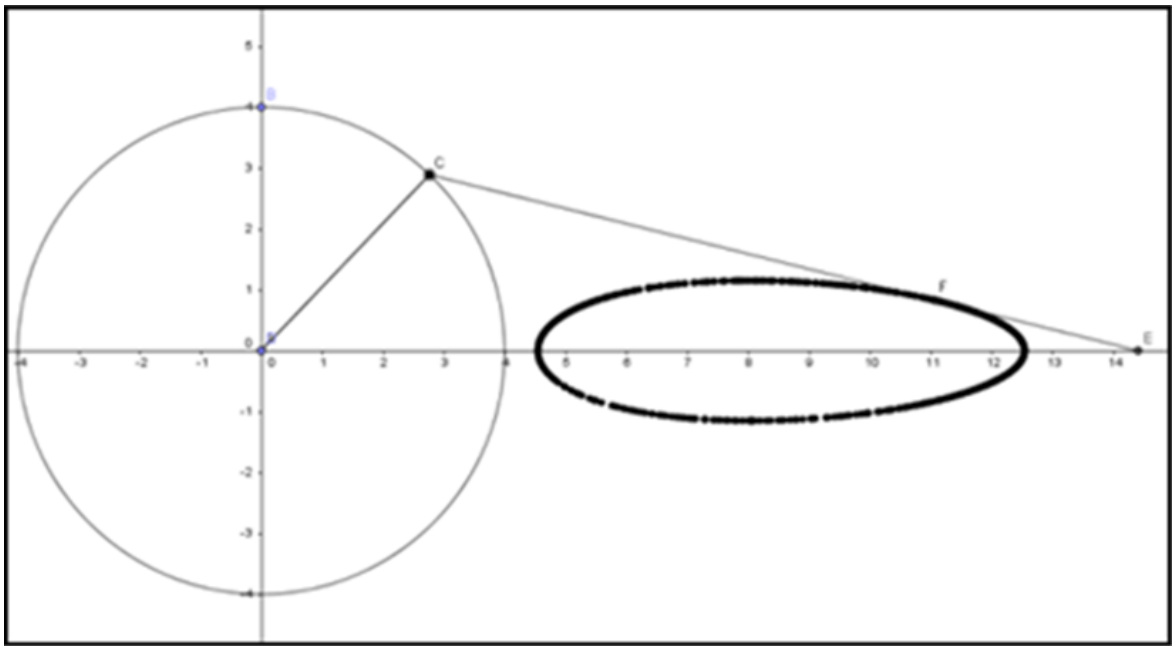


Fig. 3: Modelo simplificado del caminador.

En este modelo simplificado puede identificarse un mecanismo biela (segmento CE) – manivela (segmento OC).

El punto de apoyo (idealizado) del pie en el caminador elíptico, estaría representado por el punto F. Este importante mecanismo de la ingeniería transforma movimiento rectilíneo (por ejemplo, del pistón de un motor de combustión interna) en movimiento circular como ilustra la figura 4.

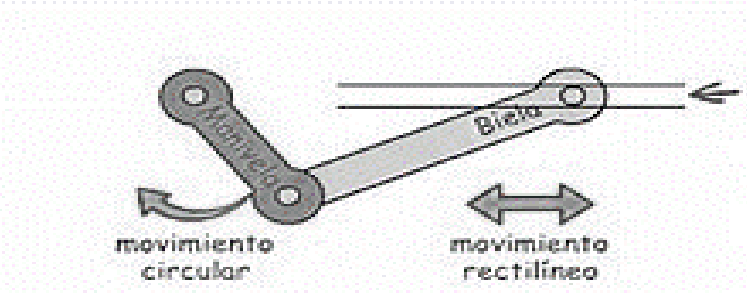


Fig. 4: Mecanismo biela – manivela.

Considerando un sistema de ejes cartesianos, e identificando las variables y parámetros necesarios (figura 5), las y los estudiantes pueden abordar el problema de decidir si el punto F describe, al moverse, una elipse.

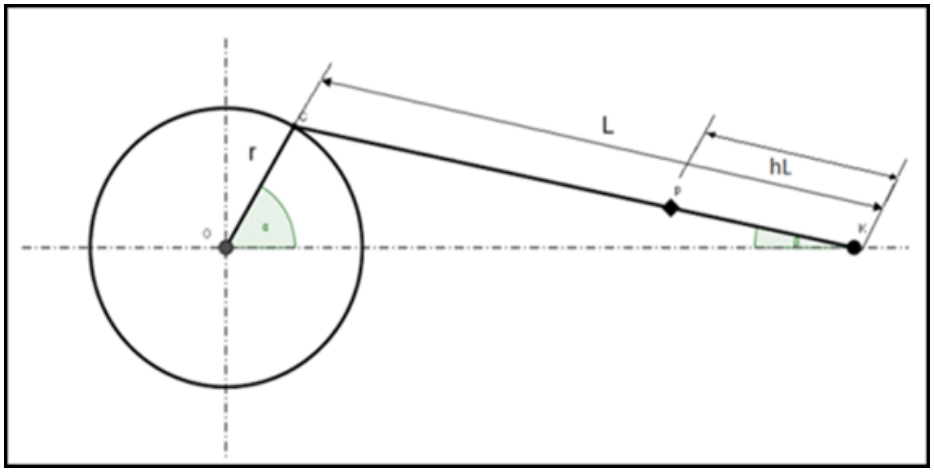


Fig. 5: Variables y parámetros en el modelo.

Siendo

r: longitud de la manivela.
L: longitud de la biela.
k: punto correspondiente al pie de la biela.
O: punto del centro de la circunferencia de radio r y origen del sistema de coordenadas (x; y).
p: punto genérico de la biela.
c: punto correspondiente al botón de la manivela.
α: ángulo de la manivela con respecto al eje horizontal, en sentido horario.
β: ángulo de la biela con respecto al eje horizontal, en sentido antihorario.

Y definiendo

h: fracción de longitud de L, de forma tal que la longitud del segmento $\overline{pk}$ es h.L.

En un instante cualquiera, el punto p, tendrá por coordenadas:

$$x_p = r.\cos\alpha + L.\cos\beta - h.L.\cos\beta$$

$$\boxed{x_p = r.\cos\alpha + L.\cos\beta\,(1-h)} \quad (1)$$

Dada la geometría podemos observar que:

$$r.\,sen\,\alpha = L.\,sen\,\beta \Rightarrow \boxed{sen\,\beta = \frac{r}{L} sen\,\alpha} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y reescribiendo $cos\,\beta = \sqrt{1 - sen^2\,\beta} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} sen^2\,\alpha}$ tenemos:

$$\boxed{x_p = r.\cos\alpha + L.(1-h).\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} sen^2\,\alpha}} \quad (3)$$

En cuanto a la coordenada *y*, tenemos:

$$y_p = h.L.\,sen\,\beta = h.L.\frac{r}{L}.\,sen\,\alpha \Rightarrow \boxed{y_p = h.r.\,sen\,\alpha} \quad (4)$$

Donde (3) y (4) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un punto genérico de la biela, a una distancia h.L del pie, en función de la variación del ángulo α.

Si suponemos que L es considerablemente mayor que r, podremos describir esas trayectorias, como una familia de elipses de semieje mayor horizontal igual a r, desde los casos límites h = 0, en el cual tendremos un segmento de recta, y h = 1, donde tendremos una circunferencia de radio r.

En importante observar, que para h = 0, nos encontramos en el punto correspondiente al pie de la biela, que, como indicamos anteriormente, es el encargado de transmitir el movimiento lineal alternativo, y para h = 1, nos encontraremos en el punto correspondiente al botón de la manivela, dotado de movimiento circular.

Definimos $\lambda = \frac{L}{r}$.

Cabe aclarar que también es común encontrar a λ como la relación inversa, pero en este caso nos resulta más conveniente a fines de simplicidad en los cálculos definirla de esta forma, queda a criterio del lector invertir la relación de ser necesario.

Operando, a partir de la ecuación (3):

$$x_p = r.\cos\alpha + L.(1-h).\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} sen^2\,\alpha}$$

$$x_p = r.\left(\cos\alpha + \frac{L}{r}.(1-h).\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} sen^2\,\alpha}\right)$$

$$x_p = r.\left(\cos\alpha + \lambda.(1-h).\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2} sen^2\,\alpha}\right)$$

$$\boxed{x_p = r.\left(\cos\alpha + (1-h).\sqrt{\lambda^2 - sen^2\,\alpha}\right)} \quad (5)$$

Si asumimos

$$\lambda >> 1 \Rightarrow \lambda^2 >> 1 \Rightarrow \lambda^2 >> sen^2\,\alpha$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda^2 - sen^2\,\alpha} \cong \sqrt{\lambda^2} \cong \lambda$$

Si reescribimos (5) con la simplificación anterior, queda:

$$\boxed{x_p = r.cos\,\alpha + r(1-h).\lambda} \quad (6)$$

De la ecuación (4), tenemos:

$$y_p = h.r.sen\,\alpha \Rightarrow \boxed{sen^2\,\alpha = \frac{{y_p}^2}{(h.r)^2}} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6), y operando:

$$x_p = r.cos\,\alpha + r(1-h).\lambda$$
$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.cos^2\,\alpha$$
$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.(1 - sen^2\,\alpha)$$
$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.\left(1 - \frac{{y_p}^2}{(h.r)^2}\right)$$

Obtenemos:

$$\boxed{\frac{\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2}{r^2} + \frac{{y_p}^2}{(h.r)^2} = 1} \quad (8)$$

Que es la ecuación de una familia de elipses de semieje mayor r, coordenada x del centro variable con h y λ, y semieje menor variable con h.

Dado que L es mucho mayor que r la diferencia entre las curvas descriptas por las ecuaciones (3) y (4) son muy parecidas a las que describe la ecuación (8).

En definitiva, el punto de apoyo del pie no describe una elipse. Para mayor detalle puede verse el trabajo de Di Blasi Regner y Ramirez Daneri [5].

La fundamentación y la descripción completa de la AEI expuesta pueden encontrarse en el trabajo de Di Blasi Regner y Rodriguez [6] y en la tesis doctoral del autor, "Articulación entre los enfoques sintético y analítico en cónicas a nivel superior en entornos de geometría dinámica" en https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2344.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Un enfoque integrador de la Geometría Sintética y la Geometría Analítica en un escenario de aprendizaje mediado por TIC, especialmente con escenas dinámicas realizadas en GeoGebra, permitió enfrentar un problema complejo de la ingeniería en industria automotriz (el mecanismo biela – manivela) en una materia de primer año y facilitó el abordaje de tareas de modelización en las que pudimos identificar que se alcanzó el nivel 3 de modelización descripto por Ruiz Munzón.

En la búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas por los estudiantes durante el proceso de estudio surgió, en varias oportunidades, la cuestión del error de medición, de la imprecisión al elegir un punto de la gráfica para realizar una construcción, del significado de "borde" de una gráfica y de la dificultad para determinarlo, etc.

Esas cuestiones fueron debatidas con el grupo de estudiantes y se decidió no estudiarlas en ese momento.

Su estudio, en estas situaciones o en otras similares, podría favorecer un trabajo codisciplinar con Física y la reconstrucción de otras OM. Los resultados de la investigación invitan a un replanteo del programa de la materia. Podría analizarse la posibilidad de incluir situaciones del tipo de las desarrolladas en la AEI que favorezcan la articulación entre GA y GS.

Otro proceso de estudio, relacionado con el mecanismo biela – manivela, que podría considerarse en Análisis Matemático resulta de plantear la siguiente cuestión del ámbito de la ingeniería en industria automotriz: ¿cómo fabricar una carcasa para el mecanismo biela – manivela descripto?

Referencias

1. García, F et al. Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15, pp 75 – 94. (2019).
2. Chevallard, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas - Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico. Primer Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de los didáctico, pp. 705-746. Universidad de Jaén. (2005).
3. Otero, M. La teoría antropológica de lo didáctico. En M. Otero, M. Fanaro, A. Corica, V. Llanos, P. Sureda, y V. Parra. (Ed.), *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática* (pp.15-27). Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Dunken.(2013).
4. Ruiz Munzón, N. La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=2343969. (2010).
5. Di Blasi Regner, M y Ramírez Daneri, S. Análisis geométrico del mecanismo biela - manivela. Vertientes del conocimiento, Vol. 3, 3. pp 69-73.(2016).
6. Di Blasi Regner, M. y Rodríguez, M. El fenómeno de la desarticulación entre los enfoques sintético y analítico en elipses: un estudio de caso. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, Vol. 11, 2. pp 16-27.(2016)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
Facultad de Ingeniería UNER
UTN PARANÁ

Desarrollo de la competencia resolución de problemas en una actividad de modelización en estudiantes de carreras de ingeniería en un curso de Probabilidad y Estadística

Alvarez Mario[1], Paskosky Pablo[1]
[1]Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Concordia, Universidad Tecnológica Nacional
Salta 277 Concordia, Entre Ríos
{malvarez, ppaskosky}@frcon.utn.edu.ar

Resumen. Se presenta una experiencia en un curso de Probabilidad y Estadística de segundo año de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Concordia de la Universidad Tecnológica Nacional en la cual se focaliza desarrollar la competencia específica de Resolución de Problemas a través del uso de la metodología de Modelización Matemática. Para el análisis didáctico de la producción de uno de los grupos de estudiantes se utilizaron herramientas teórico-metodológicas del Enfoque de Resolución de Problema y del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Para la evaluación del desarrollo de la competencia se diseñó una rúbrica que acompañó todo el proceso del desarrollo de la tarea. La valoración final fue significativa para los estudiantes, se reconoció la retroalimentación entre las etapas de la resolución de un problema, junto a las decisiones que debieron tomar respecto a los objetos matemáticos de mayor pertinencia y el uso de recursos tecnológicos.

Palabras Clave: Desarrollo de competencias, Probabilidad y Estadística, Modelización matemática.

1 Introducción

La formación de los ingenieros en nuestro país se encuentra desde el año 2006 en un proceso de reformulación, ya que se ha adoptado la enseñanza por competencias como enfoque teórico-metodológico para el desarrollo de los planes de estudio. Este acuerdo desde el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) implica una revisión crítica de la enseñanza, particularmente de las ciencias básicas, desde los primeros años de las carreras.

Para tal fin se tienen dos documentos diseñados por el CONFEDI: el libro azul que define las competencias requeridas para el ingreso (CONFEDI [1]) y el libro rojo que define las competencias genéricas y específicas de egreso (CONFEDI [2]).

En el enfoque de enseñanza por competencias queda fuera de lugar la concepción de enseñanza como mera transmisión del conocimiento, pasando a un modelo donde el proceso de enseñanza y aprendizaje queda centrado en el estudiante, quedando el docente como facilitador o guía del aprendizaje, lo cual implica un rol muy diferente al que tiene en la enseñanza tradicional.

Los documentos del CONFEDI distinguen tres tipos de competencias: las competencias básicas (comprensión lectora, producción de textos, manejo de distintas estrategias de aprendizaje y la resolución de problemas), las competencias transversales (autonomía en el aprendizaje, destrezas cognitivas generales) y las competencias específicas (competencias matemáticas, físicas, químicas, entre otras).

Dentro de las competencias específicas se encuentra (p. 52, CONFEDI [2]) “Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos” con sus respectivos Indicadores de logro para su

correspondiente evaluación.

En el presente trabajo se adopta como definición de "competencia" a la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales. (pág. 16, CONFEDI [1])

Con el objetivo de promover el desarrollo de competencias, en particular la competencia específica de resolución de problemas, se ha implementado una actividad en estudiantes de segundo año de Probabilidad y Estadística de las carreras de Ingeniería eléctrica, Ingeniería Civil e Ingeniería Industrial de la Facultad Regional Concordia (FRCON) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) basada en la metodología de Modelización matemática, según Bazzanezi y Bienbengut [3].

La actividad consistió en la resolución de un problema formulado por los mismos estudiantes aplicando los contenidos desarrollados en el curso. Para lo cual el equipo docente se ha limitado a orientar en momentos muy específicos del proceso y principalmente en el uso de software.

A continuación se describen los elementos del marco teórico adoptado, el diseño de la actividad propuesta y un análisis didáctico de su aplicación en un grupo de estudiantes para concluir en una valoración cualitativa del grado de desarrollo alcanzado en las competencias implicadas de acuerdo a los indicadores de logro correspondientes.

2 Marco teórico

Los tópicos teóricos que atraviesan el trabajo son: el de Resolución de Problemas y el de Modelización Matemática como estrategias de enseñanza, y el de Configuración epistémica/cognitiva como herramienta para valorar la comprensión que logran los estudiantes de los objetos matemáticos puestos en juego. Seguidamente se hace una descripción general de estos conceptos.

La noción de "problema" tiene múltiples acepciones. Al respecto, en Pochulu y Rodríguez [4] resalta el hecho de que:

> *Uno define el concepto de problema para un sujeto, y no simplemente la noción de problema. Esto expresa que lo que para un individuo resulta ser un problema, bien podría no serlo para otro. Esta relatividad al sujeto es una característica inherente al concepto y a la vez empieza a poner de manifiesto la complejidad de su uso en el aula. (p. 155).*

Es decir, reconocer una situación como un "problema" es relativo al sujeto que se enfrenta con ello, por lo tanto el estudiante no conoce en una primera lectura cuál es el camino que debe seguir para resolverlo. Esta incertidumbre lo lleva a explorar distintas estrategias no formalizadas para acercarse a la resolución, las cuales no necesariamente son exitosas o válidas desde el punto de vista matemático. Más allá de esto último, las estrategias (también llamadas heurísticas), están muy presentes en la formación del futuro ingeniero, cuando se enfrenta a una conjetura o una situación a resolver de carácter abierta.

En consecuencia, este tipo de estrategias son las que adquieren especial interés para la alfabetización matemática que se pretende instaurar en los estudiantes con el fin del desarrollo de competencias, intentando que las incorporen, reflexionen sobre ellas, más allá del éxito que alcancen o no en la resolución y con los contenidos matemáticos que hayan sido necesario considerar en la actividad (Pochulu y Rodríguez [4]).

Bassanezi y Biembengut [3] convienen en llamar Modelización Matemática al método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelización, el cual permite abordar situaciones reales que ayudan a comprender los métodos y contenidos de la Matemática (Probabilidad y Estadística para este trabajo en particular), promoviendo la construcción de conocimientos que sirven, además, para mostrar las aplicaciones en otras ciencias.

El vínculo de la Modelización Matemática (MM) con el de Resolución de Problemas (RP) surge naturalmente, porque el estudiante, frente a un problema a modelar, se encuentra con un conjunto de condiciones y elementos iniciales desde los cuales se propone hallar una solución, pero desconoce el camino (y muchas veces los recursos) para su concreción. En este sentido el estudiante necesitará de diferentes estrategias (llamadas "heurísticas" en el enfoque de RP) para la búsqueda de la solución.

El Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino, Batanero y Font [5], como línea teórica y metodológica de la Didáctica de la Matemática, considera que toda práctica o actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (pero en el sentido más amplio de su acepción, los cuales van desde simples ejercicios a instancias de modelación como interés particular) y se pueden encontrar algunos o todos de los siguientes objetos matemáticos primarios:

- Situaciones problemas: Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Constituyen las tareas que inducen la actividad matemática.
- Conceptos: Están dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, lado, perímetro, baricentro, etc.), técnicas o acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.).
- Propiedades o proposiciones: Comprenden atributos de los objetos matemáticos, los que generalmente suelen darse como enunciados o reglas de validez.
- Procedimientos: Comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- Argumentaciones: Se usan para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problema. Pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucran conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de estos elementos.
- Lenguaje: Términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. Si bien en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, en el trabajo matemático pueden usarse otros registros como el oral, corporal o gestual. Además, mediante el lenguaje, sea este ordinario, natural o específico matemático, también se describen otros objetos no lingüísticos.

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (ver Fig. 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero [6]).

Fig. 1. Elementos en una configuración epistémica/cognitiva desde el EOS.

Se evidencia que en las configuraciones epistémicas/cognitivas, las situaciones-problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que aparecen para justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, o combinaciones entre ellos y obviamente, está soportado por el lenguaje.

Así, según el EOS, un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. Es de observar que esta perspectiva es totalmente compatible con la definición adoptada de *competencia* considerada de los documentos del CONFEDI.

3 Desarrollo

La tarea se realiza en el curso de Probabilidad y Estadística del segundo año de las carreras de ingeniería de FRCON-UTN. Se pide realizar un trabajo integrador de aplicación, de libre elección sobre la temática a ser abordada pero condicionado a que: (a) se relacione con una problemática real de su especialidad (civil, eléctrica o industrial) y (b) que se establezcan vínculos con los contenidos trabajados en el curso.

Tomaremos como ejemplo sólo una propuesta presentada por un grupo de tres estudiantes, cuyo enunciado fue el siguiente:

> *A lo largo de la carrera se ha estudiado un componente importante en los circuitos eléctricos: los capacitores. Estos elementos tienen una capacidad o capacitancia que es proporcionada por el fabricante basado en las características constructivas del elemento.*
> *Nos planteamos la siguiente situación problemática: dado un conjunto de capacitores de una determinada marca y características, se desea verificar si esta capacidad dada por el fabricante es correcta o no.*

3.1 Análisis de la modelización del problema

Para el análisis tendremos en cuenta los pasos en un proceso de Modelización Matemática (MM) que marcan Falssetti y Rodriguez [7]:

1. *Análisis de una situación real y su complejidad*
   Los estudiantes consideraron que para el correcto funcionamiento de un circuito (que no se afecten otras componentes, que se filtren las frecuencias correspondientes, entre otros ejemplos), es relevante explorar la confiabilidad en la capacitancia que indica el fabricante.
   Encontraron factible tener acceso a un conjunto de capacitores de un mismo fabricante y de iguales características, por ser materiales de uso frecuente en las materias de formación específica en la especialidad Ingeniería eléctrica.
2. *Simplificación de la situación, elección y control de variables*
   La variable "capacidad del capacitor" fue considerada aleatoria, también se supone independencia en las mediciones, y homogeneidad en las condiciones de las mismas, controlando los instrumentos y equipos. A continuación se tiene un párrafo del trabajo de los estudiantes que hace referencia a estas cuestiones (ver Fig. 2).

> Un primer aspecto relevante a tener en cuenta es la independencia e igualdad de condiciones de los eventos al realizar las mediciones. Por esto es que se utiliza un autotransformador, que brinda una tensión igual y constante para cada uno de los eventos. Vale mencionar también que todos los capacitores son iguales, es decir, del mismo tipo (electrolítico), misma marca, etc.
>
> Se asegura también la aleatoriedad en el muestreo ya que es imposible conocer de antemano si un capacitor tiene la capacidad indicada o no.

Fig. 2. Captura del trabajo realizado por los estudiantes donde se presentan supuestos explícitos para la obtención de las mediciones.

3. *Consideración de supuestos e hipótesis adicionales para dar un enunciado simplificado de la situación*
   Definida la variable aleatoria, realizaron un estudio para ver si podían considerarla como una variable con distribución gaussiana. Esto facilitaría y/o daría mayor precisión en la estimación de la media poblacional utilizando los métodos estadísticos aplicados en clase. El enunciado simplificado resultaría una formulación del tipo: "Se tiene una variable aleatoria que se puede modelar según una distribución normal, de la cual se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño n, se conjetura que la media poblacional es 0.47. Se necesita determinar si los datos muestrales apoyan significativamente esta conjetura".
4. *Resolución del problema simplificado e idealizado. Análisis de los objetos matemáticos introducidos*
   Aquí han planteado el test de hipótesis correspondiente y lo han resuelto considerando un determinado nivel de significación y además contrastando con el cálculo del p-value (o valor p).

5. *Verificación de la adecuación de la solución al problema simplificado respecto a la situación inicial. Análisis de factibilidad. Formulación de predicciones.*
   Una vez que rechazaron la hipótesis nula, según la evidencia obtenida, verificando el cumplimiento de las condiciones de validez del Teorema Central del Límite, construyeron un intervalo de confianza, para tener una referencia concreta de un rango de valores donde esperarían encontrar la media poblacional para este lote de capacitores.
6. *Estudio independiente de los objetos matemáticos introducidos y sus propiedades.*
   No han realizado estudios posteriores, debido a que la presentación y defensa de este trabajo era requisito para la regularización y/o promoción al final del año lectivo.

Se corresponde en una acepción fuerte de modelización ya que la elección del problema no tuvo condicionamiento alguno (salvo los dos requisitos mencionados anteriormente).

3.2 Análisis del diseño del plan

Desde los aportes del enfoque de RP, el diseño del plan de los estudiantes para responder al problema fue el siguiente:

1. Según lo expresado por el fabricante de los capacitores en sus etiquetas, la capacitancia sería de 0.47 μF. Suponiendo que lo hizo adoptando como referencia el promedio de todas las cargas medidas, se podría contrastar esta información a partir de mediciones realizadas al azar de una muestra de este tipo de capacitares.

2. Por lo tanto realizaron los siguientes pasos:

   2.1. Tomaron una muestra aleatoria simple de este tipo de capacitores y midieron las capacitancias de cada uno.

   2.2. Realizaron un análisis exploratorio y aplicaron un test para estudiar la posible normalidad de la variable.

   2.3. De apoyar la conjetura de la normalidad, según el tamaño muestral obtenido, podrían aplicar un test de hipótesis y/o un intervalo de confianza para la media poblacional. Planteando como hipótesis nula que la media poblacional es 0.47 μF, frente a la hipótesis alternativa que es distinta a 0.47 μF.

3. En el caso de rechazar la hipótesis nula, se proponen estimar entre qué valores – según la evidencia tomada – esperarían encontrar la media poblacional del lote de capacitores de donde extrajeron la muestra.

La riqueza en el uso de distintas estrategias vinculadas a objetos de matemática y de estadística se han podido observar principalmente en el apartado 2.2, donde para analizar el supuesto de normalidad han recurrido a:

- Estimar gráficamente la densidad de la variable (ver Fig. 3).

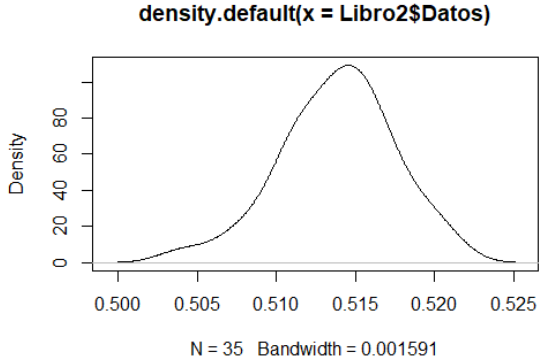


Fig. 3. Estimación gráfica de la densidad del conjunto de capacitancias.

Se puede pensar en la heurística de "considerar el problema resuelto", en el sentido de decir: si la variable fuese normal, al realizar el gráfico de la densidad estimada de la variable se esperaría que quede en forma de campana, con cierta simetría en las colas de la curva, unimodal, en un rango de valores razonables en el eje de las abscisas.

- Indagar autónomamente sobre las condiciones bajo las cuales se aplican los "test de normalidad". En clase, intencionalmente, no se profundizó en el tema, precisamente para dejar la inquietud durante el curso proyectando en la realización de este trabajo final (ver Fig. 4).

```
> shapiro.test(Libro2$Datos)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  Libro2$Datos
W = 0.97648, p-value = 0.6425
```

Fig. 4. Salida del RStudio del resultado del test de Shapiro-Wilk.

- En ciertas instancias, por ensayo y error, han avanzado en el uso del software libre propuesto (no obligatorio) RStudio.

- Explorar, desde la simulación estocástica, con conjuntos de determinadas distribuciones. Se podría pensar en la heurística de trabajar con casos particulares y/o subproblemas vinculados.

En el cierre del trabajo han concluido en rechazar la conjetura inicial de que la media es 0.47 µF, ya que el estadístico de prueba les dió un cuantil muy alto como valor estandarizado en la distribución N(0,1), el valor obtenido fue 71.98, resultando perteneciente a la zona de rechazo (ver Fig. 5).

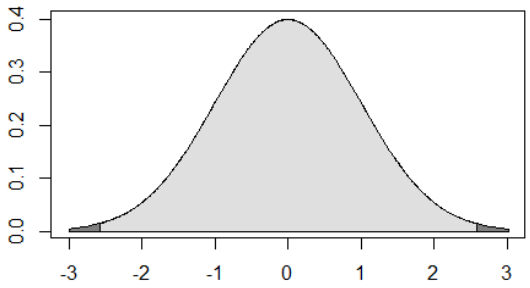


Fig. 5. Representación de la zona de no rechazo en el planteo del test.

Ante el rechazo de la hipótesis nula, los estudiantes realizaron una estimación para la media poblacional de estos capacitores (ver Fig. 6).

Considerando $\alpha = 0{,}01$:

$$0{,}5138 - 2{,}58 * \frac{0{,}0036}{\sqrt{35}} < \mu < 0{,}5138 + 2{,}58 * \frac{0{,}0036}{\sqrt{35}}$$

$$\mathbf{0{,}5122 < \mu < 0{,}5154}$$

Con este resultado entonces se puede decir que, en base a la evidencia muestral, con una confianza del 99%, $0{,}5122\ \mu F < \mu < 0{,}5154\ \mu F$.

Fig. 6. Captura del trabajo realizado por los estudiantes donde se construye un Intervalo de Confianza para la media poblacional.

3.3 Objetos matemáticos primarios puestos en juego en la resolución

Desde el EOS, podemos detallar algunos elementos primarios que se pusieron en juego, a saber:

- *Conceptos:* Aleatoriedad. Parámetros y estadísticos. Distribución muestral de un estadístico. Distribución normal. Medidas descriptivas. Representaciones gráficas. Nivel de significación de un test de hipótesis.
- *Propiedades o proposiciones:* distribución de la media muestral. Estandarización de una variable. Comportamiento de los estadísticos en la exploración de la normalidad de la variable. Disposición, bajo normalidad, de la representación gráfica de la densidad estimada.
- *Procedimientos:* construcción e interpretación de gráficos. Cálculo de medidas descriptivas. Uso del software RStudio. Construcción de un intervalo de confianza.
- *Argumentaciones:* conclusiones tomadas del estudio exploratorio para la normalidad de la variable. Determinación e interpretación del rechazo de la hipótesis nula.
- *Lenguaje: s*e reconocen formulaciones algebraico – simbólicas, lenguaje coloquial en formulaciones y conclusiones, representaciones gráficas.

3.4 Proceso de evaluación

Respecto al desarrollo de la competencia en estudio, siguiendo a Santos [8], tomar la Resolución de Problemas como una competencia, lleva a entender la Matemática en un contexto concreto (en este caso del campo disciplinar de la ingeniería eléctrica), desarrollar habilidades (como el uso de un lenguaje de programación) para comprender conceptos y aprender específicamente a resolver problemas matemáticos. Consecuentemente, la evaluación indudablemente se entiende como un proceso, con revisiones permanentes en función de los resultados de aprendizajes y propósitos propuestos. No se trata sólo de acreditar saberes sino también de promover la toma de conciencia de su propio proceso de aprendizaje y contribuir al desarrollo de su autonomía. Por esta razón se ha utilizado como instrumento una rúbrica con el fin de comunicar a los estudiantes los resultados de aprendizaje esperados, proporcionar un instrumento para informar sobre su progreso y juzgar el producto final en términos del grado de lo que se esperaba de la tarea pedida. En definitiva, acordando con Blanco Blanco [9], durante todo el proceso de la entrega de los avances y horarios de seguimiento de los trabajos, se fue evaluando en forma conjunta y colaborativa con la siguiente rúbrica (véase Tabla 1).

Tabla 1. Rúbrica utilizada por el equipo docente durante las instancias de evaluación del proceso.

Etapa	Excelente	Satisfactorio	Mejorable	Insuficiente
Comprensión del problema	Analiza, reconoce e interpreta correctamente los datos. Identifica con claridad qué se busca. Se evidencia una absoluta comprensión del problema	Analiza, reconoce e interpreta los datos. Identifica qué se busca. Se evidencia una comprensión del problema	Reconoce los datos e interpreta la relación entre ellos. Evidencia una comprensión elemental del problema.	Puede reconocer los datos pero no la relación entre ellos aún en el contexto del problema. La comprensión del problema es deficiente.
Diseño del plan	Utiliza estrategias y métodos pertinentes. Considera modelos adecuados y supuestos.	Utiliza estrategias y métodos pertinentes. Considera modelos adecuados	Explora estrategias y métodos revisando la pertinencia. No se evidencia dominio de los métodos y teoría	Se observan problemas de inchoerencia entre las estrategias y las interpretaciones (por ejemplo)

Realización del plan	Utiliza adecuada y rigurosamente los distintos registros de trabajo (gráfico, numérico, analítico, tabular). Realizan cálculos correctos y coherentes.	Utiliza adecuadamente los distintos registros de trabajo. Realiza cálculos correctos.	No utiliza todos los registros de trabajo. Tiene algunos errores de cálculo.	Presenta errores de cálculos. No es adecuado el uso de los registros de trabajo.
Validación, argumentación, evaluación	Aporta significativamente a la solución del problema. Reflexiona sobre la solución hallada. Revisa el proceso y rectifica de ser necesario.	Aporta a la solución del problema. Reflexiona sobre la solución hallada.	Aporta a la solución del problema, sin realizar un análisis crítico de la solución hallada.	No es significativa la solución hallada.

4 Conclusiones

En esta experiencia se ha evidenciado fuertemente la retroalimentación entre las etapas que implica la resolución en un problema (en términos didácticos), si bien es conocido que no se espera una linealidad, el hecho de plantear la situación problemática sin ninguna referencia secuenciada de cómo resolverla ha llevado a los estudiantes a la necesaria revisión integral de los contenidos del curso. Este aspecto es muy relevante, pues permite vivenciar un proceso similar al desempeño profesional en cada especialidad de la ingeniería. Es decir, la competencia específica de resolver problemas asociada a la metodología de la modelización matemática, aporta significativamente a la formación de los estudiantes tanto para las materias específicas como para el futuro desempeño laboral, puesto que los pasos en el proceso de modelación tienen considerables analogías con la modelación en ingeniería y en las ciencias aplicadas en general. Se generan permanentemente situaciones problemáticas en cada etapa e incluso en las relaciones entre ellas.

En cuanto a la implementación del software (en este caso el lenguaje de programación R en la interface RStudio) no implicó grandes dificultades porque ya han tenido contacto con otros lenguajes (como Python) entonces sólo les restaba familiarizarse con la nueva sintaxis.

Por último se destaca la motivación que se observaba en la realización de la tarea, en los intercambios grupales y personales, en el reconocimiento como propio del problema planteado (pues ellos mismos fueron quienes lo propusieron). El uso de la rúbrica como instrumento de evaluación fue más que pertinente, principalmente por el sentido de orientar los aspectos en los cuales se debía focalizar en función de los objetivos y resultados de aprendizaje esperados.

Referencias

1. CONFEDI: *Competencias en ingeniería*. Universidad FASTA (2014).
2. CONFEDI: *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la república argentina.* Universidad FASTA (2018).
3. Bassanezi, R.; Bienbengut, V.: Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un método de enseñanza. *Números*, Vol. 32, pp. 13-25 (1997).
4. Pochulu, M.; Rodríguez, M. (Comps.): *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS y EDUVIM (2012).
5. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V.: The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, Vol. 39, No. 1-2, pp. 127-135 (2007).
6. Godino, J.; Batanero, C.: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, No. 3, pp. 325-355 (1994).

7. Falsetti, M. C.; Rodríguez, M. A.: A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, 24, No. 1, pp.14-28 (2005).
8. Santos, L.M.: El papel de la Resolución de problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza. *Revista Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Vol. 7, No. 10, pp. 151-163 (2012).
9. Blanco Blanco, A.: Las rúbricas: un instrumento útil para la evaluación de competencias. Prieto Navarro L. (Coord.): *La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje.* Octaedro/ICE UB, pp. 171-188 (2008).

XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

Caracterización de argumentos utilizados en libros de texto de Álgebra Lineal sobre tópicos vinculados con transformaciones lineales

Gagliardo, Alejandra[1], Montenegro, Fabiana[1]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Dirección postal: 3000
{alejandragagliardo@gmail.com, montenegrofg@gmail.com}

Resumen. En este trabajo se analizan tres libros de textos de Álgebra Lineal para carreras de ingeniería en la unidad "Transformaciones Lineales", con el objetivo de describir y comparar las configuraciones epistémicas presentes en ellos, adoptando como marco teórico y metodológico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, elaborado por Godino, Batanero y Font. En general, las configuraciones epistémicas presentan situaciones-problemas en contextos intramatemáticos, están escritos en un lenguaje que involucra expresiones matemáticas, relacionadas con los objetos matemáticos estudiados. El significado institucional que se deriva intenta favorecer la integración de los objetos primarios propios de los tópicos vinculados con las transformaciones lineales con objetos primarios como sistemas de ecuaciones, matrices, polinomios, etc. De esta manera, involucra habilidades tales como el razonamiento, la argumentación y la resolución de problemas al momento de enfrentar situaciones que implican estos objetos matemáticos.

Palabras Clave: Caracterización de argumentos, Álgebra lineal, Transformaciones lineales, Libros de texto, Enfoque Ontosemiótico.

1 Introducción

Aunque actualmente se cuenta con diversos materiales que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (softwares, Moodle, etc.), los libros de texto siguen siendo una de las herramientas más valiosas con las que cuenta el profesor y el alumno, puesto que estos representan una guía de cómo abordar un determinado tema. En éstos se presenta una organización de la enseñanza que procura estar actualizada, debido a que pueden ser objeto de estudio, material de consulta, registro de las actividades del alumno, colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver (González y Sierra [1]). En este mismo sentido, Navarro [2] afirma que "el libro de texto es un medio de comunicación que impone saberes, pero, además, es un apoyo para facilitar la enseñanza aprendizaje de individuos, pues este debe estar fuertemente influenciado por el currículum escolar vigente" (p.5).

Para algunos, la actividad de analizar libros de texto, puede ser una tarea trivial. Sin embargo, algunas investigaciones (Font y Godino [3]; Barrantes, López y Fernández [4]; Guillén, Gonzáles y García [5]), muestran que no siempre los profesores desarrollan la competencia en análisis didáctico y, en consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc.

Analizando el contexto de alumnos de primer año de universidad que, probablemente, no debieron validar sus razonamientos matemáticos en la educación secundaria y que se encuentran por primera vez en contacto directo con libros de texto universitarios en el proceso de aprendizaje de matemática, surgen los siguientes interrogantes: ¿qué características tienen las configuraciones epistémicas que emergen de las tareas de validación de los libros de textos de Álgebra Lineal?, estas tareas ¿potencian la actividad de argumentar que se espera desarrollen los estudiantes en sus estudios superiores?, ¿se evidencia complejidad en la manera de argumentar en los diferentes

tópicos y en los diferentes libros?, ¿es posible caracterizar el significado institucional pretendido en cada texto?

La presente ponencia, que corresponde al Trabajo Final Integrador (TFI) de la carrera Especialización en Didáctica de la Matemática, se focaliza en evaluar si los argumentos, a propósito de una tarea de álgebra lineal, habilitan o no la emergencia de otros objetos primarios de una configuración epistémica de tópicos específicos de transformaciones lineales, así como los vinculados con espacios vectoriales.

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), elaborado por Godino, Batanero y Font [6], aporta herramientas para un análisis descriptivo de los libros de texto, puntualizando y comparando las configuraciones epistémicas y permitiendo caracterizar el significado institucional pretendido en ellos.

Cabe destacar que, tanto la tesista como la directora del TFI se desempeñan como docentes de la asignatura "Álgebra Lineal" de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral para todas las carreras de Ingeniería. Por lo tanto, se eligieron tres libros a los cuales los alumnos tienen acceso a través de la biblioteca de la unidad académica mencionada, uno de los cuales constituye la bibliografía base de la cátedra. El libro utilizado por la Cátedra es Grossman [7] y los demás libros, que serán objeto de análisis, son Nicholson [8] y Kozak, Pastorelli y Vardanega [9].

Las conclusiones que se derivan de este trabajo nos aportan, a los docentes de carreras universitarias no matemáticas, indicios procedentes de la Didáctica de la Matemática, a la hora de seleccionar la bibliografía en la asignatura Álgebra Lineal.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas que dieron sustento a esta ponencia.

2 Antecedentes

Godino y Arrieche [10] presentaron el modelo teórico que designaron como "semiótico-antropológico" para la Didáctica de las Matemáticas y a partir de éste, desarrollaron la técnica del análisis semiótico, la cual les permitió caracterizar los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático y los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática. Así, dicho análisis proporcionó una herramienta para identificar conflictos semióticos potenciales en la interpretación de un texto usado en un proceso de estudio, o conflictos que tienen lugar en la realización efectiva de una interacción didáctica. En este orden de ideas, los autores presentaron un ejemplo perteneciente al bloque de contenido "conjuntos y operaciones" donde asignaron una categoría para cada Sección, las cuales fueron consideradas como unidades de análisis. En dicho trabajo lograron presentar un resumen de los principales conflictos semióticos encontrados en la Sección del texto que fue objeto de estudio. Además, llegaron a la conclusión de que este tipo de estudio es necesario porque permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica.

Villella [11] en su libro "Matemática escolar y libros de texto: un estudio desde la Didáctica de la Matemática", hizo alusión a otras formas de analizar el hecho educativo. Su originalidad radicó en la óptica con la que analizó la relación entre enseñar, seleccionar y emplear libros de texto en Matemática. El lector encuentra material teórico de soporte a las conclusiones presentadas, instrumentos de recolección de datos y el proceso de una investigación llevada en el ámbito de la ciudad de Buenos Aires, monitoreada por las autoridades de la Escuela de Humanidades de la Universidad Nacional de San Martín (Argentina) y de la Universidad de Huelva (España).

Un trabajo de Montiel y colaboradores [12] emplearon el enfoque ontosemiótico para analizar sistemas de coordenadas en el contexto del cálculo multivariado, a través del proceso de cambio de base (desarrollado en álgebra lineal).

Rivera [13] realizó un análisis de un libro de cálculo aplicado que se utiliza en el segundo semestre de una institución del nivel superior en Sonora (México), donde ejecutó un análisis ontosemiótico para recopilar información importante que permite determinar si el libro cumple con los significados institucionales en el contexto de la asignatura y estableció si hay vacíos en el material y posibles conflictos semióticos. En los resultados se identificaron buenos elementos gráficos, verbales y simbólicos que orientan al lector a comprender cómo los autores plantean el área de la región. Sin embargo, el análisis del sistema de prácticas, le permitieron detectar los posibles conflictos semióticos que puedan surgir del análisis de las configuraciones. Un ejemplo de ellos, es que algunas figuras no señalan la notación para las áreas, o utilizan expresiones como "por supuesto" dando por sentado que se da por entendido lo que se está expresando.

El trabajo de Arana [14] tuvo como objetivo diseñar y analizar una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia a través de configuraciones epistémicas, con el fin de identificar posibles conflictos semióticos.

Más específicamente, la propuesta fue la creación de un nuevo libro de texto para la enseñanza de la circunferencia y otros conceptos relacionados, utilizando los constructos teóricos del EOS. Para realizar el análisis de la propuesta didáctica, se dividió el texto en nueve unidades de análisis con el fin de identificar en cada una de ellas, los 6 objetos primarios que distingue el EOS: (1) situaciones, (2) lenguaje, (3) conceptos, (4) procedimientos, (5) proposiciones y (6) argumentos; así como las relaciones que estos mantienen formando configuraciones epistémicas. De esta manera, el autor se aseguró que las actividades propuestas en el texto promovieran la aparición coherente y sistemática de los objetos primarios.

Cruz, Gea y Giacomone [15], analizaron y clasificaron investigaciones e innovaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial, en su faceta epistémica, prestando mayor atención a la visualización de figuras de tres dimensiones. A partir de esto, propusieron una tabla con indicadores de idoneidad epistémica particularizando indicadores específicos sobre los procesos de estudio de la geometría espacial en educación primaria. Posteriormente, se implementaron estos criterios para valorar la idoneidad epistémica de los documentos curriculares chilenos sobre la enseñanza de la geometría en educación básica. Asimismo, este instrumento teórico y metodológico se estima sea utilizado por el profesorado para orientar el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la geometría espacial, siendo una herramienta de reflexión sobre su propia práctica y, por tanto, para lograr mejoras progresivas en la misma.

Por otra parte, en su tesis de maestría Jiménez Consuegra [16] se propuso realizar un estudio sobre la resolución de problemas que implican el cálculo de áreas de figuras compuestas. En particular analizó los contenidos presentados en los libros de textos para el tratamiento de este concepto, poniendo atención en la estructura de las situaciones- problemas y los objetos primarios puestos en juego. Por tal razón, el objetivo general fue valorar la idoneidad epistémica de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en libros de texto de segundo de secundaria. Los lineamientos teóricos y metodológicos de la investigación estuvieron basados en el EOS.

Un trabajo de Vargas y colaboradores [17] presentaron un estudio del significado sobre derivada que se manifestó en las tareas de libros de texto de 1º de Bachillerato. Para ello, establecieron un marco teórico que consideró aspectos de significado, de enseñanza y de aprendizaje. Para ello, establecieron variables de análisis a priori y utilizaron el análisis de contenido como método de análisis de libros de texto de tres editoriales. Los resultados mostraron el predominio, en los tres libros, de ciertas características de las tareas, por ejemplo, la presencia de la derivada principalmente dentro de situaciones matemáticas y la importancia dada a las reglas de derivación frente a otros aspectos.

En su tesis doctoral, Molina Jaime [18] investigó formas de empoderar a los profesores para que apoyen a sus estudiantes a participar de manera significativa en procesos de argumentación, teniendo en cuenta los constructos elaborados por EOS. Dentro de los resultados del estudio se destacan los diferentes tipos de argumentos presentes en cada tipo de situación instruccional y las diversas maneras en que cada tipo de argumento articula objetos de la configuración ontosemiótica a la que pertenece.

3 Enfoque Ontosemiótico

Este trabajo considera como marco teórico el EOS. El mismo es un sistema modular que se ha venido desarrollando desde la década de los 90 en España por el Dr. Godino y colaboradores en el seno del grupo de investigación denominado "Teoría de la Educación Matemática", de la Universidad de Granada, cuyo propósito está en la articulación de diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Siguiendo a Godino, Batanero y Font [19], los postulados del EOS se relacionan principalmente con la Antropología, la Ontología y la Semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos, donde se asume que la Matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados.

El EOS es un marco teórico amplio que organiza, unifica y clarifica nociones de otras teorías, enfoques y modelos con el fin de describir e investigar, de forma holística, los procesos de aprender y enseñar matemáticas.

Para el EOS la idea de *significado* no se asocia exclusivamente a una definición, debido a que se considera que está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución. Por tanto, hablar de significado es referirse a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación a dichos objetos, es decir, el significado es el conjunto de prácticas operativas y discursivas puestas en juego al resolver una situación- problema [6].

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales compartidas,

las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. (p. 334) [6]

Es decir, desde la postura de EOS, cuando se habla de institución no se está haciendo alusión a la escuela/universidad en donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje, pero si a los sujetos que intervienen en el mismo, como el profesor, el texto, etc.

En el EOS, los "objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo." (p. 2) [20]

El EOS denomina práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otros, validarla o generalizarla [6]. Sin embargo, en el estudio de la matemática no interesa la práctica de una persona ante un problema concreto, sino el sistema de prácticas operativas y discursivas (significado) que lleva adelante una persona o que se comparten en una institución. Se distingue, así, el sistema de prácticas que realiza una persona, denominado *significado personal*, del que es compartido entre personas involucradas en la misma clase de situaciones problemáticas, conocido como *significado institucional*. [21]

A su vez existe una subclasificación de las dos categorías de significados mencionadas. Los *significados institucionales*, según Godino, Batanero y Font [22], pueden ser de cuatro tipos:

● *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
● *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
● *Implementado*: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
● *Evaluado*: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Los *significados personales* pueden ser de tres tipos:

● *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
● *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
● *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

La relación entre estos tipos de significados puede verse en la Figura 1 (p. 13) [23]:

Figura 1. Significados como sistemas de prácticas.

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. El EOS define seis *objetos primarios*: el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos, las situaciones y los argumentos que validan las proposiciones y procedimientos.

El lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) viene dado en forma escrita o gráfica en los libros de texto, aunque en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

El concepto de un objeto matemático (número, punto, recta, media, función, etc.) consiste en su definición o descripción.

Las proposiciones de los objetos mencionados suelen proporcionarse como propiedades o enunciados.

Los procedimientos, técnicas o acciones refieren a operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos realizados por el sujeto al enfrentarse a las tareas matemáticas.

Las situaciones-problemas son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extramatemáticas como intramatemáticas, que componen las tareas que provocan la actividad matemática.

Los argumentos se usan para validar y explicar las proposiciones ya sean deductivas o de otro tipo.

Estos seis objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (Figura 2), cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático" [24]. Es decir, que la configuración epistémica permite dar cuenta de los objetos primarios que están presentes en un texto de matemáticas y el modo en que se articulan.

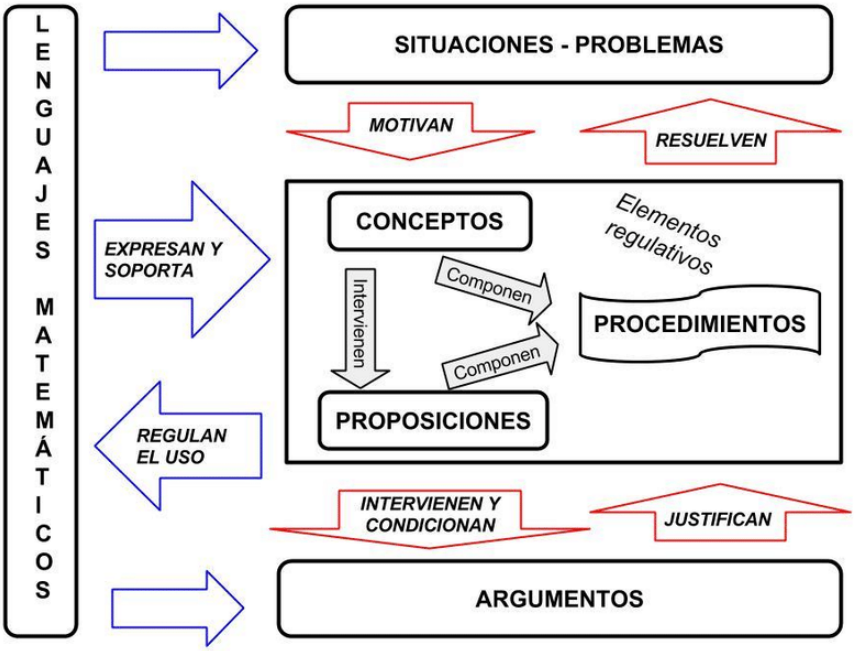


Figura 2. Configuración Epistémica.

4 Objetivos

El objetivo general de este trabajo de reflexión y análisis es caracterizar las distintas argumentaciones que se proponen en los ejemplos y ejercicios que se presentan en los libros de texto de Álgebra Lineal para carreras de ingeniería en relación al tópico transformaciones lineales.

Los objetivos específicos son:

● Describir y comparar las configuraciones epistémicas presentes en los ejemplos y ejercicios de libros universitarios sobre transformaciones lineales.

● Analizar el significado institucional pretendido en los libros de texto

5 Metodología

El tipo de estudio que se presenta es cualitativo y descriptivo (analítico-comparativo). Para la realización del análisis de los libros de textos se implementó en particular, la noción de configuración epistémica para identificar los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje) que se ponen en juego en los ejemplos y ejercicios de validación, demostración y argumentación en dichos libros.

Por otra parte, los libros fueron seleccionados teniendo en cuenta que estén al alcance de los alumnos pues pertenecen a la biblioteca de la facultad mencionada y que sean libros de textos para carreras en las que las matemáticas son una herramienta y no el objeto específico de estudio.

6 Análisis de los libros

Los libros elegidos para el trabajo son Grossman [7], Kozak *et al.* [9] y Nicholson [8] que contienen la unidad de Transformaciones Lineales en los capítulos 7, 9 y 8 respectivamente.

Llamamos Libro 1 al libro de Grossman, Libro 2 al libro de Kozak *et al.* y Libro 3 al libro de Nicholson.

En el análisis de cada libro se consideraron las siguientes características:

- Aspectos generales del libro: una descripción, extraída de la presentación de cada libro de texto, ubicado el número de tareas propuestas para el contenido objeto de estudio, la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, etcétera) y el tipo de tareas que proponen planteadas en estos textos.
- Identificación de los objetos primarios en la resolución de las tareas. Se presentan las consignas de las situaciones-problemas y una resolución a nivel experto de las mismas (mejor resolución que podría realizar un estudiante de ese curso o nivel), donde se enfatizan los objetos primarios que intervienen [3].
- La configuración epistémica del conjunto de tareas del libro que resulta del análisis del modo en que se articularon los objetos primarios.

Teniendo en cuenta el objetivo principal de este trabajo y, además, por cuestiones de espacio, no se detallará el análisis de cada libro sino sólo la configuración epistémica de cada libro.

6.1 Configuraciones epistémicas

6.1.1 La configuración epistémica del conjunto de tareas del Libro 1

La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes de los ejemplos y ejercicios escogidos para el Libro 1 (Figura 3):

Situaciones Problemáticas: Las situaciones pertenecen a un contexto intramatemático, donde se solicita determinar si la transformación dada es lineal y si además es un isomorfismo. Además se solicita determinar el núcleo e imagen de la transformación y su matriz asociada.
Lenguaje: se utiliza lenguaje coloquial y simbólico.
Conceptos: definición de transformación lineal, igualdad de vectores, suma de vectores y producto de un vector por un escalar, núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal, valor absoluto, matriz nula, matriz transpuesta, matriz simétrica y antisimétrica, igualdad de polinomios, matriz asociada a una transformación lineal, base canónica de R^3, función uno a uno, función sobreyectiva, isomorfismo y espacios isomorfos.
Propiedades: operaciones entre matrices y entre matrices y vectores. Operaciones entre matrices transpuestas. Propiedades de valor absoluto, Teoremas 7.3.1 y 7.3.2. El vector de coordenadas de cualquier vector con respecto a la base canónica de R^n ($n \in N$) es el mismo vector. Teoremas 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3 y 7.4.6.
Procedimientos: Verificación de las condiciones de linealidad. Cálculo de núcleo e imagen de T. Cálculo de dos vectores que satisfacen la ecuación de un plano, la igualdad de polinomios. Cálculo de la matriz asociada a la transformación lineal.
Argumentos: - *Basado en un concepto:* las definiciones de transformación lineal, de núcleo e imagen, de igualdad de vectores, de igualdad de polinomios, dimensión de un espacio vectorial. Dos elementos distintos tienen la misma imagen. - *Basado en una propiedad***:** toda matriz A de mxn se puede utilizar para definir una transformación lineal de R^n en R^m y que toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz. Una función lineal es una transformación lineal si y sólo si la ordenada al origen es cero. - *Basado en un procedimiento:* Cálculos.

Figura 3. Configuración epistémica para el Libro 1.

6.1.2 La configuración epistémica del conjunto de tareas del Libro 2

La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes de los ejemplos y ejercicios escogidos para el Libro 2 (Figura 4).

Situaciones Problemáticas: El contexto de las tareas propuestas es igual al del Libro 1.
Lenguaje: se utiliza lenguaje coloquial, simbólico y, en menor medida, el lenguaje gráfico
Conceptos: igualdad de vectores, suma de vectores y producto de un vector por un escalar, valor absoluto. Base canónica de R^2 y R^3, transformación lineal. Domino y codominio de una transformación lineal, núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Vector de coordenadas. Monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo y automorfismo.
Propiedades: igualdad de vectores, producto de vectores, producto de un vector por un escalar, propiedades de valor absoluto.
Procedimientos: Verificación de las condiciones de linealidad. Cálculo de núcleo e imagen de T. Cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal.
Argumentos: - Basado en un concepto: las definiciones de transformación lineal, de núcleo e imagen, de igualdad de vectores, de igualdad de polinomios, dimensión de un espacio vectorial. Dos elementos distintos tienen la misma imagen. *- Basado en una propiedad:* Teorema de la dimensión *- Basado en un procedimiento:* Cálculos de elementos particulares y de espacios vectoriales.

Figura 4. Configuración epistémica para el Libro 2.

6.1.3 La configuración epistémica del conjunto de tareas del Libro 3

La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes de los ejemplos escogidos para el Libro 3 (Figura 5).

Situaciones Problemáticas: El contexto de las tareas propuestas es igual al de los Libros 1 y 2.
Lenguaje: se utiliza lenguaje coloquial y simbólico.
Conceptos: Definición de traza, de matrices simétricas y antisimétricas, matrices traspuestas. Transformación lineal. Núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Inyectiva, suprayectiva, isomorfismo.
Propiedades: operaciones entre matrices, propiedades de matrices antisimétricas. Teorema 2. Teorema de la dimensión. Teorema 3.
Procedimientos: Verificación de las condiciones de linealidad. Cálculo de núcleo e imagen de T. Cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal.-
Argumentos: - Basado en un concepto: las definiciones de transformación lineal, de núcleo e imagen, de igualdad de vectores, de igualdad de polinomios, dimensión de un espacio vectorial. *- Basado en un procedimiento:* cálculos.

Figura 5. Configuración epistémica para el Libro 3.

7 Resultados y Conclusiones

En forma general, las configuraciones epistémicas de los tres libros de texto (Figuras 3, 4 y 5) presentan *situaciones-problemas* en contextos intramatemáticos, están escritos en un lenguaje que involucra expresiones matemáticas, relacionadas con los objetos matemáticos estudiados. Además, se transita entre los lenguajes simbólicos, verbales y, en menor medida, gráficos, que expresan y soportan las reglas que se necesitan para la solución de las tareas.

En cuanto al conjunto de reglas los tres libros, ponen en juego *conceptos, propiedades y procedimientos* relacionados con la linealidad, núcleo e imagen de una transformación lineal, transformaciones lineales inyectivas, sobreyectivas e isomorfismos.

Es posible mencionar algunas de las diferencias que resultan de la descripción de los textos:

- Kosak *et al*. y Nicholson usan, permanentemente en los ejemplos que desarrollan, los cuantificadores universales, mientras que en Grossman no aparecen estos símbolos.
- Una diferencia notable entre Grossman con respecto a los Kosak et al. y Nicholson es que en algunos ejemplos exhibidos en éstos dos se presentan no sólo una resolución algebraica, sino que se consignan interpretaciones geométricas importantes de los objetos matemáticos involucrados.
- Sólo Kosak *et al*. denota con dominio y codominio a los espacios vectoriales de salida y de llegada de las transformaciones lineales. En contrapartida, Grossman y Nicholson usan siempre la notación T: V→W aclarando que V y W son espacios vectoriales.
- Kosak *et al*. y Nicholson acompañan las definiciones de núcleo y conjunto imagen de una transformación lineal con un diagrama de Venn que indica las relaciones de inclusión entre los espacios vectoriales involucrados.

La noción de significado que se usa en este trabajo no es la del sentido habitual de la misma como definición de un objeto, sino la idea de significado para el marco teórico elegido. Para éste el significado de un objeto está asociado al conjunto de prácticas operativas y discursivas puestas en juego al emplear dicho objeto en la resolución de una situación-problema. De este modo, puede afirmarse que el significado institucional que se deriva de los libros seleccionados intenta favorecer la integración de los objetos primarios propios de los tópicos vinculados con las transformaciones lineales con objetos primarios previamente abordados como sistemas de ecuaciones, matrices, polinomios, etc.

De esta manera, involucra habilidades tales como el razonamiento, la argumentación y la resolución de problemas al momento de enfrentar situaciones que implican estos objetos matemáticos. Mayoritariamente en los ejemplos seleccionados de los tres libros, los argumentos están basados en conceptos y propiedades. Por tanto, las tareas propician procesos de argumentación.

Es preciso resaltar, que conocer el significado pretendido de un contenido matemático a través de los ejemplos que se presentan en libros de texto permite conocer y profundizar en el significado de referencia de dicho contenido y, de ese modo, considerar que dicho significado esté presente en los ejercicios o tareas que se propondrán para la resolución de los alumnos.

Referencias

1. Gonzáles, M. T.; Sierra, M.: *Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria En España Durante el Siglo XX*. Enseñanza de las Ciencias*, 22*(3), 389- 408. (2004).
2. Navarro, C.: *Libros mexicanos de textos gratuitos, reforma 2011: el caso de los números naturales y números fraccionarios* (Tesis doctoral). México: Universidad Autónoma de Guerrero (2015).
3. Font, V.; Godino, J. D: *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores*. Revista Educação Matemática Pesquisa, 8(1), 67-9. (2006).
4. Barrantes, M.; López, M.; Fernández, M.: *Análisis de las Representaciones Geométricas en los Libros de Textos*. PNA, 9(2), 107-127 (2015).
5. Guillén Soler, G.; Gonzáles Quiza, E.; García Moreno, M. A.: *Criterios Específicos Para Analizar la Geometría en Libros de Texto Para la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria. Análisis Desde los Cuerpos de Revolución.* En Gonzáles, J.; Gonzáles, M.; Murillo, J. Investigación en Educación Matemática XIII (pp.247- 258). Santander: SEIEM (2009).
6. Godino D, J.; Batanero, C.: *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355 (1994).
7. Grossman, S. I.; Flores Godoy, J. J.: *Álgebra Lineal, 7ma Edición.* México, D.F., México, Editorial McGRAW- HILL/ INTERAMERICANA EDITORES, SA. De C.V (2012).
8. Nicholson, W. K.: *Álgebra Lineal con Aplicaciones, 4ta Edición.* Madrid, España, Editorial McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, SA. de C.V (2003).
9. Kosak, A. M.; Pompeya Pastorelli, S.; Vardanega, P. E.: *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. Buenos Aires, Argentina, Editorial McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.U (2007).
10. Godino, J.; Arrieche, M.: *El Análisis Semiótico como Técnica Para Determinar Significados.* Granada, España: Universidad de Granada (2001).
11. Villella, J.: *Matemática escolar y libros de texto. Un estudio desde la Didáctica de la Matemática.* Madrid, España, Editorial UNSAM EDITA (2007).

12. Montiel, M.; Wilhelmi, M. R.; Vidakovic, D.; Elstak, I.*: Vectors, change of basis and matrix representation: onto-semiotic approach in tehe analysis of creating meaning.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43 (1), 11-32 (2012).
13. Rivera, S.: *Análisis ontosemiótico del área bajo la curva como introducción a la Integral Definida*. Ciudad Obregón, Sonora.: IPSON educar para Transcender (2016).
14. Arana, R.: *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia*. Ciudad Obregón, México: ITSON Educar para Enseñar (2016).
15. Cruz, A.; Gea, M.; Giacomone, B.: *Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria.* Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (pp. 1-10). Granada, España: Universidad de Granada (2017).
16. Jiménez Consuegra, M. A.: *Idoneidad epistémica de tareas sobre cálculo de áreas de figuras compuestas en textos de secundaria.* Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero Centro de Investigación en Matemática Educativa Maestría en Ciencias. Área: Matemática Educativa (2018)
17. Vargas, M. F.; Fernández-Plaza, J. A.; Ruiz-Hidalgo, J. F.: *Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada*. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L.; Muñiz-Rodríguez, A.; Aguilar-González, P.; Alonso, F. J.; García, A. Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 594-603). Gijón: SEIEM (2018).
18. Molina Jaime, Ó. J.: *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación.* Tesis doctoral dentro del programa de Doctorado en Educación Matemática para aspirar al grado de Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos. Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos (2019).
19. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V.: *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135 (2007).
20. Godino, J. D.; Font, V.: *Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas*. Anexo al artículo Godino, J. D.: *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(23), 237-284 (2002).
21. Godino, J.: *Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática*. Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Granada. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html (2017).
22. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V.: *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10, 7-37 (2008).
23. Godino, J. D.: *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Universidad de Granada (2014).
24. Ramos, A.B.; Font, V.: *Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemi*ótica. Matemáticas y su enseñanza, 20(4), 535-556 (2006).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando el método PRISMA

Montenegro, Fabiana[1], Gagliardo, Alejandra[1], Demarchi, Analía[2]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Dirección Postal: 3000
{montenegrofg@gmail.com, alejandragagliardo@gmail.com}
[2] Departamento de Formación Básica, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Dirección postal: 3000
demarchi.analia@gmail.com

Resumen. El trabajo presenta los primeros avances de un trabajo interdisciplinario llevado a cabo por un equipo de docentes de Matemática y Letras perteneciente a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. El objetivo principal es realizar una revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando la metodología PRISMA, con el fin de relevar estudios significativos en torno al abordaje de temas de enseñanza específicos en matemáticas, como lo es la elaboración de justificaciones o argumentaciones, a partir de un abordaje lingüístico. Los primeros resultados permitieron establecer una clasificación en tres grupos temáticos principales; por otra parte, revelaron una existencia relativamente reciente y escasa de trabajos interdisciplinarios sobre la temática abordada.

Palabras Clave: Revisión sistemática, Método prisma, Argumentación matemática, Lenguaje natural.

1 Introducción

La siguiente ponencia presenta los primeros avances de un trabajo interdisciplinario llevado a cabo por un equipo de docentes de Matemática y Letras perteneciente a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. La propuesta se inserta en el marco del Proyecto CAI+D 2020: "Estrategias de explicación y argumentación en el discurso de la matemática. Recursos lingüísticos de la oralidad y la escritura empleados para la enseñanza y el aprendizaje en los primeros años de carreras de ingeniería". El mismo posee dos objetivos centrales: primeramente, describir los modos empleados por expertos y legos para desarrollar explicaciones y argumentaciones, identificando los aspectos que presentan mayor dificultad, tanto en el discurso oral como escrito; y, posteriormente, elaborar propuestas de enseñanza a desarrollar dentro de cada asignatura (Comunicación Oral y Escrita y las distintas cátedras de Matemáticas) que favorezcan el desempeño de los estudiantes.

Uno de los intereses que han surgido en el marco del Proyecto CAI+D es realizar un análisis más exhaustivo de la literatura científica existente en torno a la problemática abordada, que posibilite sintetizar los estudios más relevantes y poner en discusión los diversos resultados y aportes. Este proceso será de gran utilidad para medir el alcance, límites y nuevas líneas de trabajo a continuar en nuestra investigación.

Particularmente, nos hemos propuesto realizar una revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando la metodología PRISMA, con el fin de relevar estudios significativos en torno al abordaje de temas de enseñanza específicos en matemáticas, como lo es la elaboración de justificaciones o argumentaciones, a partir de un abordaje lingüístico.

Cabe aclarar que el presente estudio se encuentra en una etapa preliminar de delimitación de la metodología a

aplicar en la preselección bibliográfica, así como los criterios de inclusión/exclusión a aplicar en la selección final.

El trabajo está basado en las contribuciones sobre el tema de Urrútia y Bonfill [1], Moher et al. [2], Hutton et al. [3], Page et al. [4], Yepes-Núñez et al. [5]. Un aporte de interés significativo es la propuesta metodológica para la revisión sistemática en el ámbito de la ingeniería de Blanco et al. [6], que constituye una adaptación del método PRISMA a un contexto científico similar o cercano al nuestro.

En el apartado 2 se describe el método PRISMA. En el tercero se enumeran los resultados de la aplicación de este proceso a la revisión bibliográfica que nos propusimos y, finalmente, en el último apartado se mencionan algunas conclusiones sobre las investigaciones abocadas a la argumentación en vinculación con el lenguaje natural.

2 Método PRISMA

Una *revisión sistemática* pretende cotejar todas las pruebas relevantes, las cuales cumplen ciertos criterios de elegibilidad predeterminados, con el fin de responder una pregunta específica de investigación. Utiliza métodos sistemáticos y explícitos para minimizar el sesgo en la identificación, selección, síntesis y resumen de los estudios. Si se realiza correctamente, aporta datos fiables con los que se pueden establecer conclusiones y tomar decisiones.

Las características fundamentales de una revisión sistemática son:

- un conjunto de objetivos establecidos con claridad, con una metodología reproducible y explícita;
- una búsqueda sistemática que pretende localizar todos los estudios que cumplirían los criterios de elegibilidad;
- una valoración de la validez de los hallazgos de los estudios incluidos (por ejemplo, valoración del riesgo de sesgo y confianza en las estimaciones acumuladas); y
- presentación sistemática, así como síntesis, de las características y hallazgos de los estudios incluidos.

La denominada *Declaración PRISMA* es un *conjunto mínimo de elementos que se basa en evidencias para la presentación de informes sobre revisiones sistemáticas y meta-análisis* (por sus siglas en inglés: Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Met-Analyses). También, es útil para realizar una valoración crítica de revisiones sistemáticas.

En cuanto a las ventajas de este método, Yepes-Nuñez et al. [5] destacan:

> Las revisiones sistemáticas son útiles en muchos aspectos críticos, ya que pueden proporcionar una síntesis del estado del conocimiento en un área determinada, a partir de la cual se pueden identificar futuras prioridades de investigación, abordar preguntas que de otro modo no podrían ser respondidas por estudios individuales, identificar problemas en la investigación primaria que deben ser corregidos en futuros estudios y generar o evaluar teorías sobre cómo o por qué ocurren fenómenos de interés. (p. 1)

Si bien la creación y adopción de la Declaración PRISMA se ha destacado en el campo de la medicina, algunos expertos han mostrado que también puede brindar aportes significativos en otras áreas del conocimiento, como el campo de las ingenierías [6].

La primera declaración PRISMA surgió en 2009 con el fin de mejorar la presentación de revisiones sistemáticas y metaanálisis de ensayos clínicos. Debido a la gran proliferación de material publicado, las novedades incorporadas por este método supusieron una mejora de las publicaciones científicas que, sin duda, presta a investigadores y especialistas muchas ventajas en la consulta de información, propuesta de nuevas investigaciones.

La declaración PRISMA 2009 propone una lista de comprobación de 27 ítems o conceptos que, siguiendo la estructura de un artículo científico, detalla específicamente en cada sección lo más relevante y, además, propone un diagrama de flujo para ilustrar el proceso de la revisión. Para ello, deben cumplirse los siguientes requisitos:

- Partir de una pregunta claramente formulada.
- Establecer métodos explícitos para las sucesivas etapas de la revisión.
- Realizar una búsqueda, identificación y selección de estudios relevantes.

- Describir y analizar la calidad, riesgo de sesgo, extracción de los datos e interpretación de los resultados.

Como consecuencia de los avances en la metodología y terminología de las revisiones sistemáticas, la declaración PRISMA 2009 ha sido actualizada y sustituida por PRISMA 2020, la cual incluye una nueva guía de presentación de las publicaciones para identificar, seleccionar, evaluar y sintetizar estudios. La lista de verificación PRISMA 2020 consta igualmente de 27 ítems, y una lista de verificación ampliada que detalla las recomendaciones en la publicación de cada ítem, la lista de verificación del resumen estructurado PRISMA 2020 y el diagrama de flujo para revisiones sistemáticas.

Dentro de las novedades en actualización Prisma 2020 con respecto a 2009, se modifican conceptos y se añaden subtemas para una presentación más organizada, y con un tratamiento más exhaustivo de la información. Por tal motivo, el presente trabajo se basa en la versión más reciente de PRISMA.

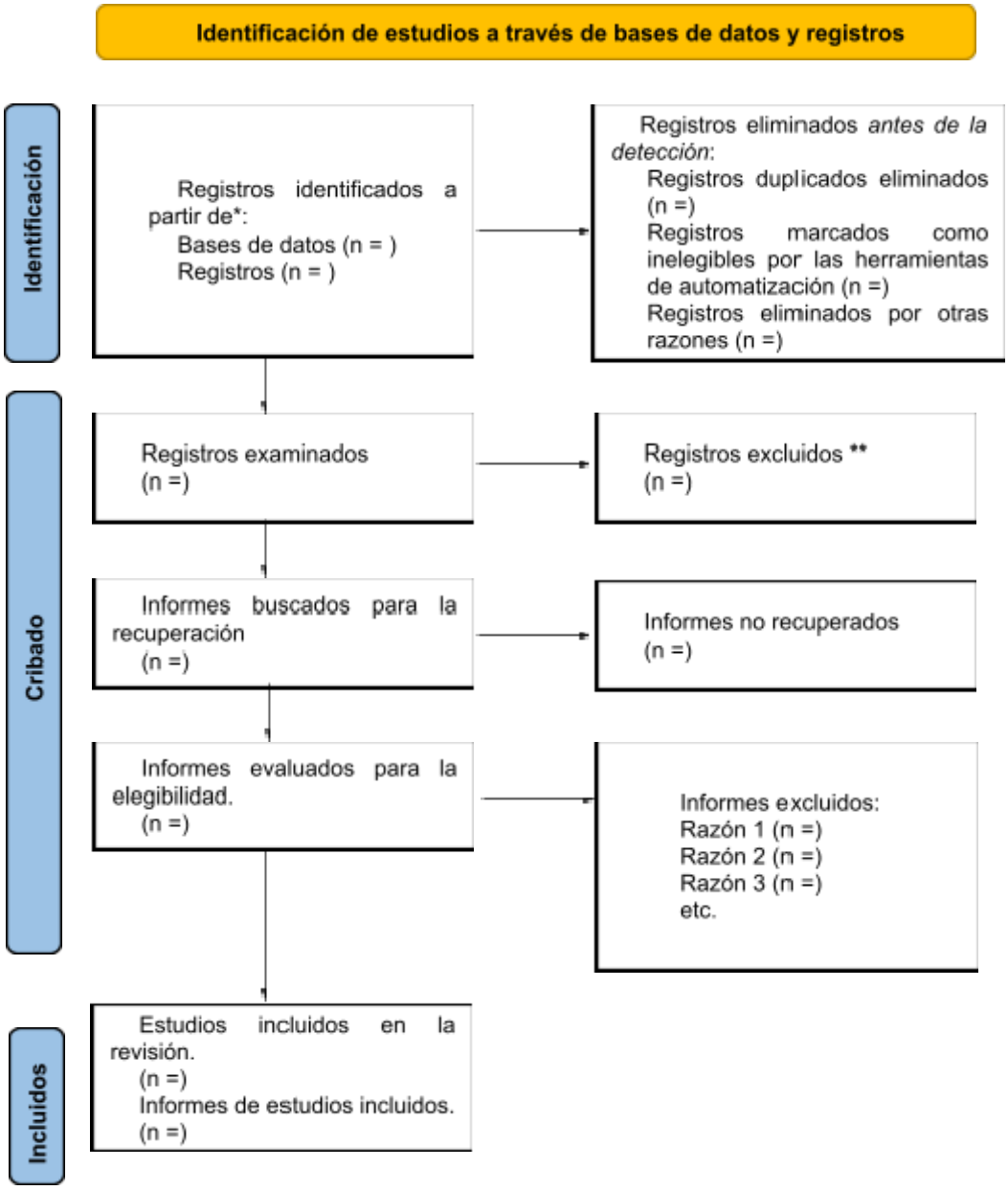
En la Fig. 1, se expone la lista de verificación PRISMA 2020 para resúmenes estructurados, presentada por Page et al. [7] con 12 ítems.

Sección/tema	Ítem Nº	Ítem de la lista de verificación
TÍTULO		
Título	1	Identifique el informe o publicación como una revisión sistemática.
ANTECEDENTES		
Objetivos	2	Proporcione una declaración explícita de los principales objetivos o preguntas que aborda la revisión.
MÉTODOS		
Criterios de elegibilidad	3	Especifique los criterios de inclusión y exclusión de la revisión.
Fuentes de información	4	Especifique las fuentes de información (por ejemplo, bases de datos, registros) utilizadas para identificar los estudios y la fecha de la última búsqueda en cada una de estas fuentes.
Riesgo de sesgo de los estudios individuales	5	Especifique los métodos utilizados para evaluar el riesgo de sesgo de los estudios individuales incluidos.
Síntesis de los resultados	6	Especifique los métodos utilizados para presentar y sintetizar los resultados.
RESULTADOS		
Estudios incluidos	7	Proporcione el número total de estudios incluidos y de participantes y resuma las características relevantes de los estudios.
Síntesis de los resultados	8	Presente los resultados de los desenlaces principales e indique, preferiblemente, el número de estudios incluidos y los participantes en cada uno de ellos.
DISCUSIÓN		
Limitaciones de la evidencia	9	Proporcione un breve resumen de las limitaciones de la evidencia incluida en la revisión (por ejemplo, riesgo de sesgo, inconsistencia –heterogeneidad– e imprecisión).
Interpretación	10	Proporcione una interpretación general de los resultados y sus implicaciones importantes.
OTROS		
Financiación	11	Especifique la fuente principal de financiación de la revisión.
Registro	12	Proporcione el nombre y el número de registro.

Fig. 1. Lista de verificación PRISMA 2020 para resúmenes estructurados (extraído de Page et al., 2021, p. 796).

Un *diagrama de flujo* es una representación gráfica del proceso llevado a cabo mediante la aplicación del protocolo. Los diagramas de flujo en las síntesis de evidencia permiten al lector comprender rápidamente los proce-

dimientos básicos utilizados en una revisión y examinar la criba y selección de estudios a lo largo del proceso de revisión. El diagrama de flujo PRISMA de la nueva versión 2020 se observa en la Fig. 2.



** Considere, si es factible hacerlo, informar el número de registros identificados en cada base de datos o registro buscado (en lugar del número total en todas las bases de datos /registros).*

*** Si se utilizaron herramientas de aprendizaje automático, indique cuántos registros fueron excluidos*

Fig. 2. Diagrama de flujo de PRISMA 2020 (extraído de la página web oficial http://www.prisma-statement.org/PRISMAStatement/FlowDiagram) [8]

2.1 Preguntas iniciales a responder

Con motivo de este trabajo, la pregunta inicial estuvo orientada a conocer las investigaciones sobre el tema argumentación en matemática vinculada al lenguaje natural, que estén desarrolladas en el ámbito de la enseñanza

matemática. Se busca conocer, además, los antecedentes de enfoques interdisciplinarios entre las matemáticas y la lingüística en temas que explícitamente requieran del uso de habilidades de ambas disciplinas, como la elaboración de justificaciones o argumentaciones.

2.2 Criterios de búsqueda y selección de estudios

"El establecimiento de los criterios de búsqueda comienza con la correcta identificación de palabras clave, sintetizando en palabras los temas definidos para que estén presentes en los estudios a incluir y/o excluir en la revisión sistemática." (p. 4) [6]

La búsqueda se llevó a cabo en marzo de 2022. Como fuente de información, se seleccionó el buscador Google Scholar (en español "Google Académico"), que se especializa en la búsqueda de contenido y bibliografía científico-académica y es de consulta gratuita. La búsqueda exacta incluyó las palabras clave: 1) Con comillas: ["argumentación matemática" AND "lenguaje natural"] (242 resultados); 2) Sin comillas: [argumentación matemática AND lenguaje natural] (45000 resultados). El uso de la conjunción en español (Y) arrojó el mismo resultado que la opción en inglés. Finalmente, se acotó la búsqueda a la primera opción (con comillas) para lograr una mayor exactitud conceptual y optimizar el manejo del corpus en relación con una meta inicial pautada a corto plazo.

El proceso de selección se efectuó en dos fases. En la primera fase se realizó una lectura de títulos y abstracts. Se confeccionó una base de datos en Excel para registrar la pre-selección de textos, la cual incluyó los siguientes campos: año de publicación, autores, título completo del estudio y DOI o link de acceso a cada archivo de texto. Se consideraron los siguientes criterios de inclusión:

- Tipos de estudios: artículos de investigación y tesis (pdf y word). Se excluyeron libros y compilaciones.
- Sin determinación de período de las publicaciones.
- Palabras clave: "argumentación matemática", "lenguaje natural".
- Estudios sobre enseñanza de la argumentación matemática en los niveles secundario y universitario.
- Idioma: escritos en español.

En la segunda fase, se realizó la lectura completa de los textos seleccionados en la primera fase, a fin de corroborar su vinculación con el tema general abordado, y se efectuó un análisis del contenido a fin de organizar el corpus en grupos, según el tipo de tratamiento temático.

3 Resultados obtenidos

La primera fase, lectura del título y resumen, permitió seleccionar 37 textos de los 242 encontrados en Google Scholar; es decir, se descartaron 205 artículos (85 %). Las razones de su descarte fueron diversas: tratar temas distintos a los incluidos en los criterios preliminares de selección, ser compilaciones (actas y revistas), investigaciones realizadas en el nivel de educación primaria o artículos en diferente lengua al español.

La segunda fase, lectura del texto completo, contribuyó a realizar un nuevo recorte cuantitativo del corpus. Por lo tanto, el número final de artículos validados para su posterior análisis fue de 13 textos. Es decir, se descartaron 24 textos (65 %). La razón principal, en esta oportunidad, fue el abordaje indirecto o secundario de la argumentación matemática en el aula y la ausencia de una vinculación al análisis del lenguaje natural.

En la Fig. 3, se muestra el diagrama de flujo obtenido durante el proceso de búsqueda y selección. Los rectángulos pintados con rayas grises no fueron aplicados en esta instancia.

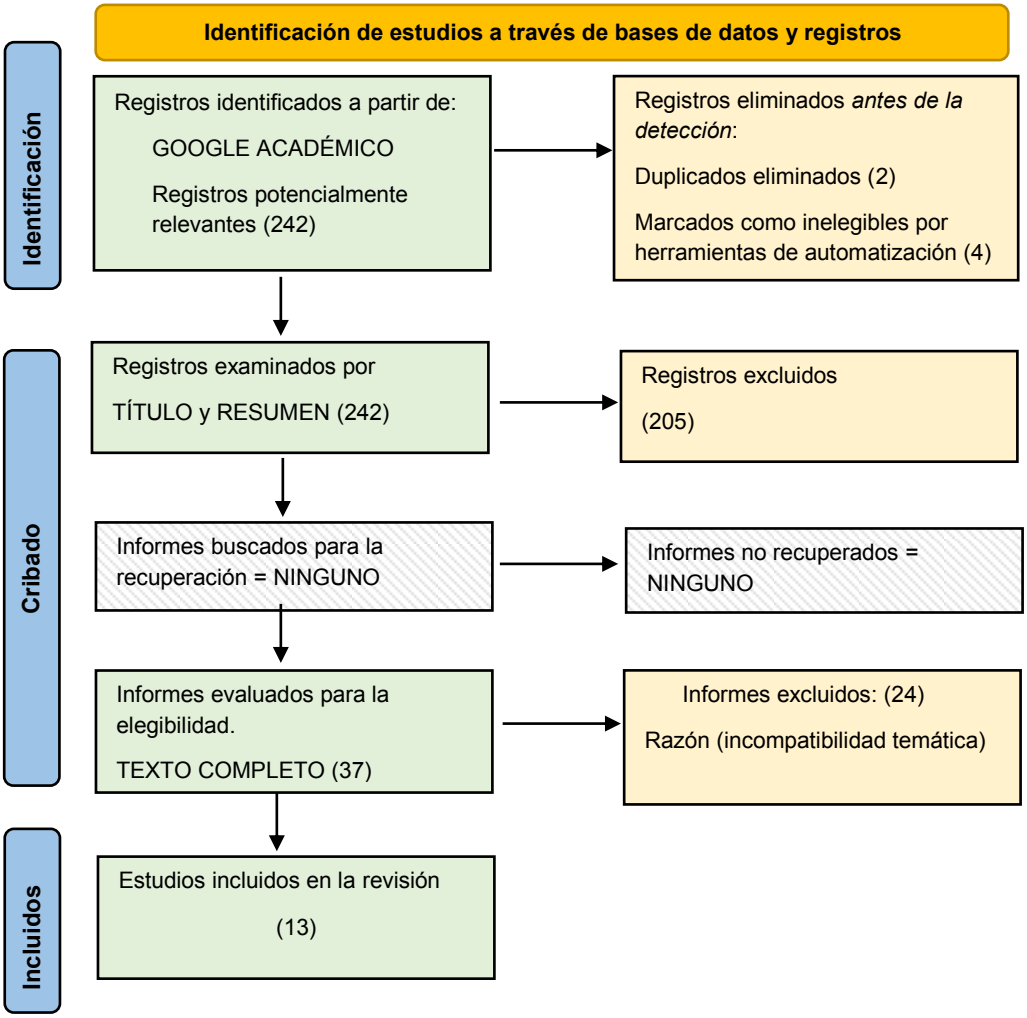


Fig. 3. Diagrama de flujo de la revisión sistemática realizada.

Se destacan tres aspectos de los estudios previos encontrados hasta el momento, a considerar para la investigación en curso: su actualidad, el país de origen, el tipo de trabajos y el nivel educativo indagado.

Los hallazgos preliminares muestran que los estudios previos relacionados con la temática abordada datan del año 2007 y empiezan a tener un mayor desarrollo a partir de la década 2010.

En cuanto al origen de los estudios, entre las 13 investigaciones, hay trabajos de distintos países hispanohablantes, la mayoría de Colombia y España: Colombia 31 % (4), España 23 % (3), México 15 % (2), Argentina 15 % (2), Ecuador 8 % (1) y Perú 8 % (1).

En cuanto al tipo de producción, se identificaron: tesis de Maestría 46 % (6), tesis doctorales 23 % (3), artículos de investigación 23 % (3) y ponencia en congreso 8 % (1).

Respecto del nivel de educación que aborda cada trabajo, la mayoría corresponde al nivel secundario 77 % (10), nivel superior o universitario inicial 15 % (2) y ambos niveles 8 % (1).

3.1 Conformación y análisis de grupos para los antecedentes

Con relación al análisis y organización del corpus final obtenido (13 textos), este proceso posibilitó establecer un primer estado del arte parcial, el cual expondremos a continuación.

A partir de la lectura completa del corpus, se estableció como categoría relevante la acepción de "objetos matemáticos" que postula el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática: aquello que puede ser indicado o a lo cual puede hacerse referencia mientras una persona o institución resuelve problemas matemáticos,

valida la solución, la comunica a otros o la generaliza. [9, 10, 11]

Una de las dificultades del trabajo de exploración se debió a las diferentes acepciones existentes acerca de "qué se entiende por argumentación matemática"; además, no son únicas las respuestas a las preguntas tales como: "¿qué es una demostración matemática?", "¿qué es una justificación matemática?", "¿una demostración es lo mismo que una justificación matemática?", "¿qué relación guardan?", "¿son importantes las dos?".

Como no es objetivo de este trabajo obtener una diferenciación de los términos anteriores, en lo que sigue los consideraremos como sinónimos.

Los textos que resultaron seleccionados después de la segunda fase se pudieron agrupar en tres grupos principales. Ellos son: a) *Sistemas de Representación*, b) *Competencias* y c) *Comprensión Lectora*.

Tomando en consideración los tres grupos temáticos identificados y analizados, se evidencia una tendencia hacia el grupo de competencias (7 producciones) por encima del grupo de sistemas de representación (3 producciones) y el de comprensión lectora (3 producciones).

A continuación, exponemos una síntesis de la temática abordada en cada grupo.

Grupo a): *Sistemas de Representación*

Tal como afirman Salazar-Torres, Contreras-Santander y Jaimes-Mora [12] una característica específica del ser humano es la capacidad simbólica y esta competencia es la que posibilita que represente la realidad para comprenderla y transformarla. En el contexto de lo matemático, el uso y la interpretación de signos con carga de significados es lo que permite consolidar conceptos fundamentales. Aunque la noción de representación admite diferentes acepciones (Castro y Castro [13]; Duval [14]; Godino [11]), en la educación matemática es consensuado que debido al carácter inobservable de los objetos matemáticos como entidades mentales son imprescindibles las representaciones externas de las mismas.

Ejemplo de representaciones son los enunciados en lenguaje natural, las expresiones algebraicas, figuras geométricas, gráficas, tablas numéricas, etc. A través de ellas se interactúa con el conocimiento matemático, se lo registra y se lo comunica. La diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, de manera recíproca, las representaciones externas son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

Uno de los posibles registros de representación que aparece en matemática es el lenguaje verbal (escrito u oral). Debido al consenso en educación matemática de la relevancia que representa que los alumnos sean capaces de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto, resulta que los tres trabajos pertenecientes a este grupo analizan la importancia del lenguaje verbal en la producción de argumentaciones.

Grupo b): *Competencias*

Este grupo de antecedentes vincula la argumentación matemática con las competencias, entendidas estas últimas como "destrezas y competencias generales como la resolución de problemas, el uso del lenguaje matemático y el diseño matemático." (p. 73) [15]

Los antecedentes de este grupo consideran los marcos teóricos del Programa Internacional de Evaluación de los alumnos (Programme for International Student Assessment, PISA, por sus siglas en inglés) y el proyecto danés de educación de Niss [14]. Por un lado, en el proyecto PISA del año 2000 se enuncian ocho destrezas, una de las cuales es de argumentación matemática, que las organiza en tres clases de competencias. Por otro lado, Niss es uno de los miembros destacados del Proyecto PISA y considera que el proceso de formación de los estudiantes debe contribuir a la adquisición de dos grupos de competencias. También Niss [16] propone ocho competencias matemáticas específicas identificadas para mejorar el grado de razonamiento lógico. Entre esas competencias aparecen la de argumentar y comunicar. La primera consiste en realizar pruebas matemáticas para comprobar situaciones, emplear heurística, crear y expresar argumentos matemáticos. Y la segunda en enunciar o leer expresiones matemáticas, entender expresiones, transmitir ideas matemáticas [17].

En Zamora Pérez [18] se describen las competencias de Niss y su equivalencia con las pruebas PISA.

En Llanos [19] se analiza y discute la forma en que los textos han modificado la forma de argumentar en matemática a lo largo del tiempo con las consecuencias didácticas que esto supone. Además, se analiza como el nivel educativo al que están dirigidos, influye en el tipo de argumentación empleada y las propiedades matemáticas con que se realizan las argumentaciones.

En Jimenez, Alfonso [20] se presenta algunas ideas relacionadas con la argumentación y la comunicación en la

clase de matemáticas, con el propósito de mostrar la importancia que tiene el desarrollo de la argumentación en un ambiente centrado en las estrategias de comunicación, tales como trabajo en grupo y la heurística solucionador-escucha, donde el lenguaje se asume como una práctica social que favorece la reflexión y el diálogo continuo entre docentes y estudiantes, y la comunicación como un proceso de interacción social, en el cual se tiene en cuenta al otro y lo que éste dice.

En Arreguín Rodríguez [21] se estudia el desarrollo de competencias matemáticas: planteamiento y resolución de problemas, comunicación y argumentación, con alumnos de segundo año de secundaria, para identificar cómo impacta la técnica de aprendizaje orientada por proyectos (POL) como diseño instruccional innovador para mejorar los aprendizajes matemáticos de los estudiantes.

Grupo c): *Comprensión Lectora*

"La comprensión lectora es quizás una de las habilidades que más infiere en el correcto proceso de aprendizaje de los niños y jóvenes, ya que poseerla es vital para el desarrollo de todas las áreas y materias de conocimiento en las distintas etapas educativas." (p. 3) [22]

Centrados en el área de la matemática, los tres trabajos pertenecientes a este grupo analizan que la principal dificultad no está en la realización de las operaciones sino en la falta de entrenamiento para interpretar los textos de los problemas, por lo que es necesario concretar sesiones para trabajar las resoluciones de problemas poniendo especial atención en la interpretación de los enunciados.

4 Primeras conclusiones y trabajo futuro

Luego del trabajo preliminar realizado, se ponen de manifiesto algunas observaciones que resultan significativas para definir líneas de continuación.

En primer lugar, aunque es innegable la importancia que tienen las actividades de argumentación en la educación matemática de los estudiantes, existe una diversificación terminológica con respecto a términos que podrían vincularse, dependiendo su perspectiva de abordaje; por ejemplo: "argumentación", "justificación", "demostración", entre otros.

A ello se suma la cantidad escasa de estudios que reúnan la impronta de investigadores matemáticos con otros especialistas en el uso del lenguaje. Vale observar que, aproximadamente, sólo el 5% de los trabajos hallados presentan una vinculación entre el lenguaje natural y la tarea de argumentar en matemática. En este sentido, el proyecto CAI+D dentro del cual se incluye el trabajo presentado constituye un desafío innovador para la producción de propuestas interdisciplinarias originales.

Por otra parte, debemos destacar que el proceso de revisión recién comienza. Esta situación conlleva que, para realizar una revisión más completa y representativa sobre las cuestiones inicialmente planteadas, deberemos continuar la búsqueda de literatura realizando algunos ajustes, tales como precisando periodos de publicación y elaborando una lista de sinónimos que permita ampliar la búsqueda. Para ello, deberemos precisar los criterios de inclusión y exclusión con el fin de minimizar cualquier riesgo de sesgo y obtener una selección de artículos relevantes y representativos para su posterior análisis.

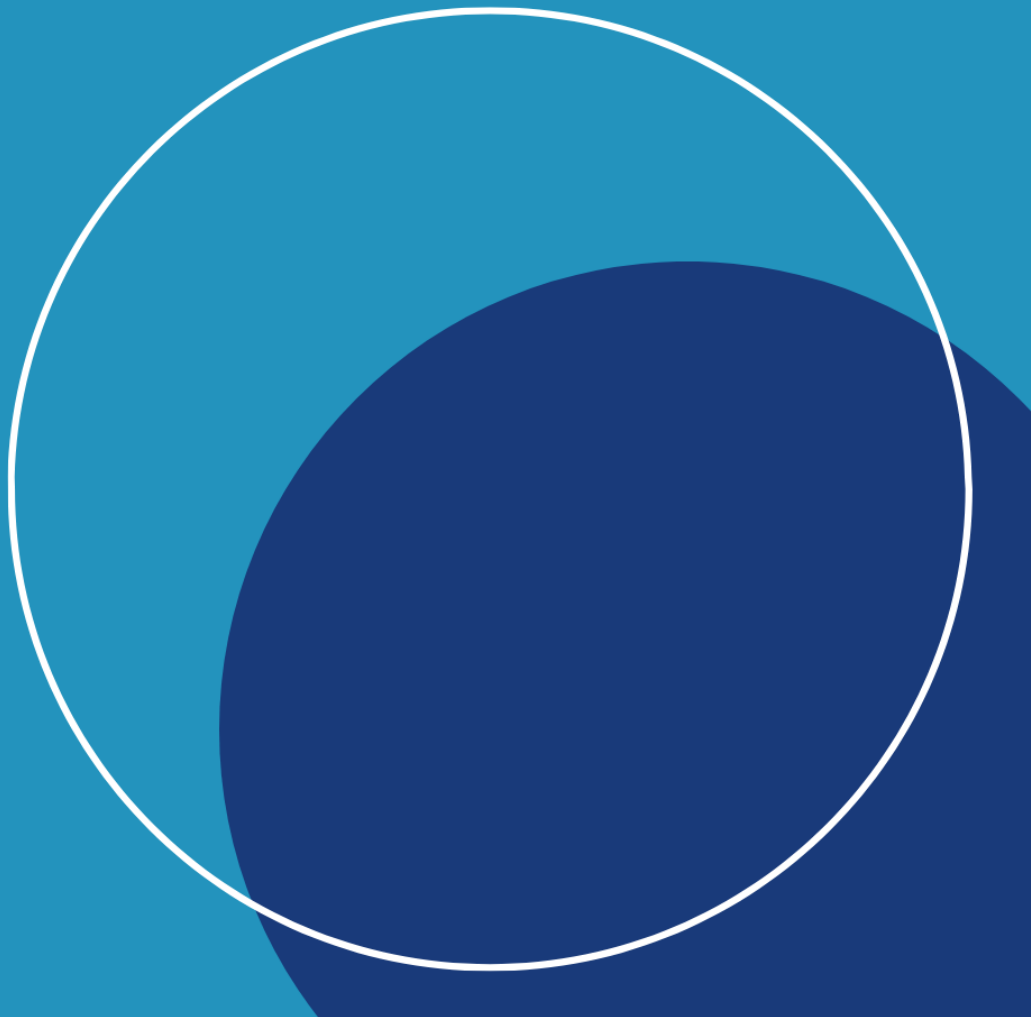
Referencias

1. Urrútia, G.; Bonfill, X.: Declaración PRISMA:una propuesta para mejorar la publicación de revisiones sistemáticas y metaanálisis. *Medicina Clínica*, 135(11), 507–511 (2010). www.elsevier.es/medicinaclinica. Accedido el 03 de Marzo de 2022.
2. Moher, D.; Shamseer, L.; Clarke, M.; Ghersi, D.; Liberati, A.; Petticrew, M.; Shekelle, P.; Stewart, L.: Ítems de referencia para publicar Protocolos de Revisiones Sistemáticas y Metaanálisis: Declaración PRISMA-P 2015. Revista Española de Nutrición Humana y Dietética, 20(2): 148-160 (2016). https://www.academia.edu/67395500 /Ítems_de_referencia_ para publicar_ Protocolos_ de Revisiones_Sistemáticas_y_Metaanálisis_Declaración_PRISMA_P_2015. Accedido el 03 de Marzo de 2022.
3. Hutton, B.; Catalá-López, F.; Moher, D.: La extensión de la declaración PRISMA para revisiones sistemáticas que incor-

poran metaanálisis en red: PRISMA-NMA. *Medicina Clínica*. www.elsevier.es/medicinaclinica. (2016). Accedido el 06 de Marzo de 2022.
4. Page, M.; McKenzie, P.; Bossuyt, I.; Hoffmann, T.; Mulrow, C.; Shamseer, L.; Tetzlaff, J.; Akl, E.; Brennan, S.; Chou, R.; Glanville, J.; Grimshaw, J.; Hróbjartsson, A.; Lalu, M.; Li, T.; Loder, E.; Mayo-Wilson, E.; McDonald, S.; McGuinness, L.; Stewart, L.; Thomas, J.; Tricco, A.; Welch, V.; Whiting, P. y Moher, D.: Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas. *Revista Española de Cardiología*, 74(9):790–799 (2021). http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/. Accedido el 11 de Febrero de 2022.
5. Yepes-Núñez, J.; Urrútia, G.; Romero-García, M. y Alonso-Fernández, S.: Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas. Revista Española de Cardiología. https://doi.org/10.1016/j.recesp.2021.06.016. (2021). Accedido el 05 de marzo de 2022.
6. Blanco, D.; Rubio, E.; Marín, M. y de Agustina, B.: Propuesta metodológica para revisión sistemática en el ámbito de la ingeniería basada en PRISMA. *XXIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*. 20 al 23 de octubre de 2020. https://www.researchgate.net/publication/348705198 (2021). Accedido el 26 de marzo de 2022.
7. Page, M.; McKenzie, P.; Bossuyt, I.; Hoffmann, T.; Mulrow, C.; Shamseer, L.; Tetzlaff, J.; Akl, E.; Brennan, S.; Chou, R.; Glanville, J.; Grimshaw, J.; Hróbjartsson, A.; Lalu, M.; Li, T.; Loder, E.; Mayo-Wilson, E.; McDonald, S.; McGuinness, L.; Stewart, L.; Thomas, J.; Tricco, A.; Welch, V.; Whiting, P. y Moher, D.: Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas. *Revista Española de Cardiología*, 74(9): 790–799 (2021). http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/. Accedido el 11 de Febrero de 2022.
8. PRISMA. Transparent Reporting of Systematic Reviews and Meta-Analyses. http://www.prisma-statement.org/ PRISMAStatement/FlowDiagram. Accedido el 05 de Marzo de 2022.
9. Godino, J. D. y Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Reserches en Didactiques des Mathematiques*, 14 (3), 325-355. (1994).
10. Godino, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284. (2002).
11. Godino, J.: *Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de la Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (2003).
12. Salazar-Torres, J. P., Contreras-Santander, Y. L., y Jaimes-Mora, S. S.: Semiótica: Un recurso fundamental en los procesos de argumentación matemática escrita. *Eco Matemático*, 7(1): 20–32. https://doi.org/10.22463/17948231.1016 (2016). Accedido el 02 de marzo de 2022.
13. Castro, E. y Castro, E.: Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.): *La educación matemática en la enseñanza matemática* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori. (1997)
14. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México. Grupo Editorial Iberoamericana. (1998).
15. INCE: *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco de evaluación.* Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid, España. (2000)
16. Niss, M.: Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. (1999)
17. Pantoja Padilla, R. V.: *Estrategias metodológicas para promover el razonamiento lógico en el área de matemáticas en educación Básica superior* (tesis de Maestría). Facultad de Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador. (2017)
18. Zamora Pérez, M. R. F.: Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemática II) (Tesis doctoral). Departamento de didáctica de las ciencias experimentales, sociales y de la matemática. Universidad de Valladolid, España. (2014).
19. Llanos, Viviana: Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media. NYECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil, Argentina. CONICET- Argentina. (2007).
20. Jimenez, Alfonso: Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Grupo de Investigacion PIRAMITE. (2013)
21. Arreguín Rodríguez, Luz Elena: Competencias matemáticas usando la técnica de Aprendizaje Orientado en Proyectos (Tesis doctoral). Tecnológico de Monterrey. Universidad virtual. Escuela de Graduados en Educación. (2009)
22. Dris, M. Importancia de la lectura en Infantil y en Primaria. Innovación y experiencias educativas, 38, 1-9. (2011)

EMCI 2022

Eje: Competencias Matemáticas



EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Rúbrica para evaluar la comunicación en matemática

Adriana G. Favieri[1], Marta G. Caligaris[2], Georgina B. Rodríguez, [2]; Milton T. Martin[3]
[1] Departamento Ingeniería Aeronáutica
Facultad Regional Haedo, UTN – París 532, Haedo, Provincia de Buenos Aires
afavieri@frh.utn.edu.ar
[2] Grupo Ingeniería & Educación (GIE)
Facultad Regional San Nicolás, UTN – Colón 332, San Nicolás, Provincia de Buenos Aires
{mcaligaris, grodriguez}@frsn.utn.edu.ar
[3] Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI)
Facultad Regional Paraná, UTN – Av. Almafuerte 1033, Paraná, Provincia de Entre Ríos
miltontm@frp.utn.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presenta el diseño inicial de una rúbrica para evaluar la comunicación en matemática. Esta actividad es parte de un proyecto de investigación en el que participan tres facultades de la Universidad Tecnológica Nacional. Una de las tendencias actuales en educación matemática está vinculada con la formulación del currículo en términos de competencias básicas y específicas, por lo que las carreras de ingeniería también adoptan esta postura. Se describe la noción de competencia matemática y sus dimensiones. Se propone una definición de Habilidad para Comunicar Eficazmente en Matemática y se muestra la rúbrica. Asimismo, se exponen algunos ejemplos de actividades de las tres asignaturas involucradas en el proyecto, sobre las cuales se aplicará dicha rúbrica. Se concluye con reflexiones sobre el diseño y sus próximos usos durante el año lectivo 2022. Se espera, a partir de su utilización en distintas asignaturas, depurar el diseño original.

Palabras Clave: Comunicación eficaz, Rúbrica, Ingeniería**.**

1 Introducción

En general, la comunicación se refiere al intercambio de información entre individuos con el objetivo de aportar información y recibirla. Está presente en todas partes y ámbitos. En particular, la comunicación en el aula puede considerarse como el proceso de intercambio de información entre el profesor y el alumno y entre los compañeros entre sí, con el fin de llevar a cabo dos objetivos: la relación personal y los procesos de enseñanza y aprendizaje [1]. Si se consideran las clases de matemática universitaria en la formación de ingenieros hay que pensar en una comunicación con características propias, dado que está vinculada con la solución de problemas, tareas y/o actividades matemáticas. La matemática posee un lenguaje simbólico formal, notación y símbolos específicos que resultan imprescindibles para describir los problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones.

Docentes de tres facultades de la Universidad Tecnológica Nacional de Argentina, interesados en que el alumno no sólo aprenda los conocimientos matemáticos necesarios para su formación sino también que pueda comunicarse eficazmente en la disciplina adquiriendo formas apropiadas de expresión escrita y verbal que pongan en evidencia su razonamiento y argumentación, integran un proyecto de investigación multidisciplinar. Uno de los objetivos de este proyecto es elaborar actividades de aprendizaje que contribuyan al desarrollo de las habilidades comunicativas en matemática, ponerlas en práctica en distintos cursos y diseñar estrategias de evaluación.

En este trabajo se presenta el diseño de una rúbrica para evaluar la comunicación matemática y ejemplos de actividades de las tres asignaturas involucradas en el proyecto, sobre las cuales se aplicará.

2 Comunicación matemática en Ingeniería

Una de las tendencias actuales en educación matemática está vinculada con la formulación del currículo en términos de competencias básicas y específicas. Esto incluye a las carreras de ingeniería de Argentina como puede verse reflejado en las recomendaciones del CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina), que sugieren la enseñanza en estas carreras mediante un enfoque por competencias, enfatizando el hecho de que los alumnos no sólo deben saber los contenidos sino también "saber hacer" y "saber ser". Adoptan las ideas de Perrenoud y LeBoterf para precisar la noción de competencia, estableciendo que es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de estructuras mentales y valores, permitiendo poner a disposición diferentes saberes, en contextos particulares para resolver situaciones profesionales [2]. Esto quiere decir que las competencias apuntan a capacidades complejas, están relacionadas con el saber teórico, contextual y procedimental, se relacionan con el saber hacer y están referidas al contexto profesional [3]. Con este enfoque se pone el centro en el alumno, y en las actividades que realiza para su aprendizaje. Varias posturas teóricas [4, 5] concluyen en que podemos distinguir dimensiones como las siguientes, aunque no son compartimentos estancos, sino que se solapan, se relacionan entre sí:

- Pensar y razonar
- Plantear y resolver problemas
- Modelar
- Argumentar
- Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos)
- Utilizar el lenguaje simbólico y formal
- Usar ayudas y herramientas tecnológicas
- Comunicar

Es decir, interesa poner el foco en la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas en diferentes actividades matemáticas. La comunicación matemática se considera como actividad fundamental para los procesos de enseñanza y aprendizaje y se espera que el alumno construya significados, reflexione, analice e intercambie interpretaciones, utilizando el lenguaje simbólico adecuado. A través de una comunicación eficaz se desarrollan procesos de pensamiento donde se estimula a los alumnos a utilizar su propio lenguaje, de manera que el lenguaje matemático aparece como una construcción y no como una imposición docente [6]. La comunicación matemática está vinculada con la habilidad de argumentar pues esta implica [7]:

- Comunicar resultados con lenguaje matemático o con una expresión matemática.
- Explicar procedimientos utilizando lenguaje matemático.
- Formular y verificar conjeturas.
- Comunicar y fundamentar a partir de razonamientos inductivos.
- Identificar y explicar errores utilizando lenguaje matemático.
- Comprobar reglas y propiedades.
- Realizar deducciones.

El lenguaje matemático tiene su propia sintaxis la que, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y no se puede esperar que el alumno lo descubra por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto, sino que debe ser fomentada por el docente [8].

3 Rúbrica

Una rúbrica se puede definir como una herramienta de evaluación utilizada para medir el logro de los resultados de aprendizaje en el aula considerando un conjunto de criterios consistente. Las rúbricas analíticas son tablas de doble entrada donde se ubican los Criterios de Evaluación en las filas y los Niveles de Desempeño en las columnas.

Hoy en día, las rúbricas son una forma común de compartir criterios de evaluación explícitos con los alumnos. Las rúbricas homogeneizan los criterios de evaluación tanto para docentes como para estudiantes [9] y pueden ayudar a los alumnos a comprender las expectativas y la retroalimentación de los docentes [10].

3.1 Habilidad para Comunicar Eficazmente en Matemática

Cuando un alumno resuelve un problema o alguna actividad matemática pone en juego conceptos teóricos, procedimientos, algoritmos y, como se expresó previamente, debe analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas. Para poder evaluar la comunicación plasmada en las producciones de los alumnos, se define la Habilidad para Comunicar Eficazmente en Matemática (HCEM) como la capacidad de expresar razonamientos y argumentaciones matemáticas utilizando el lenguaje simbólico apropiado. Esta habilidad implica:

- Desarrollar la resolución utilizando los símbolos matemáticos adecuados
- Explicar y justificar los procedimientos realizados utilizando lenguaje matemático
- Escribir los resultados y/o respuestas en lenguaje matemático
- Fundamentar los resultados y/o respuestas

Con el fin de facilitar la tarea para la evaluación de la HCEM se diseñó una rúbrica que ayuda a establecer las expectativas de calidad de la misma [11].

3.2 Rúbrica para evaluar HCEM

En la Tabla 1 se presenta la rúbrica diseñada.

Tabla 1. Rúbrica para evaluar la HCEM.

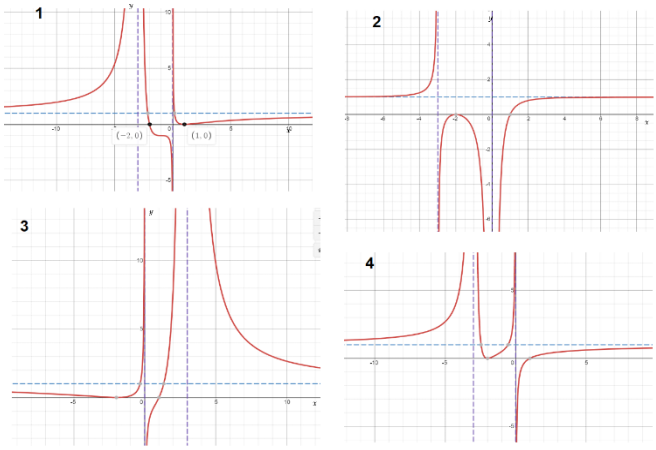
Niveles Criterios	Satisfactorio	Poco satisfactorio	Nada satisfactorio
Desarrolla la resolución utilizando los símbolos matemáticos adecuados	El desarrollo de la resolución está completo y el uso de símbolos matemáticos es correcto.	El desarrollo de la resolución está completo pero el uso de símbolos matemáticos presenta errores u omisiones.	El desarrollo de la resolución no está completa y el uso de los símbolos matemáticos es incorrecto o presenta muchas omisiones.
Explica y justifica los procedimientos realizados utilizando lenguaje matemático	En la resolución se observan todas explicaciones y/o justificaciones escritas en forma correcta y con el lenguaje matemático apropiado	En la resolución se observan algunas explicaciones y/o justificaciones escritas en forma correcta y con el lenguaje matemático apropiado	En la resolución no se observan explicaciones y/o justificaciones escritas en forma correcta y con el lenguaje matemático apropiado
Escribe los resultados y/o respuestas en lenguaje matemático	Todas las respuestas a la actividad o problemas matemáticos están escritas correctamente utilizando tanto el lenguaje matemático como el coloquial.	Algunas respuestas a la actividad o problemas matemáticos están escritas correctamente utilizando tanto el lenguaje matemático como el coloquial.	Las respuestas a la actividad o problemas matemáticos no están escritas correctamente utilizando tanto el lenguaje matemático como el coloquial o hay ausencia de ellas.
Fundamenta los resultados y/o respuestas	Todas las respuestas están justificadas correctamente haciendo alusión a los conceptos matemáticos utilizados en la resolución.	Algunas respuestas están justificadas correctamente haciendo alusión a los conceptos matemáticos utilizados en la resolución.	Ninguna de las respuestas está justificada correctamente haciendo alusión a los conceptos matemáticos utilizados en la resolución.

4 Ejemplos

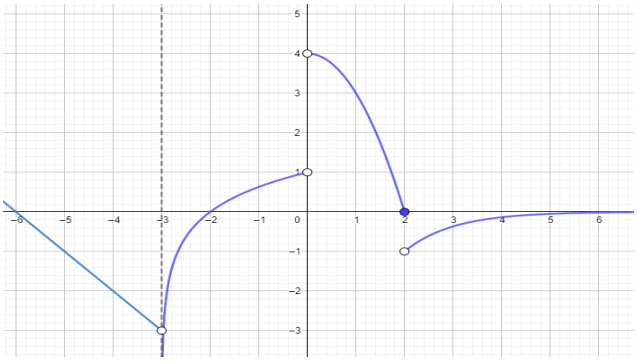
A continuación se presentan ejemplos de actividades que se propondrán en las asignaturas Análisis Matemático I y Análisis Matemático II de la Facultad Regional Paraná, Cálculo Numérico de la Facultad Regional San Nicolás y Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Facultad Regional Haedo. Estas actividades serán evaluadas con la rúbrica diseñada.

4.1 Análisis Matemático I

- Determinar, justificando los motivos de su elección con aportes de teoría, cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación: $y = f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)^2}{x\,(x+3)^2}$



- Responder indicando si existe o no el límite o la imagen de la función en cada uno de los puntos indicados. Si existe, indicar cuál es su valor. Si no existe, explicar por qué, justificando con conceptos teóricos



a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$
b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$
c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$
d) $L_I = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$
e) $L_D = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$
f) $f(0) =$
g) $f(2) =$

- Dada la función $y = f(x) = \begin{cases} kx^2 & si\ x < 2 \\ -2 & si\ x = 2 \\ kx - 1 & si\ x > 2 \end{cases}$, indicar:

a) ¿Qué tipo de discontinuidad tiene en x = 2 si k = 1? Argumentar las respuestas utilizando conceptos teóricos.

b) Encontrar analíticamente, si existe, el valor de k para que la función sea continua en x = 2. Justificar.

4.2 Análisis Matemático II

- Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}\,(x,y) = 4\,x\,y\,\vec{\imath} + 2x^2\vec{\jmath}$, para mover una partícula entre los puntos (0, 0) y (1, 1) a lo largo de las siguientes trayectorias y sacar conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

  a) C_1: y = x b) C_2: x = y^2 c) C_3: y = x^3

- Determinar el valor de *a* para que el campo $\vec{F}\,(x,y) = (4x^2 + axy)\vec{\imath} + (4x^2 + 3y^2)\vec{\jmath}$ sea un campo conservativo. Justificar.

- Indicar si los enunciados son Verdaderos o Falsos. Justificar.

  a) Si $rot(\vec{F}) \neq \vec{0}$ entonces $\vec{F}$ no es conservativo.
  b) Si $div(\vec{F}) \neq 0$ entonces $\vec{F}$ no es el rotacional de algún campo vectorial $\vec{G}$.

4.3 Cálculo Numérico

- Dado el problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \beta.y = 0 & 0 \leq x \leq 4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

  determinar el valor del parámetro $\beta > 0$ para que el método de Euler sea estable, para $0 \leq h \leq 0.5$, donde h es el paso de la discretización. Justificar.
- Discretizar el siguiente problema de valor inicial mediante el método de Runge – Kutta de segundo orden.

$$\begin{cases} y' + 2.y = 0 & 0 \leq x \leq 10 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

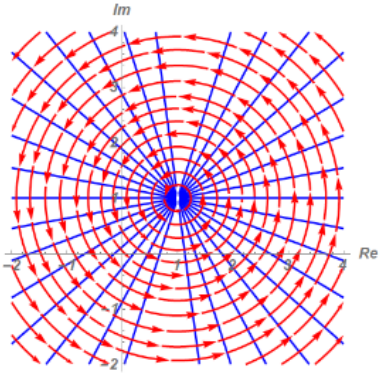
Indicar un tamaño de paso donde el método sea estable y otro donde sea inestable. Justificar.

4.4 Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica

- Transformar por inversión la región del plano complejo $|z| \geq 2$. Justificar todos los pasos realizados y graficar la region original y la transformada.

Para cada uno de los flujos potenciales dados, verificar que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemman, hallar el potencial de velocidades, la función de corriente, la velocidad compleja, las trayectorias, las líneas equipotenciales y realizar un esquema gráfico usando flechas para indicar la dirección de las trayectorias. Indicar las expresiones analíticas de las trayectorias y las líneas equipotenciales. Justificar todos los pasos y verificar gráfica y/o analíticamente.

a) Función $f_1(z)$ que represente un flujo con fuente en z=1+i y k= 2
b) Flujo representado por la función $f_2(z)$ = -2 i ln z
c) Flujo representado por el gráfico



5 Reflexiones y trabajos futuros

El diseño de esta rúbrica es el puntapié inicial para la recolección de datos sobre la HCEM, ya que se utilizará en las evaluaciones de las producciones que se propondrán durante el ciclo lectivo 2022. La rúbrica se pondrá a prueba y, de ser necesario, se realizarán ajustes a su diseño para que cumpla con el objetivo inicial que es evaluación de las formas de comunicación de los alumnos en la disciplina adquiriendo formas apropiadas de expresión escrita y verbal que pongan en evidencia su razonamiento y argumentación.

Los autores creen que la definición de la HCEM resulta un hito previo importante para tener en claro que es lo que se quiere evaluar.

Los datos recolectados acerca de las formas de comunicación de los alumnos de las tres facultades de la Universidad Tecnológica Nacional brindarán evidencia empírica sobre el nivel de desarrollo que los alumnos tienen de la HCEM. Esto permitirá establecer un punto de partida sólido para el diseño de nuevas actividades de aprendizaje que fomenten su desarrollo.

Se espera que esta rúbrica sea una herramienta útil para el trabajo del equipo de investigación y que, a través de su uso, se perfeccione su diseño.

Referencias

1. Fragoso Franco, D.: La comunicación en el salón de clases. *Razón y Palabra. Primera revista electrónica de América Latina especializada en tópicos de comunicación.* No. 13, Año 4, enero - marzo (1999)
2. CONFEDI. Enfoque por Competencias. [En línea] 2020. https://confedi.org.ar/destacados/enfoque-por-competencias/.
3. CONFEDI. Competencias en Ingeniería. Mar del Plata: Universidad FASTA Ediciones, 2014.
4. Lora Navarro, J.: Mejora de la competencia Matemática. *Innovación y experiencias educativas*. No. 17 (2009) https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_17/JOSE%20ANTONIO_LORA_1.pdf. Accedido el 29 de Abril de 2022
5. Niss. M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Proyect. (2004) http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf. Accedido el 29 de Abril de 2022
6. Jiménes Espinoza, A.; Suárez Ávila, N; Galindo Mendoza, S.: La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber.* Vol. 1, No. 2 pp. 173-202 (2010)
7. Pedreros Matta, A.: *Desarrollo de habilidades: aprender a pensar matemáticamente*. Ministerio de Educación de Chile. (2016).
8. Sastre Vázquez, P.; D'Andrea, R.: La relevancia de conocer el lenguaje matemático. *Acta Latinoamericana de Matemático Educativa*. pp. 800-807 (2016)
9. Tobajas, M.; Molina, C.B.; Quintanilla, A.; Alonso-Morales, N.; Casas, J.A.: Development and application of scoring rubrics for evaluating students' competencies and learning outcomes in Chemical Engineering experimental courses. *Education for Chemical Engineers*, Vol. 26, 80-88. (2019)

10. Panadero, E.; Jonsson, A.: A critical review of the arguments against the use of rubrics. *Educational Research Review*, Vol. 30, 100329. (2020)
11. Román, L.: Evaluar con rúbricas: qué son, cómo aplicarlas y cuáles son sus beneficios. *Educación 3.0* (2021) https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/evaluar-con-rubricas/ 2021 Accedido el 29 de Abril de 2022

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Propuesta Híbrida para el Desarrollo de Competencias en Matemática

Analía Rueda[1], Cecilia De Munno[1], Sandra Segura[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273, Mendoza
{analia.rueda, cecilia.de, ssegura}@docentes.frm.utn.edu.ar

Resumen. Teniendo en cuenta que a futuro debemos pensar en un contexto híbrido de enseñanza y que los entornos virtuales han tomado gran importancia en estos últimos tiempos debido al contexto de pandemia por COVID-19, este trabajo pone de manifiesto el uso de recursos digitales para la enseñanza. Se muestra el desarrollo de un saber de Análisis Matemático, elaborando una propuesta con un enfoque metodológico del tipo "aula invertida", en el cuál, se trabaja sobre la importancia de desarrollar y afianzar competencias en los estudiantes, principalmente, la comprensión lectora en matemática. También se pretende, a través de los recursos digitales propuestos, promover la iniciativa por aprender en forma autónoma y que el estudiante se transforme en agente activo del proceso de aprendizaje.

Palabras Clave: Aula invertida, Comprensión lectora, Análisis matemático, Recursos digitales.

1 Introducción

Análisis matemático es un espacio curricular básico en la formación de los ingenieros de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional. En ella se intenta que los estudiantes adquieran las primeras herramientas necesarias para modelar problemas específicos de la ingeniería.

La preocupación de los docentes de la cátedra, debido a los altos porcentajes de estudiantes desaprobados en los exámenes finales y las graves falencias en la comprensión lectora que se detectan en ellos, ha llevado a implementar estrategias que permitan relacionar estos factores.

Por otra parte, el uso de los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) como recurso educativo, que nos hemos visto obligados a utilizar debido al aislamiento producido para evitar la propagación del COVID-19, requiere del desarrollo de pedagogías distintas a las que llevábamos a cabo en la presencialidad. Los estudiantes decodifican e interpretan la información proporcionada por el docente en forma presencial, de forma completamente distinta a la llevada a cabo a través del material proporcionado por un EVA. Este proceso de extraer información mediada por un EVA implica poner en juego otras competencias de tal manera que permita al estudiante aprender.

El tipo de comunicación que se establece entre el docente y el estudiante a través de una plataforma virtual difiere completamente del que se produce en una clase presencial. Por lo tanto, las estrategias empleadas para desarrollar competencias deberán ser también distintas.

Se han realizado estudios que muestran que, entre otros factores de fracaso antes mencionado, está la deficiencia en la comprensión lectora de los ingresantes a las carreras de ingeniería.

En cuanto a los antecedentes, se pueden encontrar diversos artículos que tratan sobre la comprensión lectora en diferentes niveles educativos. Si bien nosotros nos concentraremos en aquellos relacionados a los últimos años del nivel medio y los primeros de la universidad, hay estudios de nivel primario que nos dan indicios de metodologías de investigación que adaptadas pueden ser apropiadas para este proyecto.

Como en todos los campos del pensamiento, las ciencias básicas requieren de un lenguaje científico o específico, [1] por lo que se requiere de ciertas habilidades y competencias para poder dominar o por lo menos lograr

comprender ciertos aspectos de este lenguaje que si bien se correlaciona con la comprensión lectora en general, es específica en el campo del pensamiento matemático. La matemática necesita del lenguaje natural para comunicar sus resultados, pero además se añaden símbolos, fórmulas y vocabulario específico que son necesarios para comprenderlas. La lectura en ciencias requiere además de comprender las palabras del lenguaje natural, entender el sentido, el significado de los símbolos, las fórmulas, los términos específicos, entre otros.

La comprensión lectora, en cualquier nivel escolar, es un proceso complejo que implica la orquestación de diversas habilidades y procesos cognitivos, que van desde la decodificación y reconocimiento de palabras hasta procesos de alto nivel, como la integración del significado de las distintas partes del material leído, con el objetivo de construir un modelo mental coherente del texto [2]. Constituye el medio básico por el que se adquiere información en nuestra sociedad. La comprensión de textos implica la formación de una representación del sentido de lo leído, que toma la forma de un modelo mental o de situación, integrado y coherente. Para lograrlo es necesario que operen los procesos de integración e inferencia. La integración entre palabras y oraciones es necesaria para poder establecer la coherencia local, y las inferencias acerca de diferentes eventos, acciones y estados son necesarias para que el texto forme una totalidad coherente. Además, estos procesos requieren que la información relevante, tanto del texto como del conocimiento del mundo que tiene el lector, estén disponibles y en un estado accesible. La comprensión lectora en matemática supone un concepto amplio, ya que implica la evaluación de propiedades y relaciones expresadas en textos, números, símbolos, gráficos, entre otros.

García Olivera [3] explica que la comprensión lectora es la capacidad que tiene el ser humano de representar mentalmente un texto, de decodificar, analizar e inferir sobre lo que se lee, por lo que este proceso tan complejo es la base del aprendizaje que no sólo le permite al estudiante aprender sino aprender a partir de lo que lee y construir conceptos nuevos. Si bien hace referencia a estudiantes universitarios de una licenciatura, concluye que la lectura y la comprensión es parte fundamental para ampliar el conocimiento, teniendo en cuenta que la mayoría de los textos con los cuales se trabajan en la universidad son del tipo científico, la comprensión de los estudiantes no es la adecuada para este nivel. Otra conclusión es que la competencia lectora es una tarea que se debe reforzar en cada nivel educativo, sin olvidar que el estudiante necesita conocer estrategias de aprendizaje además de estar motivado para poder aprender de manera significativa. También hace referencia a que pocas veces se hacen investigaciones sobre la comprensión lectora en universitarios, sobre las dificultades que presenta el estudiante y los factores que intervienen en dicho proceso. Concluye que la comprensión lectora es una tarea importante en este nivel educativo, ya que los profesores esperan que sus estudiantes comprendan y argumenten los textos que revisan, debido a que en su mayoría son artículos especializados. Se recalca también que la lectura es un proceso interactivo de comunicación en el que se establece una relación entre el texto y el lector quien al procesarlo en lenguaje e interiorizarlo construye su propio significado. La lectura es un proceso constructivo al reconocer que el significado no es una propiedad del texto, sino que el lector lo construye mediante un proceso ya que conforme va leyendo y según sus conocimientos previos y experiencias en un determinado contexto, lo lleva a una nueva situación cognoscitiva.

La comprensión lectora es una competencia que desarrollarla no implica sólo una tarea de los profesores encargados de los primeros años de escolarización, es un proceso que se va construyendo a lo largo de los diferentes niveles educativos con una visión e intención diferentes que le permite al estudiante desarrollar habilidades y emplear estrategias como herramientas para comprender un texto las cuales deberán ser empleadas y aprendidas según su nivel educativo.

Gonzalez Moreyra [4] explora la comprensión lectora inferencial en estudiantes universitarios, identificando las dificultades que ofrecen textos de corte científico para la comprensión lectora. Encuentra que entre los estudiantes universitarios prevalecen aquellos dependientes en textos básicos informativos, documentales y numéricos y también lectores con grandes déficits en la lectura de textos científicos. Indicando la responsabilidad de la educación secundaria en las carencias lectoras del recién egresado pero haciendo énfasis en la responsabilidad de la universidad para desarrollar programas de apoyo y consolidación de las competencias comunicativas.

Si bien todos los investigadores acuerdan que la lectura de textos representa el proceso de descifrar el código escrito, el dominio de la mecánica lectora es un instrumento para alcanzar el objetivo de interpretar los significados que se transmiten a través del texto. Esta comprensión requiere del proceso de atribuir significado a la información que proporciona el texto y de esta forma, el lector debe construir un modelo o representación mental con dicha información.

Por otro lado, y analizando los diagnósticos realizados por diferentes Unidades Académicas, coinciden en que los aspirantes que ingresan a las carreras universitarias poseen, entre otras, "Dificultades y carencias en relación a la lectoescritura y a la interpretación de textos, fundamental para un eficiente abordaje del aprendizaje universitario". Si bien podríamos decir que la problemática proviene de la educación media, los estudiantes ya ingresantes a las carreras de ingeniería trasladan estos problemas a la vida universitaria y nosotros, como docentes de los primeros años, tenemos que poder ayudarlos a lograr un mejor nivel en la lectura comprensiva y sobre todo orientada a la lectura comprensiva en matemática.

El nuevo enfoque de la enseñanza universitaria posee dos rasgos esenciales, uno que apunta a orientar el aprendizaje hacia la comprensión y otro que ayuda a promover un uso estratégico de los conocimientos adquiridos que permitan afrontar la solución de problemas nuevos. Estos rasgos no podrían desarrollarse si los estudiantes no poseen las competencias básicas de ingreso a la universidad. Algunas de ellas, están referidas a los conocimientos, procedimientos, destrezas y actitudes fundamentales para el desarrollo de otros aprendizajes, considerando, entre otras "Comprender e interpretar un texto, elaborar síntesis, capacidad oral y escrita de transferirlo" [5].

Para analizar si un individuo ha logrado una capacidad, se deben tener en cuenta los indicadores de logro como señales que ponen en evidencia un aprendizaje acreditable. Los indicadores facilitan el diseño de tareas o actividades que permiten observar, medir y constatar si el indicador de logro se va alcanzando o no, o en qué medida. A través de dichas tareas el docente podrá evaluar si se satisface o no el aprendizaje a acreditar. En este proyecto se definen indicadores de logro para determinar la comprensión lectora en matemática en los estudiantes de primer año de ingeniería.

Según la "Declaración de Valparaíso" sobre Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano, se denomina "Comprensión Lectora" a la competencia que desarrollan los sujetos en relación con las buenas prácticas de lectura. La comprensión lectora, por lo tanto, no es una técnica sino un proceso transaccional entre el texto y el lector, que involucra operaciones cognitivas y un complejo conjunto de conocimientos. Por lo tanto, la comprensión lectora supone un conjunto de saberes y saber hacer, es decir, procedimientos que implican operaciones cognitivas de diferente nivel de complejidad, fuertemente vinculadas con la elaboración de inferencias.

El nivel esperado en los ingresantes a la universidad y en particular en los ingresantes a ingeniería es el nivel intermedio. Ello supone que deben ser capaces de cumplir con los indicadores de logro relacionados con esta competencia y correspondientes a textos de semi-divulgación, es decir por ejemplo, manuales destinados al aprendizaje específico de una disciplina.

Es por todo lo expuesto que nos preocupa generar estrategias didácticas que promuevan la comprensión lectora en nuestros estudiantes de 1° año de las ingenierías en la cátedra de Análisis Matemático I.

La pandemia ha acelerado el proceso de digitalización y la necesidad de adaptar las estrategias de enseñanza a la nueva realidad a la que se enfrentan nuestros estudiantes universitarios. En los entornos virtuales de aprendizaje que han tenido que utilizar los estudiantes actuales, también son fundamentales los procesos de lectura comprensiva. Estos procesos han sufrido cambios al pasar del manejo de textos impresos a la lectura e interpretación de material digital. Es por esto que resulta necesario conocer las dificultades que les impiden a nuestros estudiantes que promuevan la competencia en comprensión de textos.

La propuesta siguiente pretende contribuir a poner a disposición del medio universitario y no universitario, instrumentos que le permita al estudiante trabajar la comprensión lectora en la asignatura "Análisis Matemático I" y está enmarcada en las corrientes actuales del desarrollo de competencias planteadas por el CONFEDI y por toda la comunidad universitaria.

2 Desarrollo

En la asignatura Análisis Matemático I se trabaja el concepto de "Integral definida y sus aplicaciones" como parte de la unidad 5 y 6. Debido a la situación de pandemia por Covid-19 declarada por la Organización Mundial de la Salud y por las medidas de aislamiento social preventivo solicitadas por el Gobierno Nacional, que ha afectado el desarrollo de las actividades presenciales, se diseñó en el año 2021 un aula virtual para la implementación de esta asignatura.

La metodología para trabajar el concepto de integral definida es la de aula invertida o Flipped Classroom. El trabajo está dividido en etapas, y la 1° de estas etapas consta de los lineamientos que muestra la Fig. 1.

2.1 Etapa 1 - Introducción al tema. Lineamientos generales

En esta etapa se pretende enmarcar el tema a desarrollar.

Se contextualiza a los estudiantes en el cuadro de contenidos y se hace una breve introducción oral de la relación con los saberes previos (Fig. 2).

También se indican las formas de trabajo y objetivos de cada grupo (Fig. 3).

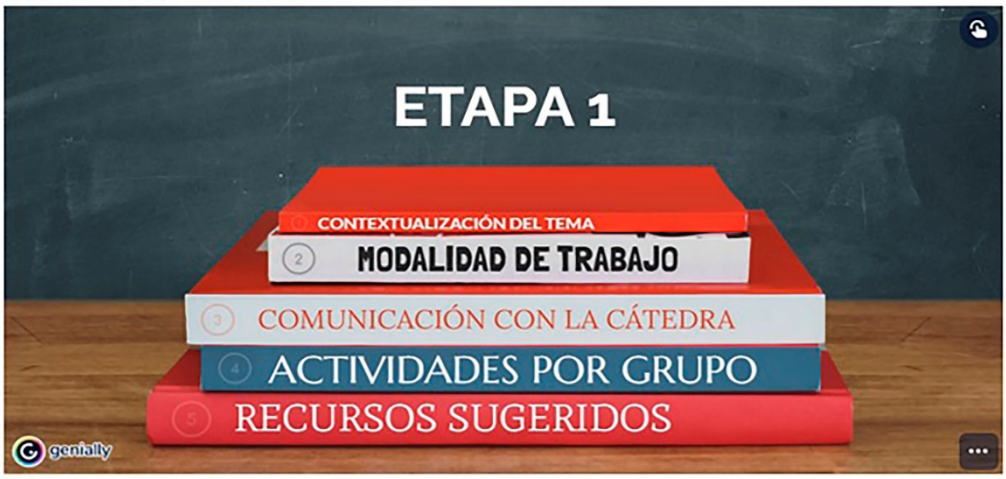


Fig. 1. Presentación de la etapa 1.

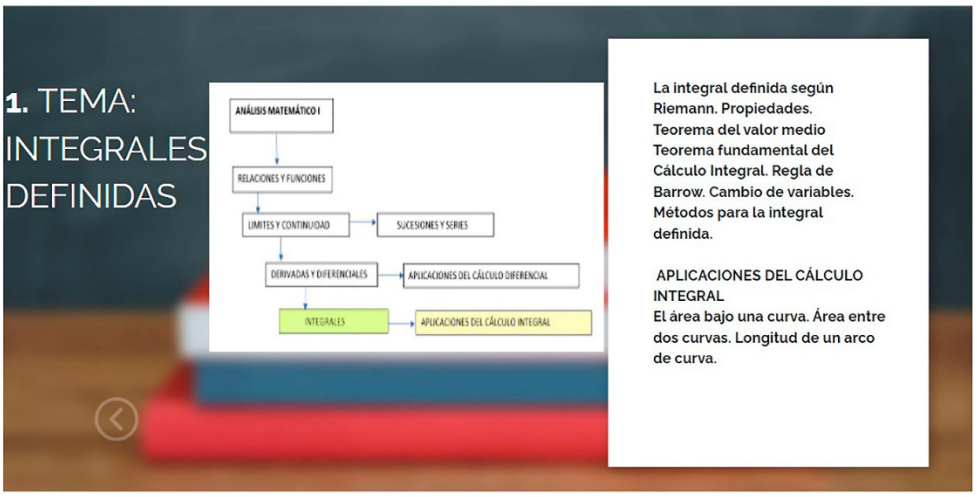


Fig. 2. Contextualización del tema "integral definida".

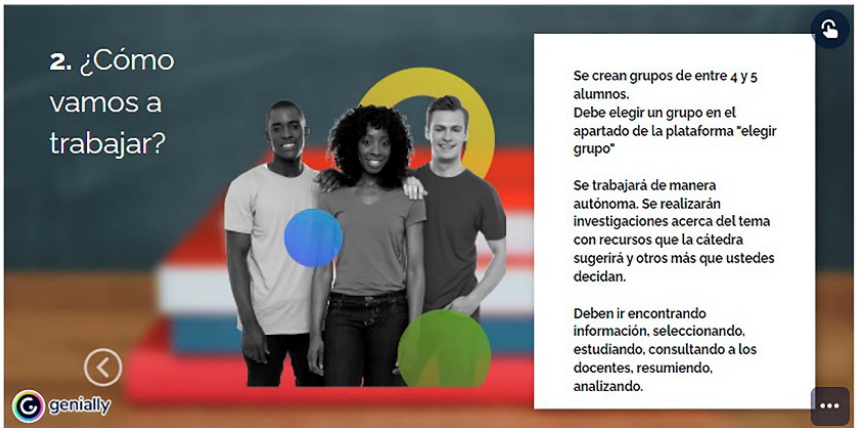


Fig. 3. Modalidad de trabajo.

Se establecen distintas actividades según los grupos de trabajo, por ejemplo:

a) Realizar investigación de propuestas de actividades para compartir con el resto de los estudiantes.

Objetivo: Investigar teoría acerca de integrales definidas para luego comprender la parte práctica y poder abordar propuestas de ejercicios que sean relevantes al contenido.

Propuesta: Realizar un trabajo práctico con diez ejercicios propuestos, ocho de desarrollo y dos de aplicación. Una vez diseñado, validado con el docente de la cátedra se deberá compartir con el curso para que el resto también resuelva y poder comparar con los resultados obtenidos con el grupo que lo diseñó.

b) Desarrollar la parte conceptual del tema abordado.

Objetivo: Investigar teoría acerca de integrales definidas. Apropiar lenguaje matemático. Conocer distintos autores y diferentes visiones. Crear material propio con las propias conclusiones.

Propuesta: Realizar un resumen de la parte conceptual de integrales definidas, su teoría y particularidades, así como las aplicaciones del tema. Explicitar las conclusiones que se obtienen y relaciones conceptuales respecto a los temas anteriores abordados en la materia, mostrados en el cuadro de contenidos. Este resumen deberá ser entregado en PDF. Se sugiere utilizar algún recurso didáctico, interactivo digital, seleccionado de una lista propuesta por la cátedra.

c) Propuestas de preguntas a realizar a partir del análisis de casos.

Objetivo: Investigar y analizar un caso de aplicación para integrales definidas.

Propuesta: Plantear un caso concreto como ejercicio y en base a éste realizar una serie de preguntas. Para poder realizar esto, es necesario contar con la teoría que sustenta la práctica y luego poder concretar el ejemplo. Este ejemplo, así como las dudas durante el proceso de aprendizaje, deberán ser validados con la docente a cargo. Las preguntas deberán estar analizadas y respondidas previamente para poder evaluar al resto de los estudiantes en comparación con las respuestas del grupo original.

Todos los grupos deberán compartir el link de accesos a un documento Google para que la cátedra tenga acceso a los avances en cada etapa.

Una vez que el estudiante ha completado las distintas etapas que involucra la actividad propuesta, para analizar el nivel de comprensión lectora del material trabajado se pide que conteste algunas preguntas presentadas en un padlet, visualizadas simultáneamente con todos sus compañeros (Fig. 4).

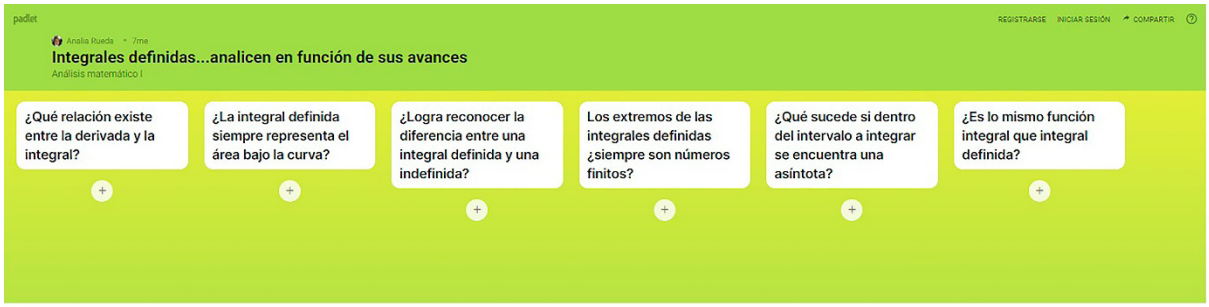


Fig. 4. Análisis de la comprensión lectora alcanzada por los estudiantes.

El objetivo del uso del padlet es poder hacer el seguimiento permanente de las contestaciones e inclusive que haya intercambios entre los grupos.

Las respuestas a las preguntas, permitirá verificar el proceso de construcción de significados que ha realizado el estudiante según la comprensión que haya realizado del material trabajado. Si las respuestas que proporcionan son correctas, entonces podemos pensar que no sólo han obtenido la información, sino que, además, han realizado un proceso de comprensión general, han reflexionado sobre el contenido y relacionando lo leído con los conceptos previos. La posibilidad de poder compartir las respuestas reflexivas y análisis de los contenidos con el resto de los estudiantes permite generar discusiones que también enriquecen su formación, generando la autoevaluación y comparación de las conclusiones propias con respecto al resto del grupo de pares. Este trabajo también forma parte de algunas de las capacidades que se quieren lograr, acrecentando la comprensión lectora y logrando desarrollar trabajo en equipo.

2.2 Etapa 2-Acompañamiento del estudiante y capacitación en software

En esta etapa se realiza el acompañamiento de los estudiantes en la parte práctica para la realización de cálculos y gráficas, además se realiza una explicación de uso de software. También, se dejan tutoriales de acompañamiento en la plataforma Moodle de la facultad para afianzar los saberes desarrollados.

El objetivo en esta etapa está dirigido a mostrar las potencialidades del uso de graficadoras, ya que de otra manera graficar funciones complejas sería casi imposible.

No sólo el uso de estos software son útiles en este trabajo en particular, sino que también abren un abanico de posibilidades para el estudiante durante toda su carrera.

Para poder hacer una reflexión de las potencialidades que tiene aparejado el uso de los software y también realizar un seguimiento al estudiante para que él mismo compruebe si logra realizar análisis mediante gráficas se realiza un podcast con preguntas acerca de una gráfica en GeoGebra en particular y se abre un foro para que respondan. Esto permite la retroalimentación con el docente y la comparación entre los mismos usuarios de los diferentes resultados del análisis.

2.3 Etapa 3-Presentación del trabajo preliminar - Etapa de evaluación formativa

En esta etapa se propone realizar la presentación de trabajos, es decir exponer los temas estudiados, mostrar gráficas y cálculos, establecer conclusiones. Además se propone coevaluar entre pares de grupos, para que se puedan comparar los resultados con respecto al grupo original que realizó el trabajo.

Las retroalimentaciones de cada grupo se realizan a través de una wiki para que todo el grupo pueda trabajar de manera colaborativa en las conclusiones respecto al grupo que le tocó evaluar.

En esta etapa se continúa fortaleciendo la comprensión lectora en los estudiantes y con más ahínco aún ya que de la propia evaluación que hagan de los temas expuestos de los grupos de pares deberán generar una conclusión final, para esto deben tener afianzados los conocimientos previos como resultado de su propia investigación y poder desarrollar una mirada evaluativa del resto de los trabajos, a la vez, esta conclusión será evaluada por el docente de la cátedra.

2.4 Evaluación continua, formativa y sumativa

Durante todas las etapas del proyecto, el docente acompaña al estudiante con retroalimentaciones para que puedan ir conociendo el estado de conocimiento a partir de la lectura e investigación del tema abordado. Esta evaluación formativa continua, tiene el objetivo de acompañar al estudiante y lograr verificar si ha logrado comprender de forma satisfactoria el saber desarrollado.

Esta evaluación, queda a disposición permanente del curso, en la plataforma, a partir del siguiente cuadro:

Tabla 1. Modalidad de evaluación continua.

ETAPAS DE PROYECTO	OBSERVACIONES	FINALIZADO
ETAPA INVESTIGACIÓN		SI / NO / FALTA
ETAPA DE PRODUCCIÓN DE GRÁFICAS		SI / NO / FALTA
ETAPA DE RETROALIMENTACIÓN A OTROS GRUPOS		SI / NO
ETAPA DE ENTREGA DE TRABAJO FINAL		(NOTA FINAL)

3 Conclusiones y trabajos futuros

En resumen, la pandemia por Covid- 19 trajo consigo innumerables cambios, uno de ellos introducir la modalidad virtual en un contexto en el que antes se pensaba únicamente como presencial. El fundamento de este proyecto es que se pongan en marcha dominios tales como la comprensión, el análisis, el juicio evaluativo, la percepción, la

atención y la comunicación a partir de textos de semi-divulgación científica [9]. Principalmente, la comprensión lectora es uno de los principales problemas que se constata en los estudiantes de los primeros años de ingeniería.

El uso del "aula invertida" o Flipped Classroom, como enfoque metodológico, favorece el desarrollo de todas y en principal esta última competencia, mejorando el proceso de aprendizaje en los ingresantes de la FRM-UTN. Lo que se busca a través del aula invertida también, es promover la iniciativa por aprender en forma autónoma y que el estudiante se transforme en agente activo del proceso de aprendizaje. La actividad, no está centrada en los recursos digitales en sí, sino en el desarrollo de la comprensión lectora en matemática mediada por un saber de la asignatura Análisis Matemático I.

El uso de plataformas virtuales ha permitido generar estrategias en los procesos de enseñanza y aprendizaje que permiten que el estudiante asuma la responsabilidad frente a su propia formación, interactuando con sus compañeros, mejorando su pensamiento crítico y, en consecuencia, su rendimiento académico.

La propuesta presentada permite la detección por parte del docente de dificultades o fortalezas del estudiante, y a éste le permite evidenciar si ha realizado un correcto proceso de aprendizaje. Esto produce una acción motivadora para la adquisición de conocimiento significativo.

Debido a la pandemia por COVID-19 la propuesta fue pensada y ejecutada en una modalidad de cursado virtual, pero la misma hoy se trabaja para su implementación en un contexto híbrido.

En trabajos posteriores, en el marco del PID UTN 6558 se presentarán los resultados obtenidos en la puesta en funcionamiento de esta propuesta.

Referencias

1. Santos Barón, E.: Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica. *Revista UNION*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No. 43, pp. 49-69 (2015)
2. Vernucci, S; Canet-Juric; L.; Andrés, M.; Burin, D: *Comprensión Lectora y Cálculo Matemático: El Rol de la Memoria de Trabajo en Niños de Edad Escolar*, Vol.26, No.2 pp. 415–438. http://dx.doi.org/10.7764/psykhe. 26.2.1047. Accedido el 10 de diciembre de 2020.
3. García Olivera, B.E.; Nájera Martínez, N.A.; Téllez Hernández, M.G: *Comprensión Lectora en Estudiantes Universitarios.* Tesis de Licenciatura en Psicología Educativa. Universidad Pedagógica Nacional Ajusco. México DF (Eds) (2014)
4. González Moreyra, R.: *Comprensión lectora en estudiantes universitarios iniciales*. Universidad de Lima. Perú (1998)
5. CONFEDI. *Competencias y perfil del ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación*. (Documentos Plan Estratégico ASIBEI). ASIBEI (Eds) (2016)
6. Taylor, W.: *Cloze procedure: A new tool for measuring readability*. Journalism Quarterly 30, pp. 415-433. (1953)
7. Rodriguez Trujillo, N.: El procedimiento "cloze": un procedimiento para evaluar la comprensión de lectura y la complejidad de materiales. *Revista Lantinoamericana de lectura*. (1983)
8. Artigue, M.: *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp.33-59 (1995)
9. Steiman, J.: *Las prácticas de enseñanza –en análisis desde una Didáctica reflexiva–.* Miño y Dávila. (2020)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Evaluación del aprendizaje competencial : Diseño, implementación y Resultados del taller Complementario de Aprobación Directa

Dádamo M.[1], De Federico S.[1] Cánaves, G.[1]
[1]Departamento Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica Nacional,
Facultad Regional Rosario, 2000, Rosario, Argentina
{mdadamo, sdefederico, gcanaves}@frro.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo plantea un Taller Complementario de Aprobación Directa con alumnos de Análisis Matemático I de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información, basado en un enfoque competencial e interdisciplinar, aplicando el modelo de aula invertida con apoyo virtual y recurriendo al uso de diferentes softwares para generar registros de representación semiótica, como un primer acercamiento a la compresión de los conceptos básicos de Sucesiones y Series Numéricas. El Taller incorpora situaciones problemáticas que aplican conceptos y cálculos para luego interpretar las soluciones; contempla las paradojas que puedan aparecer y se plantean contraejemplos semejantes que permitan al estudiante profundizar/afianzar los conceptos e indagar en situaciones análogas. La experiencia evaluativa responde a un diseño cuali/cuantitativo. Se detallan procedimientos y técnicas, así como resultados y conclusiones. Acercarnos a las dificultades propias en el dominio de las competencias matemáticas, resultó una labor enriquecedora para los docentes, como así también para los alumnos participantes.

Palabras Clave: Evaluación competencial, Modelos interactivos, Series Numéricas.

1 Introducción

Con la situación sanitaria excepcional devenida por la pandemia COVID-19, las instituciones universitarias se vieron obligadas a adaptar sus prácticas pedagógicas. La popularidad que alcanzaron las plataformas de videoconferencia (Zoom, Teams, Meet, Jitsi, etc.) como herramientas de reemplazo a la clase presencial, en la mayoría de los casos, fueron una simple traslación de la clase expositiva clásica y tradicional en el aula, por otra, mediada por un dispositivo tecnológico. Debido a múltiples factores, la participación de los estudiantes se torna aún más inextricable, y lograr capturar su atención es una tarea ardua y desafiante

Particularmente, en las carreras de Ingeniería, las matemáticas son un insumo insustituible y vital para su desarrollo y aplicación. En el diseño curricular de estas carreras, las matemáticas puras y las aplicadas representan principios fundacionales de los diversos campos disciplinarios que conforman el currículum de ingeniería y se estudian simultáneamente varias asignaturas relacionadas directamente con matemáticas. Tiana (2011), señala que la relación entre áreas y asignaturas, de un lado, y competencias, de otro, no es biunívoca, sino que hay un entrecruzamiento múltiple.

En el contexto de la educación superior y particularmente en el campo de la educación matemática, Autino y Digión refiere que sigue muy instalada la idea de la evaluación como algo periférico a los problemas de la didáctica y aprendizaje de esta ciencia, arraigándose una concepción de la evaluación como una actividad terminal, utilizando el examen como única evidencia del progreso de los estudiantes y como instrumento que cumple la función de selección.[1]

De ello se deduce, la necesidad de definir estrategias para la mejora de las competencias de los alumnos y un

mayor apoyo de las competencias transversales están entre nuestros desafíos.

En la sede Regional Rosario (UTN-FRRo), nos hemos interesado en los procesos de evaluación como elemento clave del proceso de gestión del conocimiento-aprendizaje competencial, como así también en los diferentes impactos que éstos generan en los distintos contextos al que el sistema educativo está integrado y al de la sociedad. En este marco general, hemos diseñado una experiencia evaluativa del último eje temático Sucesiones y Series Numéricas en la asignatura Análisis Matemático I de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información (AMI-ISI). Experiencia que se implementó en un Taller Complementario de Aprobación Directa y consistió en permitir a los alumnos elegir entre dos modos de evaluación diferentes: examen escrito tradicional o lo que hemos caracterizado como modelo activo y digital de aprendizaje. Este modelo de aprendizaje, pretende invertir los momentos y roles de la enseñanza tradicional, donde la asignatura, habitualmente impartida por el docente, pueda ser atendida en horas extra-clase por el estudiante mediante herramientas multimedia; de manera que las actividades de práctica, usualmente asignadas para el extra-cursado, puedan ser ejecutadas en el aula a través de métodos interactivos de trabajo colaborativo, aprendizaje basado en problemas y realización de proyectos.[2] La búsqueda primordial del taller es que el alumno asuma un rol protagónico en sus procesos de gestión de aprendizaje que el que venía ocupando tradicionalmente y la realización de las actividades orientadas a alcanzar el desarrollo de habilidades mediada por la tecnología, el empleo creativo y efectivo de las potencialidades de las TICs, una complementariedad con el trabajo realizado por otras áreas, o sea, un entrecruzamiento múltiple entre áreas, materias y competencias.

2 Marco Teórico

2.1 Evaluación Competencial del aprendizaje. Desarrollo de habilidades del pensamiento

En la asignatura Análisis Matemático I de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información (AMI-ISI) de nuestra Universidad se están definiendo distintas estrategias didácticas combinadas/híbridas para delinear un retorno a la presencialidad, basadas en un enfoque competencial e interdisciplinar, mediadas por los aprendizajes asistidos por computadora computer assisted learning (CAL) y centradas en la inclusión y retención del estudiante del primer nivel de la carrera.

En la "Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina", el CONFEDI propone evaluaciones apropiadas para un modelo de aprendizaje orientado al desarrollo de competencias y centrado en el estudiante.[3] Llevar el nuevo paradigma conformado por el ACE y la EC no sólo a las tareas y las evaluaciones formativas realizadas durante el año, sino también a las evaluaciones sumativas nos plantea todo un desafío; siguiendo a Tobón, la evaluación de una competencia debe entenderse como una experiencia significativa de aprendizaje y formación, basada "en la determinación de los logros y los aspectos a mejorar en una persona respecto a cierta competencia, según criterios acordados y evidencias pertinentes, en el marco del desempeño de esa persona en la realización de actividades y/o el análisis, comprensión y resolución de problemas del contexto profesional, social, disciplinar e investigativo, considerando el saber ser, el saber conocer, el saber hacer y el saber convivir".[4]

Organismos internacionales como UNESCO y CEPAL se han expresado sobre el acto de evaluar, cuyo sentido no se centraría en hacer explícito cuánto recuerda el alumno sobre determinado tema, sino en hacer visible su capacidad para apropiarse críticamente de los lenguajes especializados y hacer relaciones y preguntas que lo conduzcan por los caminos de la interconectividad, de lo complejo [5]

En consecuencia, es importante que los profesores investiguen acerca de la manera de introducir mejoras para tratar de revertir las dificultades que se observan en desempeño de los estudiantes, en el transcurso del primer año en la Universidad señala Seluy y Zucarelli. Este nuevo escenario implica adaptaciones, transformaciones e innovaciones que conllevan una capacitación continua de los docentes. [6]

Al respecto, en la cátedra AMI se debatieron ideas de inducir los contenidos temáticos a través de "atractores": ¿Por qué la ingeniería se interesa en modelos funcionales?, ¿en qué supuestos teóricos se fundamentan los modelos funcionales?,¿qué categorías conceptuales conllevan estos modelos?; un segundo aspecto considerado fue el acceder a los "nodos", y cómo disponer del recurso tecnológico para la resolución de problemas contextualizados: ¿Qué aportan las gráficas funcionales a la especialidad ingenieril que curso?, ¿qué sistemas de graficación son apropiados para obtener gráficas funcionales de mi interés?; y un tercer concepto analizado fue la generación de un espacio tecno-cultural institucional y redárquico que propicie la inteligencia colectiva: ¿Cómo nos organiza-

mos para llevar adelante aquello que más nos interesa de la propuesta?, ¿qué creemos que estamos aportando a mi entorno de trabajo con la propuesta?

Fernández de Alaiza, se refiere a "nodos de articulación interdisciplinarios", que en el caso de la educación superior, son considerados "como aquellos contenidos de un tema de una disciplina o asignatura, que incluye conocimientos, habilidades y los valores asociados a él -competencias- que sirven de base a un proceso de articulación interdisciplinaria en una carrera universitaria dada para lograr la formación más completa del egresado, es decir el futuro profesional".[7]

La conformación consciente de nodos apunta al desarrollo de los perfiles particulares de los estudiantes, su independencia cognoscitiva, los modos de transferencia del conocimiento a nuevas situaciones, mediante indicadores, un compromiso con la búsqueda, enfrentamiento y solución de problemas.

Los estudiantes de hoy necesitan comprender las relaciones que existen entre conceptos clave, los modos disciplinados de razonamiento y los hábitos reflexivos que les permitan reconocer configuraciones repetidas, encontrar significado y dar sentido, sacar conclusiones generales y extrapolar las lecciones aprendidas en un determinado contexto a otros ámbitos, académicos o no. En realidad, los alumnos de hoy deben aprender a contribuir en la generación del conocimiento y los profesores que apuntan a este objetivo no se conforman simplemente con transmitir un saber producido por otros, sino que deben preparar a sus estudiantes para que éstos piensen por sí mismos .[8]

3 Metodología

3.1 Justificación

En la formulación de los objetivos y resultados de aprendizaje, las estrategias metodológicas en las actividades, y los modos de evaluación propuestos en la planificación se puede observar su relación con las competencias genéricas/transversales del modelo de enseñanza aprendizaje orientado al desarrollo de competencias y centrado en el estudiante propuesto por el CONFEDI.[3]

La planificación de la cátedra AMI señala los Objetivos de aprendizaje basado en Competencias Genéricas:

a) Competencias Tecnológicas
- Fomentar la argumentación en lenguaje coloquial y/o simbólico para explicar, justificar y/o verificar procedimientos empleados en el cálculo de Series relacionado con el proceso de los términos sucesivos en el contexto de una situación problemática.
- Propiciar el uso de las TIC y software de aplicación para potenciar el aprendizaje de las relaciones lógicas entre los conceptos, técnicas y modelos matemáticos propios de las funciones, el límite, la integral, la sucesión y series, conectando los aspectos fundamentales de los nuevos contenidos que se trabajan con los que ya conocen.

b) Competencias Sociales, Políticas y Actitudinales
- Promover el aprendizaje autorregulado facilitando el empleo de diversos recursos bibliográficos y multimediales en la construcción de argumentos válidos y aceptables de las producciones escritas u orales.
- Estimular la colaboración y el trabajo en equipo.

3.2 Estrategias metodológicas

Nuestro desafío responde a la pregunta-problema: ¿cómo generar una propuesta evaluativa única para cada alumno que entrame saberes (conocer, hacer, ser) con recursos (articular, movilizar, integrar contenidos del campo disciplinario del cálculo en una variable en el contexto de la educación ingenieril)?

Nos hemos interesado en las nuevas ecologías de aprendizaje emergentes en un planeta mundo en el cual nuevas políticas globales signadas por la aceleración del cambio tecnocientífico y social generan tendencias y contextos que señalan la necesidad de innovar nuestros modos de enseñar matemáticas en ingeniería.

3.2.1 Descripción de la actividad: Etapas

Con la participación en el Taller propuesto, los alumnos alcanzan la Aprobación de la asignatura AMI. Se llevó a

cabo en formato online (Zoom, Campus Virtual Global) y con la exposición presencial final. La actividad consta de diferentes etapas:

a) Inicialmente, guiada por el docente, se hace una revisión desde una visión histórica epistemológica de la estructura teórica-práctica que acompañará al razonamiento en la construcción de distintas series, de las que se analizarán su convergencia/divergencia, sus cotas superiores y/o inferiores y su monotonía. Desarrollado en software Maxima y Geogebra, ambos softwares libres.
b)Luego respondieron cuestionarios ejemplos/contraejemplos, como autoevaluación, verificar la apropiación correcta de los conceptos y tener la oportunidad de afianzarlos, aclararlos, corregirlos, antes del Taller.
c) Se mostraron dos situaciones motivadoras:

1) el cuerno o trompeta de Gabriel, también llamada trompeta de Torricelli (1641), una figura geométrica que tiene la característica de poseer un área infinita con un volumen finito. Es la superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje *x*, el gráfico de la función , con dominio $x \geq 1$. https://www.youtube.com/watch?v=0Re12vq4z2g
2) la torre de Hanoi, como estrategia lúdica. Utilizando como eje la recursividad en problemas relacionados con el perfil de la carrera y su vinculación con asignaturas https://www.youtube.com/watch?v=lilBGvaOSy8.

d) Inicialmente en el Taller se solicitó a los estudiantes la resolución de una situación problemática, se muestran a continuación, que cuenta con una estrategia de evaluación formativa y por pares. Se formarón 9 grupos de dos alumnos cada uno a los que se les dió en forma arbitraria los seis casos en estudio. En una primera instancia, el docente interactuó con los grupos, provocando situaciones de análisis y cuestionamientos, identificando y registrando aspectos del desempeño de cada alumno, en base a criterios evaluatorios predefinidos. En una segunda instancia, el docente promoviendo el debate entre los grupos, guiándolos en cómo realizar las valoraciones, generando así un feedback inmediato entre ellos.
e) Al finalizar, para rastrear motivaciones y preferencias que nos ayuden a elaborar propuestas futuras.se solicitó a los alumnos que relaten brevemente cuáles fueron las dificultades/obstáculos con las/los que se encontró al realizar las actividades del taller. ¿Qué modificaciones sugeriría para evitarlos?

3.2.2 Problemática propuesta. Estudio de Casos

El proceso de estabilización y corrección de errores de un producto de software evoluciona dinámicamente desde las pruebas hasta el post lanzamiento. Los usuarios cuentan con el helpdesk en donde, además de recibir ayuda para su uso, también comunican los errores encontrados. Se busca alcanzar un estado estable a medida que el software se va utilizando.

a) Una empresa de software utiliza la fórmula de cálculo de costo de corrección de errores como la sumatoria de un valor fijo C por el factor $\frac{1}{n^k}$, donde *k= 1,2,3,... x,* $\sum_1^n C \times \frac{1}{n^k}$

Para el caso de k=2, resulta la $\sum_1^n C \times \frac{1}{n^2}$

Esta situación problemática se asemeja al denominado: "Problema de Basilea-Euler" $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, sumas infinitas de números da un valor finito (convergente y su suma menor que 2). Se pide:

i) Observar cómo las sumas parciales de la serie están acotadas por arriba. Analizar la tendencia de la serie construida, interpretar su convergencia.

ii) ¿Cómo propondría la construcción de la serie, considerando el uso de las estructuras lógicas de programación aprendidas en otras asignaturas de primer año?

iii) Dada la desigualdad:(suma enésima): $s_n < f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$, ¿ Qué significa dicha expresión?
iv) Haciendo la suma infinita, ¿Qué criterio se propone para determinar la misma? Y le pedimos que interprete y analice la información obtenida.

Para el caso de k=1, la $\sum_1^\infty C \times \frac{1}{n^k}$

Considerar las series: $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ y $\sum_1^{\infty} 2 + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ .Se pide que:

i) Aplicando una estructura lógica recursiva y el uso anidado de comandos, seleccione el código y obtenga los términos y sumas parciales de ambas series.
ii) Indagando diferentes criterios analice el carácter de las mismas.
iii) Verifique si se cumplen las dos condiciones para determinar la convergencia de la serie alternante.
iv) Interprete y analice la información obtenida.

Para el caso de $k = \frac{1}{2}$, la $\sum_1^{\infty} C \times \frac{1}{n^k}$, resulta la $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}}$. Se pide:

i) Aplicar una estructura lógica recursiva y usar el anidado de comandos, seleccionar el código y obtener los términos y sumas parciales de la serie.
ii) Indagar diferentes criterios analizando el carácter de las mismas.
iii) Interpretar y analizar la información obtenida.

b) Una empresa de software utiliza la fórmula de cálculo de costo de corrección de errores como la sumatoria de un valor fijo C multiplicado por k^n : la $\sum_{\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{k})^{\boldsymbol{n}}$, con k mayor o menor que 1

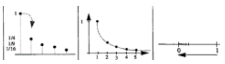
Para el caso $k = \frac{\sqrt{3}}{5} < 1$, nos queda: $\sum_{\mathbf{1}}^{\infty} (\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{5}})^{\boldsymbol{n}}$ (progresión geométrica de razón r, con r ≠ 0). Se pide:

i) Observar cómo las sumas parciales de la serie están acotadas por arriba.
ii) Proponer la construcción de la serie considerando el uso de las estructuras lógicas de programación aprendidas en otras asignaturas de primer año.
iii) Analizar la tendencia de la serie construida, interpretar su convergencia y en el caso de converger determine su suma, ¿Qué significa dicha expresión? ¿Qué criterio se propone para determinar la misma?

3.2.3 .Criterio de evaluación

En base de los objetivos de aprendizaje basado en las competencias señalas en la planificación de la cátedra AMI se detallan los indicadores de logros del aprendizaje por los alumnos Se aplica una Rúbrica de Evaluación diseñada para esta actividad en la Tabla 1.

Tabla 1. Rúbricas de evaluación de las actividades de Sucesiones y Series.

	Criterios de evaluación	Niveles de desempeño		
		Inicial	**Satisfactorio**	**Experto**
Representación conceptual CG 1 a.1. Organizar los datos	Aplicar la complementariedad entre las argumentaciones: -Aproximación (cuando alcanzan un estado final /límite) -Variación (movimiento-un estado final pasa a inicial, y así sucesivamente) -Graficación (tendencias, parámetros)	No puede lograr la argumentación en una representación conceptual	Hace la representación conceptual o logra complementariedad entre las distintas argumentaciones.	 Hace las representaciones conceptuales y logra la argumentación.
	Explicar el comportamiento de convergencia, su acotamiento, su monotonicidad.	Incorrecto uso del lenguaje matemático con explicación insatisfactoria de otros contenidos, límites, vecindad puntos singulares.	Explicación pobre sin el uso correcto del lenguaje matemático.	Explicación y correcto uso del lenguaje matemático.
Desarrollo procedimental CG1 b.1. generar diversas alternativas	Aplicar los criterios en plantear el analizar la convergencia de la serie en forma analítica y gráfica.	No reconoce los criterios	Aplica los criterios sin avanzar en lo metodológico	Aplica los criterios acordes a la metodología procedimental.
	Desarrollar capacidad de análisis, capacidad de síntesis, de reflexión en el desarrollo de los términos sucesivos de la serie.	Prueba los algoritmos con los diferentes fundamentos matemáticos que se basan en las distintas estrategias del cálculo.	Coordina la comprensión de los contenidos con los procesos estratégicos pero no lograr los esquemas de construcción .	Crea nuevos algoritmos considerando los fundamentos matemáticos.
Aproximación interdisciplinar del tema CG1. c.1. y c.3. realiza el diseño de la solución tecnológica	Relacionar nuevas situaciones de aprendizaje con experiencias anteriores y saberes de otras disciplinas al programar los algoritmos recursividad	Logra relacionar el tema de la recursividad con el de la asignatura AyED. No puede comprender en que parte del código se realiza la misma.	Logra relacionar el código recursivo de los ejemplos dados con el de la asignatura AyED. Necesita ayuda para construir nuevos algoritmos recursivos del tema	Conecta y relaciona en forma óptima los algoritmos dados de ej con algoritmos recursivos estudiados en AyED. Reconoce y comprende las líneas de código y sabe crear nuevas en situaciones problemáticas
	Demostrar capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos (abstracción lógica deductiva)	Puede abstraer el problema para la obtención de parámetros necesarios para la construcción de un algoritmo recursivo pero no puede concretarlo.	Abstrae lógicamente el problema, comprende la estructura del algoritmo recursivo. Necesita ayuda para la obtención de parámetros.	Abstrae lógicamente el problema, comprende la estructura del algoritmo, obtiene los parámetros y variables necesarios. Construye óptimamente el algoritmo del problema planteado.
Ecológico-Contextual. CG6. Desempeñarse en equipos de trabajo	Trabajo en equipo y colaboración. Empatizar con el alumnado. irregular responsabilidad en el grupo	Dividieron las funciones y trabajos.	Complementaron sus habilidades entre sí. Lo comunican con lenguaje claro. Irregular responsabilidad en el grupo.	Trabajaron coordinadamente, compartiendo las responsabilidades. Lo comunican con lenguaje correcto entre pares.

3.2.3 .Respuestas desarrolladas por los alumnos a la problemática planteada

En las siguientes figuras se muestran parte de los trabajos realizados por los alumnos, donde cada grupo presentó las soluciones de la problemática según sus inquietudes e investigaciones mediante el uso de software. Se aplico

el programa Pascal para la construcción de la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, basándose en el Problema de Basilea (Figura 1) y el graficador Geogebra. (Figura 4 **). S**e observa el código planteado, las imágenes de las ecuaciones utilizan una extensión de Google Slides llamada "Auto-LaTeX Equations", al escribir las ecuaciones deseadas en LaTeX entre $$ y en la extensión mencionada lo convierte la imagen de la ecuación y se gráfica usando: https://www.geogebra.org/m/S68dtsVa. Para poder correr los algoritmos mostrados (programados en JavaScript/NodeJS) con el link: https://replit.com/languages/nodejs, el lenguaje de programación está seleccionado (NodeJS y JavaScript son equivalentes para este propósito) y se utiliza: https://paiza.io/es/projects/new (eligiendo el lenguaje JavaScript). (Figuras 2, 3, 5, 6 y7)

$$\sum_{k=1}^{n} C \times \frac{1}{k^2} = \frac{C}{1^1} + \frac{C}{2^2} + \frac{C}{3^3} + \frac{C}{4^4} + \ldots + \frac{C}{n^n}$$

```
begin
c:=8;            //cualquier constante
suma:=0;
writeln('Ingrese cantidad de términos a sumar o 0 si quiere conocer la suma infinita: ');
readln(n);
if (n>0) then
begin
        for i:=1 to n do
        begin
                suma:= suma + c/(i * i);
        end;
end;
else
begin
        suma:= (c * 3.14)/6;
end;
writeln('La suma es: ',suma);
end.
```

$$S_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \int_1^\infty x^{-2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{t} - (-1) \right] = 0 + 1 = 1$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < 2$$

Fig.1. Análisis de la Serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ convergente.

```
1  const sucesion = (n) => 1 / n ** 2 ;
2
3  const imprimirSumasParciales = (a, n) => {
4    let sumaParcial = 0;
5  for (let i = 1; i !== n + 1; i++) {
6    sumaParcial += a(i);
7    console.log(`la suma parcial s${i} vale:`,
   sumaParcial);
8  }
9  };
10
11 imprimirSumasParciales(sucesion, 10);
12
```

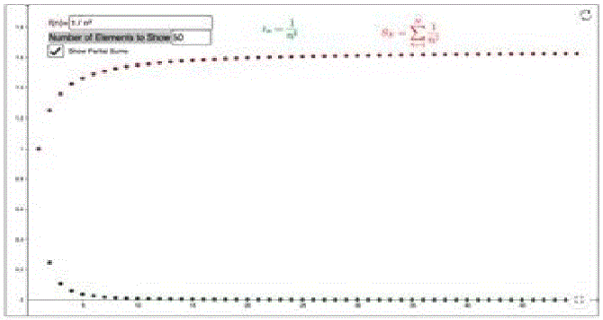


Fig. 2. Serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ analizada en en Python. Gráfica generada en Geogebra Presenta cota superior y cota inferior.

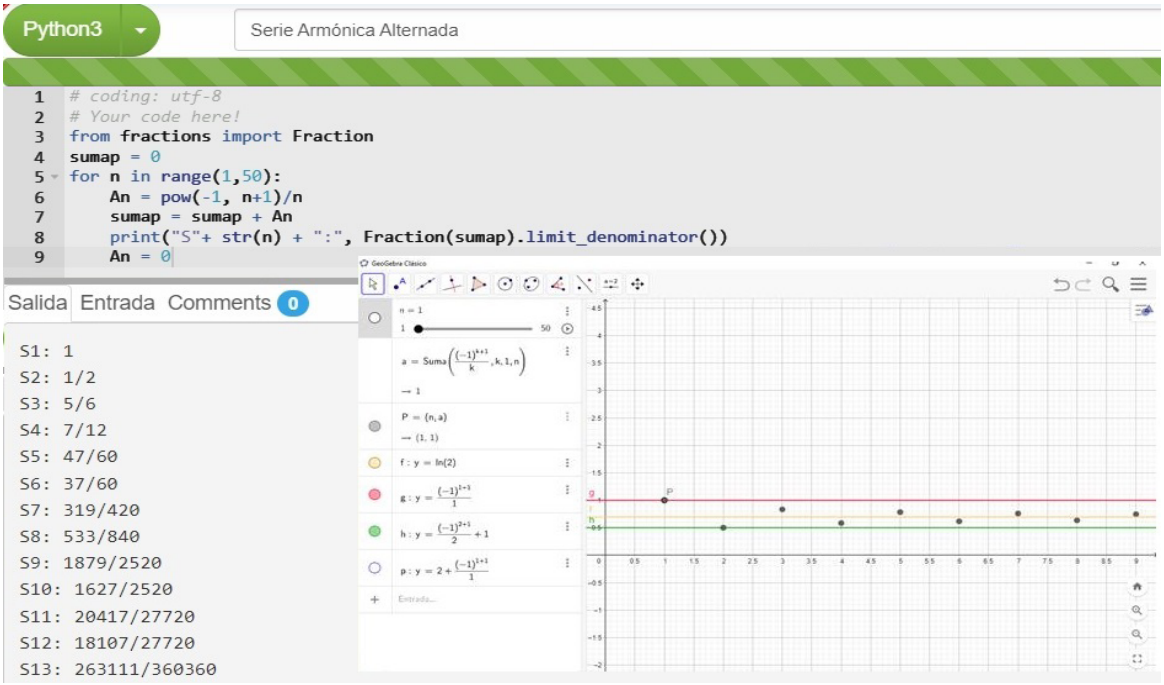


Fig.3. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ Serie Convergente analizada en Python. Gráfica generada en Geogebra. Cota inferior y superior

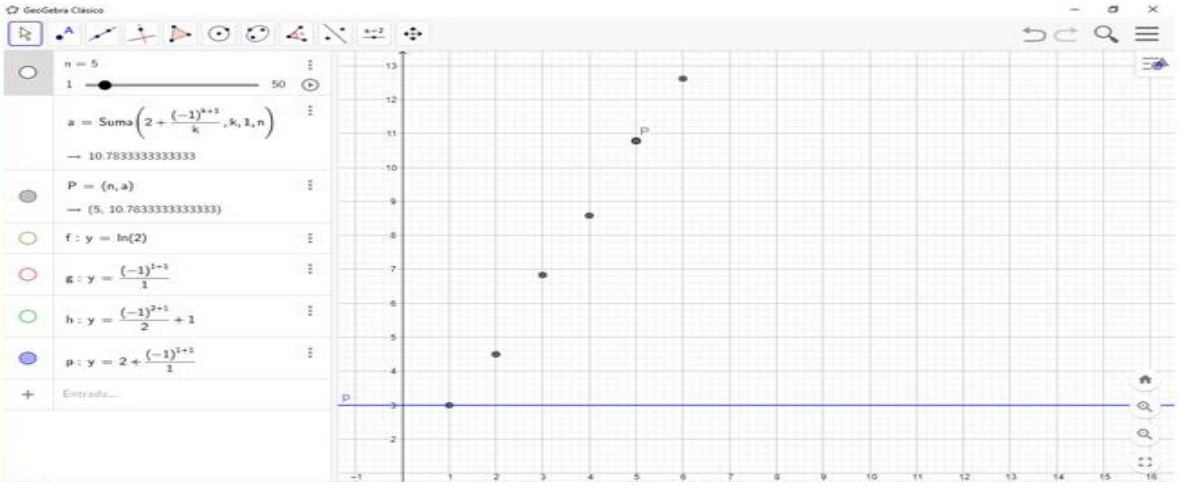


Fig.4. Serie $\sum_1^\infty 2 + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ divergente analizada en Geogebra. Presenta cota inferior.

```
const sucesion = (n) => return (3*0.5/5)*n;

const imprimirSumasParciales = (a, n) => {
                let sumaParcial = 0;
        for (let i = 1; i !== n + 1; i++) {
                sumaParcial += a(i);
                console.log(`la suma parcial s${i} vale:`, sumaParcial);
                }
};

imprimirSumasParciales(sucesion, 10);
```

```
la suma parcial s1 vale: 0.34641016151377546
la suma parcial s2 vale: 0.46641016151377546
la suma parcial s3 vale: 0.5079793808954285
la suma parcial s4 vale: 0.5223793808954285
la suma parcial s5 vale: 0.5273676872212268
la suma parcial s6 vale: 0.5290956872212268
la suma parcial s7 vale: 0.5296942839803226
la suma parcial s8 vale: 0.5299016439803226
la suma parcial s9 vale: 0.5299734755914141
la suma parcial s10 vale: 0.5299983587914141
```

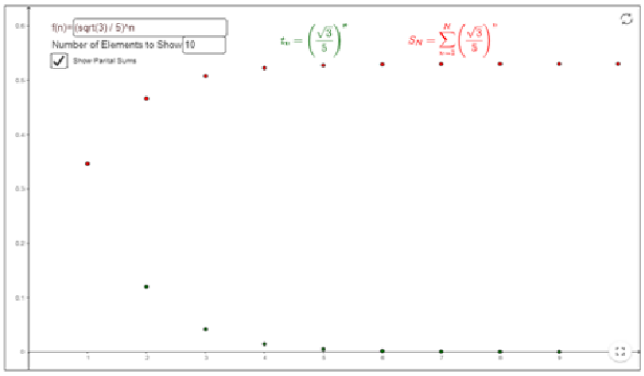


Fig.5. Serie $\sum_1^\infty (\frac{\sqrt{3}}{5})^n$, analizada en Python. Gráfica generada en Geogebra.

```
1  import math
2  def fun(n):
3      return 1/pow(n,1/2)
4  def terminos(n):
5      for  i in range(1,n+1):
6          print(fun(i))
7  def sumas_p(n):
8      suma = 0
9      for i in range(1,n+1):
10         suma = suma + fun(i)
11         print(suma)
12 a = int(input('Ingrese la cant de terminos: '))
13 print('Terminos:')
14 terminos(a)
15 print('Sumas parciales')
16 sumas_p(a)
```

```
Ingrese la cant de terminos:
3
Terminos:
1.0
0.7071067811865475
0.5773502691896258
Sumas parciales
1.0
1.7071067811865475
2.284457050376173
```

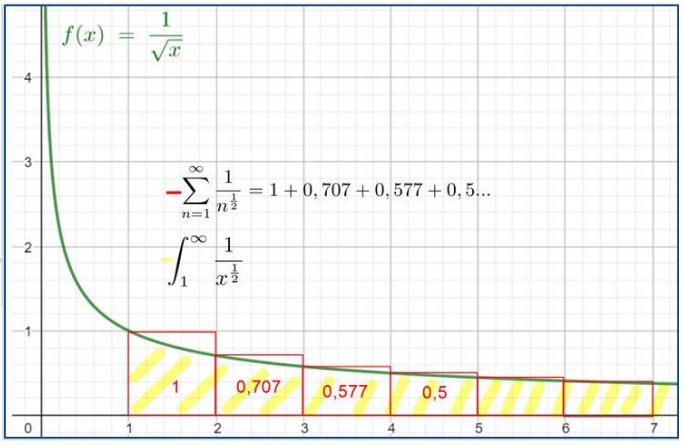


Fig.6. Serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, divergente analizada en Python. Gráfica generada en Geogebra.

Recursivo

Cálcula la suma parcial

```
float termino(int i){
  float res = 1.0 / (pow(i, 0.5));
  printf("[%i]: 1/(%i^0.5): %f\n", i, i, res);
  return res;
}
```

Cálcula la sumatoria

```
float sumatoria(int n){
  if(n == 1)
    return termino(n);

  return (termino(n) + sumatoria(n - 1));
}
```

```
[10]: 1/(10^0.5): 0.316228
[9]: 1/(9^0.5): 0.333333
[8]: 1/(8^0.5): 0.353553
[7]: 1/(7^0.5): 0.377964
[6]: 1/(6^0.5): 0.408248
[5]: 1/(5^0.5): 0.447214
[4]: 1/(4^0.5): 0.500000
[3]: 1/(3^0.5): 0.577350
[2]: 1/(2^0.5): 0.707107
[1]: 1/(1^0.5): 1.000000
1.707107
2.284457
2.784457
3.231671
3.639919
4.017884
4.371437
4.704771
5.020998
```

```
const sucesion = (n) => {
                return 1/n**0.5; };
const imprimirSumasParciales = (valorEn, cantDeSumas,
sumaParcial = 0, n = 1) => {
                If (n === cantDeSumas+1) return sumaParcial;
                sumaParcial += valorEn(n);
                console.log('la suma parcial s%{n} vale:' ,
 sumaParcial);
                n++;
                return imprimirSumasParciales(valorEn,
cantDeSumas,
sumaParcial, n)
};
imprimirSumasParciales(sucesion, 10);
```

Fig. 7. Serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ analizada en Python. Gráfica generada en Geogebra.

Resultados

En la Figura 8 observa la sumarización de la aplicación de las rúbricas de evaluación especificadas en la Tabla 1.

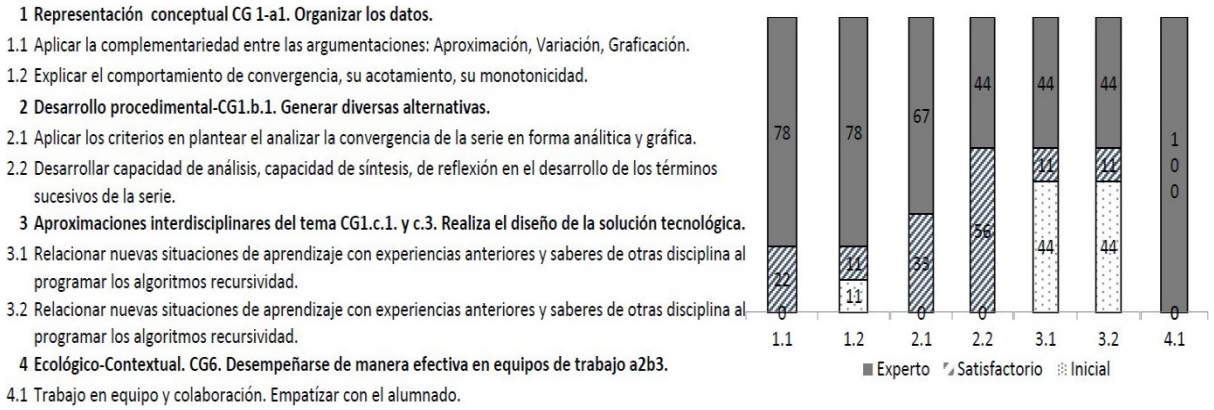


Fig.8. Valores obtenidos de la aplicación de rúbricas de evaluación de las actividades.

3.3 Logros de aprendizaje promedio del grupo de alumnos

De los resultados obtenidos podemos destacar el alto número de alumnos que respondieron bien ante la necesidad de realizar la representación conceptual, en el uso de los registros de representación gráfico y algebraico en un primer acercamiento al análisis de la comprensión de los alumnos sobre los conceptos básicos de las series, y al desarrollo de los criterios acorde a la metodología procedimental de las competencias básicas, como lo de sustituir los valores extremos de la integral utilizando procesos límite, dejando de generalizar la regla de Barrow, de sustituir directamente los extremos de la integral en la variable los extremos sea infinito, diferenciar en que contexto se trabaja con una integral definida o impropia, como el desarrollo de los conocimientos y valores fundamentales al interpretar las soluciones en cada situación problemáticas.

Los mayores obstáculos se presentan, si bien el número de alumnos alcanzó niveles regulares, en la aproximación interdisciplinar, en el momento en que se deben fundamentar dichos procedimientos a través de presupuestos teóricos dados en otra disciplina, enmarcado a una situación concreta sencilla contextualizada al ámbito de la enseñanza. Este sigue siendo un ítem para considerar en el futuro con el fin de elevar aún más el número de alumnos que alcancen al menos el nivel satisfactorio.

3.4 Resultados subjetivos: Percepciones de los estudiantes

A continuación se exponen las representaciones de los alumnos sobre la experiencia planteada:

a) Este taller me pareció una buena manera de comprender de manera más profunda los temas y los conceptos y demostrar los temas estudiados.
b) Mayor entendimiento del tema. Permite consultar distintas fuentes de información y “poder expresarse mediante los demás”.
c) Pienso que fue bueno para poder entender mejor aquellos conceptos estudiados de forma mecánica, ya sea por el estudio del tema elegido o por la explicación / exposición hecha por los demás.
d) Si tuviera que hacer una crítica constructiva del informe (al menos del primer caso, que fue el que tuve que desarrollar) diría que la parte final del punto c (”...interpretar su convergencia y el significado de dicha expresión”) nos dejó preguntándonos a qué expresión se refería que debamos explicar su significado, “hasta que decidimos comentar el significado e implicancias de que una serie sea convergente”. Esa es la única crítica que encuentro capaz de hacer al informe, de hecho me gustó mucho el punto b (”Cómo propondría la construcción de esta serie con el uso de estructuras lógicas de programación aprendidas”) ya que fuerza al alumno a utilizar cosas de la carrera aplicadas a problemas reales
e) Me parece un muy buen método, que además de ayudarnos a entender sobre el tema, nos ayuda en la oratoria.

f) Me parece muy bueno, ya que a un alumno hay que evaluarlo en cómo se desempeña tanto en parciales, como en orales, ya que a mucha gente le resulta mejor este método (oral) y también el día de mañana vamos a tener que exponer la tesis y dar charlas, etc. Por eso esta bueno que empiecen desde antes a mejorar la habilidad de los orales. Desventaja: al ser muchos alumnos se torna muy agotador para la profesora y demanda mucho tiempo.
g) "Al tener que investigar sobre el tema para poder explicarlo, me quedó más. Además lo escuché a mis compañeros"
h) Es bastante didáctico, ya que permite armar la exposición como lo desee y de esta manera permite expresar su creatividad.
i) "Al tener que ver las sucesiones y series de manera gráfica, analítica y además relacionarlo con la carrera que estudiamos, me pareció más productivo". Personalmente me surgieron algunas dificultades por la parte del software ya que nunca había visto cosas de programación, "pero al profundizar, ver videos explicativos e ir charlando con mis compañeros pudimos cerrar bien el tema y los conceptos necesarios para la construcción del algoritmo". Además, tuve un buen grupo de trabajo lo que llevó a poder comprender" y hacer un trabajo completo.
j) Me permite tener un conocimiento global sobre lo que hablo en la exposición y saber sobre que me va a ayudar más adelante dicho tema.
k) Es un buen método no solo porque aprendemos más en profundidad los temas, sino porque te prepara para la hora de realizar la defensa de algún trabajo en el futuro.
l) Me hizo reforzar los temas anteriores dados en clase, sino que también ayuda a formar carácter por "el hecho de exponer frente a los compañeros de uno". La única desventaja que le veo es el tiempo que se tarda los días que se expone, pero esto es relativo a la cantidad de estudiantes que exponen.
m) Por la naturaleza del grupo con el que tuve la suerte de hacer el informe yo no diría que tuvimos ninguna dificultad, pero si pequeños obstáculos," esto es porque cuando uno de nosotros tenía una duda acerca del contenido (*ó* de cuál sería la manera más completa y correcta de responder los enunciados) los demás participantes del grupo nos ayudamos entre nosotros".
n) Las dificultades que se nos presentaron no fueron muchas por suerte. La principal fue que al no ver los temas correspondientes en clase, tuvimos que aprender por nuestra cuenta. Pero "al poder trabajar en equipo nos fuimos ayudando, y despejando las dudas entre nosotros". Logrando desarrollar y comprender los actividades propuestas.
o) Me pareció una gran ventaja" hablar delante de varios compañeros "y de mi profesora" ya que es muy importante poder hablar y ser explícito en público".
p) La principal dificultad que se nos presentó a la hora de realizar el trabajo fue la falta de conocimientos y de práctica acerca del tema "Sucesiones y Series", pues este no fue dado en clases. Sin embargo, pudimos ayudarnos con la bibliografía aportada por la docente y realizarlo de la manera que consideramos más óptima posible. Por otra parte, la realización de los gráficos en Geogebra también resultó ser una complicación debido a los escasos conocimientos sobre la aplicación y sobre el tema dado. A pesar de esto, los trabajos realizados en la misma durante el año fueron de mucha ayuda, y logramos sobrellevar este problema.
q) Fue bueno conocer a los compañeros y pude expresarme ante docentes y alumnos", y además profundice sobre el tema.
r) "No surgieron grandes dificultades a la hora de realizar las actividades", el flujo de trabajo se dio naturalmente, y todos manejamos con responsabilidad las actividades designadas. Considero que el único problema que surgió en la realización de la actividad fue llegar a entender por completo la justificación para aplicar el criterio de la integral, para poder resolver lo solicitado.

En su discursiva los alumnos opinan respecto al taller identificando competencias (indicado entre comillas). Se puede observar que las opiniones positivas que detalladas superan ampliamente a las negativas.

4 Conclusión

Los estudiantes muestran su conformidad en el uso de las tecnologías y destacan que tuvieron la posibilidad de trabajar con una amplia gama de actividades en el período de tiempo destinado al tratamiento de los contenidos en un ambiente colaborativo.

En el proceso de preparar la exposición el alumno concreta las competencias poniéndolas en acción y para los docentes resulta gratificante reconocer la responsabilidad y el compromiso que cada alumno puso para desarrollar las actividades con mucho esfuerzo.

Los resultados nos desafían a proseguir esta línea de investigación , a través del empleo de las TIC y de software en el proceso de enseñanza aprendizaje que permiten la motivación de los estudiantes y el desarrollo de habilidades cognitivas que los estimulen en las competencias científicas como; la observación, la elaboración de hipótesis, la argumentación, expresión de ideas, la interpretación de resultados, como así también, la creatividad en el diseño de algoritmos que permite al mismo acercarse de manera más efectiva a la construcción de su propio conocimiento.

Al realizar una profunda autocrítica sobre los modos de hacer del estamento docente, es decir, las nuevas competencias que al interior de la cátedra son necesarias para salvar las dificultades encontradas/señaladas consista en asumir que el problema no está centrado en la lógica del 'sabe/no sabe' del alumno sino, como ha surgido en los conversatorios, el dialogo entre las cátedras horizontal y vertical, en las lógicas del querer hacer y del poder hacer, relacionadas con la esfera de lo personal y lo institucional académico.

Referencias

1. Autino, B.; Digión, M. : Características de la evaluación de los aprendizajes en el ámbito universitario. *Revista Premisa*, Vol. 10N°37, pp. 3-12 (2008).
2. Akçayır, G.; Akçayır, M. *The flipped classroom: A review of its advantages and challenges.* Computers & Education, pp. 334-345 (2018).
3. CONFEDI. *Declaración de Valparaíso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina*. FASTA Ediciones (20l4).
4. Tobón, S.: Formación integral y competencias: pensamiento complejo, currículo, didáctica y evaluación. Ecoe Ediciones (2013).
5. Salazar,M*: La Evaluación de los Aprendizajes en la Universidad* . Facultad de Educación Universidad de Antioquia (2002).
6. Seluy, S.F.; Zucarelli, A.M.: Evolución del Rendimiento Académico de los Alumnos de Matemática en Primer Año de las Carreras de Ingeniería a partir de la Incorporación de Estrategias de Enseñanza*. Libro de Actas EMCI*, pp.768 (2017).
7. Fernández de Alaiza, B.: *La interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación en Ingeniería Automática en la república de Cuba.* Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (2000).
8. Stone Wiske, M.; Rennebohm Franz, K., Breit, L. Enseñar para la Comprensión con nuevas tecnologías. Buenos Aires, Argentina: Paidós. (2006).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Mediación y Evaluación de un Resultado de Aprendizaje en Álgebra

Ana María Narvaez[1,2], Gabriela Tomazelli[1,2], Noemí Vega[1,2]
[1] Grupo IEMI, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273 (5500) Mendoza.
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNCuyo
Ciudad Universitaria, Parque Gral. San Martín

Resumen. Este trabajo es la continuación del rediseño de la planificación de Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la UNCuyo bajo el enfoque de la Formación por Competencias con el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de Ingeniería, según los Estándares de Segunda Generación de CONFEDI. En esta parte del trabajo se presenta un listado, clase por clase de la mediación pedagógica y la rúbrica correspondiente a un resultado de aprendizaje desarrollado en el trabajo anterior. También se consideran las debilidades de la planificación vigente y los elementos que se agregarían para migrar a un Syllabus, justificados. El marco teórico es la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard y la metodología es una Micro Ingeniería Didáctica Como conclusión, se presenta un plan de mejoras y se recuerda que formar una competencia no es algo espontáneo, sino que debe planificarse, enseñarse, desarrollarse y evaluarse. Y, en consecuencia, la capacitación docente, es fundamental en el proceso de la enseñanza y aprendizaje en Ingeniería.

Palabras Clave: Resultado de aprendizaje, Álgebra, Mediación Pedagógica, Rúbricas.

1 Introducción

Como es sabido, el aprendizaje bajo la Formación por Competencias, FPC, con el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de Ingeniería, ACEI, según los Estándares de Segunda Generación elaborados por CONFEDI es un camino de construcción bien alineada para producir la planificación de cátedra [1], [2]. El modelo conceptual para trabajar dentro del espacio curricular, se apoya sobre tres pilares: i) la formulación de competencias; ii) la mediación pedagógica; iii) el sistema de evaluación de competencias [3]. En la primera parte se analizó la opción i), justificando la elección de un resultado de aprendizaje, RA, del programa vigente [4]. El RA propuesto fue:
[Utiliza] [Matriz Asociada a una Transformación Lineal] [para modelar simetrías de una figura (reflexiones, cortes, rotaciones), aproximar localmente funciones y representar sistemas de ecuaciones lineales] [movilizando conceptos de geometría, cálculo de una variable y álgebra lineal] [5].

2 Argumentación de la selección y secuenciación de las actividades propuestas

A continuación se presenta la Tabla propuesta por el Laboratorio MECECK, de la Universidad Nacional de Misiones, Tabla 1, donde se propone un listado, clase por clase, de actividades diseñadas para el logro del RA, indicando los *saberes conocer*, SC, *saberes hacer*, SH y *saberes ser*, SS, con las actividades del docente, del alumno y el número de horas planificadas.

El número estimado de clases presenciales para que el estudiante promedio pueda alcanzar el RA son 6 clases;

3 clases por semana en tres días distintos, equivalentes a 14 horas cátedra (de 50 minutos cada una). Es decir, el número de horas presenciales, HP, es 11 horas y 40 minutos y el número de horas no presenciales**,** HNP, o sea, el tiempo estimado de trabajo del estudiante, es de 13 horas (reloj).

Total de horas (reloj) para alcanzar el RA: 24 horas y 40 minutos**.**

(Glosario técnico para la Tabla 1. TL: transformación lineal; MA: matriz asociada a una TL; SEL: sistemas de ecuaciones lineales).

Tabla 1. Mediación pedagógica, tiempo y saberes para el RA.

Resultado de Aprendizaje	Mediación Pedagógica		Tiempo	Saberes
[Utiliza**]** **[**Matriz Asociada a una Transformación Lineal**]**	1era. Clase (110 al.)	*Actividad 1.1* Lección Magistral Participativa El Profesor hará una revisión de temas previos dados en Geometría y en Cálculo. El alumno recordará conceptos, podrá tomar apuntes (para fijar las notaciones, etc.) y hará las preguntas que le parezcan necesarias en la clase presencial.	HP: 1	SC: Espacios vectoriales, base y dimensión. Coordenadas de un vector en una base. SH: Eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan. Planteo y tratamiento de Combinaciones lineales. SS: Actitud positiva para recordar conceptos previos dados en otros espacios curriculares y movilizarlos para relacionarlos con Álgebra.
		Actividad 1.2 Lección Magistral Participativa El Profesor dará los conceptos de TL (definición y ejemplos). El alumno resolverá ejercicios imitando la técnica realizada por el Profesor, durante los últimos minutos de la clase participando activamente. *Actividad 1.3* Preguntas Literales El estudiante realizará en HNP un cuestionario dado por el Profesor, que involucra los contenidos previos dados en Geometría y Cálculo, relacionados con Álgebra lineal.	HP: 1 HNP: 2	SC: definición de función y de TL. Derivadas y diferenciales en una variable. Aproximación local lineal de funciones. SH: Técnicas de linealidad. Técnicas de diferenciación. SS: Buena disposición para el aprendizaje autónomo extra clase.
	2da. Clase (110 al.)	*Actividad 2.1* Lección Magistral Participativa El profesor dará propiedades de TL, núcleo e imagen (definición y ejemplos) y teorema de la dimensión. Los estudiantes atenderán y/o contestarán preguntas sobre SEL homogéneos y no homogéneos, resolverán SEL y verificarán el teorema de la dimensión. Resolverán situaciones en los últimos 25 minutos de la clase. Deberán terminar la tarea en HNP.	HP: 2 HNP: 1,30	SC: Propiedades de TL. Condiciones necesarias y suficientes de TL. Núcleo e imagen. Teorema Dimensión. SH: Eliminación de Gauss. SS: Buena disposición para verificar e interpretar resultados en el contexto algebraico, geométrico y del cálculo.

[para modelar simetrías de una figura (reflexiones, cortes, rotaciones), aproximar localmente funciones y representar SEL] [movilizando conceptos de geometría, cálculo de una variable y álgebra lineal]	3ra. Clase (60 al.)	*Actividad 3.1* Resolución de Ejercicios El Profesor resuelve algunos ejercicios de la guía de actividades prácticas en el pizarrón sobre TL, núcleo, imagen y teor. de la dimensión. Los estudiantes resuelven ejercicios de la guía reunidos en grupos espontáneos. Algunos alumnos mostrarán al resto, en el pizarrón, sus dudas y/o planteos, resoluciones y/o argumentos.	HP: 2 HNP: 1	SC: TL, núcleo, imagen, bases y dimensión. SH: Eliminación de Gauss-Jordan. Combinaciones lineales. Cálculo de bases. Técnicas de linealidad. SS: Buena disposición para encarar una tarea con muchos detalles de notación y lenguaje específico. Orden en el trabajo. Disposición para verificar resultados.
		Actividad 3.2 Resolución de Problemas Los alumnos tratarán de plantear y/o resolver problemas que involucran integración de saberes conocer, hacer y ser en la clase y extra clase.	HP: 1 HNP: 1	Ídem anterior
	4ta. Clase (110 al.)	*Actividad 4.1* Lección Magistral Participativa El profesor dará MA a una TL introduciendo la clase con preguntas disparadoras (ver (1)). Se desarrolla la clase justificando las respuestas a las preguntas introductorias. Los últimos 30 minutos se disponen para que los estudiantes planteen y resuelvan situaciones particulares de cálculo de MA en distintas bases. Se les indica a los estudiantes que deben estudiar estos temas para la siguiente clase.	HP: 2 HNP: 1	SC: MA estándar y no estándar. SH: Algoritmo de cálculo de MA. Determinación de coordenadas de vectores en una base. SS: Disciplina y perseverancia para llegar a los resultados y verificarlos
	5ta. Clase (110 al.)	*Actividad 5.1* Lección Magistral Participativa El profesor comienza con la pregunta ¿Dada una matriz que representa una TL en un par de bases fijas, es posible hallar la ley de la TL? Se presta atención a interpretaciones y/o preguntas de los estudiantes para justificar el teorema que formaliza dicho resultado. Se dejan los últimos 30 minutos de la clase para que los alumnos planteen, pregunten, resuelvan, etc. situaciones particulares planteadas por el docente. Se les indica a los alumnos que deben terminar la tarea, estudiar y ver qué pueden resolver de la Guía de Actividades para la siguiente clase presencial.	HP: 2 HNP: 1,30	Ídem anterior
	6ta. Clase (60 al.)	*Actividad 6.1* Resolución de Ejercicios y Resolución de Problemas El Profesor pregunta dudas de la clase anterior y las atiende, luego da instrucciones para que los alumnos trabajen sobre la Guía de Actividades; en primer lugar imitando algunos ejemplos ya realizados y, luego, resolviendo problemas. *Actividad 6.2* Resolución de Ejercicios y Resolución de Problemas Los alumnos trabajarán en HNP con los ejercicios y problemas no resueltos en HP.	HP: 3 HNP: 3	

(1) Las preguntas son del tipo siguiente: ¿Cualquier TL se puede representar mediante una matriz? ¿Qué sucede si las bases del dominio y del codominio no son las canónicas? ¿Qué relación existe entre las coordenadas de un vector en una base y las coordenadas del vector transformado en la base del codominio?

En la selección y secuenciación de las actividades propuestas en la Tabla 1, se ha tenido presente: el nivel de logro esperado del RA, las características del ACEI (particularmente en lo que se refiere a "Implementar Metodologías Activas"), "el Tiempo del Estudiante" y el rol del docente como mediador, en el sentido que proponen Feuerstein y otros y los siguientes aspectos:

- Las características del RA que es del dominio cognitivo y el Nivel de la Taxonomía Cognoscitiva de Bloom, revisada por Anderson y Krathwohl en la categoría "Aplicar".
- El número de alumnos que asisten a las clases presenciales en relación al único docente por aula, el número de docentes que pueden atender a los estudiantes en horas de consulta extra clase y la disponibilidad de HNP de los estudiantes para reflexionar sobre los saberes, poder integrarlos y movilizarlos.
- La característica de la Asignatura y la Carrera, dado que es un espacio curricular básico, formativo y de índole teórico-práctica [6], [7].
- El nivel de participación que tiene el estudiante en clases con 110 alumnos o en grupos más reducidos de 60.

La *selección* de actividades se ha realizado tratando que sean lo más "activas" posibles y que tiendan a desarrollar un trabajo gradual autónomo del estudiante, considerando las limitaciones de tiempo y espacio físico.

Se ha seleccionado la Lección Magistral Participativa en las clases presenciales de 110 alumnos pero se introduce la clase con "preguntas disparadoras" y/o se dejan los últimos 15 a 20 minutos para que los alumnos participen realizando revisiones, resoluciones, verificaciones, preguntas, etc. sobre lo explicado; y/o se deja una pregunta al final "como desafío" para que los estudiantes sigan pensando en posibles respuestas que serán trabajadas la próxima clase.

Se ha seleccionado la Resolución de Ejercicios y la Resolución de Problemas para las clases presenciales de 60 alumnos con un docente a cargo, que son bien aceptadas, en general, por los estudiantes de Ingeniería y también para las Actividades del horario no presencial, HNP, que requieren mayor participación del estudiante.

Las actividades que deben realizar los alumnos en el horario no presencial, HNP, deberían, también, tender a desarrollar un aprendizaje autorregulado, que les permita hacer un análisis de lo que aprenden y de lo que no aprenden. En este sentido ha sido seleccionada la actividad denominada Preguntas Literales para la etapa HNP, pues se debe formalizar la enseñanza del autoaprendizaje para asegurar, entre otras cosas, que el egresado sea competente para aprender en forma continua y autónoma.

La *secuenciación* de las actividades, implica, en un primer tratamiento, "la no simultaneidad de contenidos a ser enseñados", es decir, se privilegia: ¿de qué manera?, ¿en qué momentos de tiempo? y ¿con qué criterios de orden damos las actividades? La secuenciación de las actividades propuestas conlleva un criterio de orden en relación a la concatenación natural de *saberes conocer*, *hacer* y *ser* propios de la disciplina, es decir, de *saberes conocer* de menor a mayor complejidad y en relación a los conocimientos previos de los estudiantes. También se ha tenido en cuenta el tiempo que el estudiante promedio necesitaría para reflexionar sobre los temas dados en una clase y tenerlos disponibles para la clase siguiente, considerando que el tiempo del estudiante no es una "magnitud arbitraria" [8].

3 Rúbrica Analítica para evaluar el Resultado de Aprendizaje

Para realizar la rúbrica, en primer lugar se deben redactar los Criterios de Evaluación, luego establecer Niveles de Logro, preferentemente cuatro; se han elegido: *principiante, básico, competente y avanzado*. Finalmente se redactan los Descriptores para cada Criterio de Evaluación y Nivel de Logro, determinando los Criterios y los Niveles de Logro Obligatorios o mínimos para el estudiante.

3.1 Criterios de Evaluación

Se han considerado los siguientes criterios, a saber:

Criterio 1: [Obtiene] [representaciones matriciales de transformaciones lineales geométricas, algebraicas y del cálculo] [conociendo distintas bases]
Criterio 2: [Encuentra] [la ley de la transformación lineal] [conociendo distintas matrices asociadas]
Criterio 3: [Integra] [matriz asociada a una transformación lineal] [en los marcos geométrico, del cálculo y algebraico]

En la tabla siguiente, se muestran de forma comparativa, los criterios con los niveles de logro y las ponderaciones consideradas.

Tabla 2. Rúbrica analítica para evaluar el RA.

Criterios	*Principiante* (2 puntos)	*Básico* (4 puntos)	*Competente* (6 puntos)	*Avanzado* (10 puntos)
Crit. 1 30% 0,30	Determina la matriz asociada (MA) estándar en forma mecánica, realizando el procedimiento de cálculo.	Determina la MA estándar identificando la ley, bases y dimensiones en el dominio y codominio y las coordenadas de los vectores en el dominio y las coordenadas de sus transformados en el codominio.	Determina la MA en distintas bases identificando la ley, bases y dimensiones en el dominio y codominio y las coordenadas de los vectores en el dominio y la de sus transformados en el codominio y no verifica. (*MÍNIMO REQUERIDO)*	Determina la MA en distintas bases identificando la ley, bases en el dominio y codominio y las coordenadas de los vectores en el dominio y sus transformados en el codominio y verifica.
Crit. 2 30% 0,30	Encuentra la ley de la transformación lineal (TL) con las distintas MA usando el teorema correspondiente en forma algorítmica.	Encuentra la ley de la TL con las distintas MA conocidas usando el teorema correspondiente e interpretando los conceptos involucrados.	Encuentra la ley de la TL con las distintas MA conocidas usando el teorema correspondiente e interpretando los conceptos involucrados y en los casos que corresponda, verifica que las matrices son semejantes.*(MÍNIMO REQUERIDO)*	Encuentra la ley de la TL con las distintas MA conocidas usando el teorema correspondiente e interpretando los conceptos involucrados en el teorema y en los casos que corresponda, verifica que las matrices son semejantes y concluye sobre la ventaja de este hecho.
Crit. 3 40% 0,40	Halla la MA estándar que representa el morfismo (una simetría o una derivación, etc.) y comprende el carácter funcional de las matrices en los espacios vectoriales.	Halla la MA que representa un morfismo (simetría o una derivación, etc.) en bases cualesquiera y comprende el carácter funcional de las matrices en los espacios vectoriales.	Halla la MA que representa un morfismo (simetría en el plano o una derivada, etc.) y las usa para obtener simetrías de otras figuras en el plano, las derivadas de otras funciones u otras representaciones de sistemas de ecuaciones lineales.*(MÍNIMO REQUERIDO)*	Utiliza la MA que representa un morfismo (simetría en el plano o una derivada, etc.) para obtener otros movimientos compuestos o las derivadas (o diferenciales) de orden igual o superior a 2 mediante la composición de funciones (o multiplicación matricial).

3.2 Puntaje para cada descriptor de la Rúbrica Analítica para evaluar el RA

La siguiente tabla muestra el puntaje propuesto para cada descriptor correspondiente al RA.

Tabla 3. Puntaje para cada Descriptor de la Rúbrica Analítica.

Criterios	Peso	*Principiante* (2 ptos.)	*Básico* (4 ptos.)	*Competente* (6 ptos.)	*Avanzado* (10 ptos.)
Obtiene representaciones matriciales de transformaciones lineales, geométricas, algebraicas y del cálculo conociendo distintas bases.	0,30	0,60	1,20	1,80 *MÍNIMO REQUERIDO*	3,00
Encuentra la ley de la transformación lineal conociendo distintas matrices asociadas.	0,30	0,60	1,20	1,80 *MÍNIMO REQUERIDO*	3,00
Articula matriz asociada a una transformación lineal en los marcos geométrico, del cálculo y algebraico.	0,40	0,80	1,60	2,40 *MÍNIMO REQUERIDO*	4,00
Mínimo: 6,00 (60%)	1, 00	2,00	4,00	6,00	10,00

3.3 Comparación entre la escala de la Institución y la Rúbrica Analítica propuesta

La escala de aprobación de la Institución es la siguiente [4]:

Tabla 4. Escala de puntaje de la Institución.

RESULTADO	ESCALA NUMÉRICA (nota)	ESCALA PORCENTUAL (%)
NO APROBADO	0	0
	1	1-12
	2	13-24
	3	25-35
	4	36-47
	5	48-59
APROBADO	6	60-64
	7	65-74
	8	75-84
	9	85-94
	10	95-100

La condición de “Aprobado” se obtiene con un mínimo de 6 (60 a 64%), que es coherente con el tercer Nivel de Logro o Indicador de Nivel de Dominio de la Rúbrica, denominado *Competente,* que tiene como nota máxima 6. Se observa que los Criterios y Niveles de Logro Obligatorios o mínimos suman 6,00 puntos (60%).

4 Propuesta para transformar el Programa en un Syllabus

4.1 Debilidades de la Asignatura

Entre las debilidades encontradas y, más urgentes de atender, considerando la orientación hacia un Modelo de Formación por Competencias con el Aprendizaje Centrado en el Estudiantes, se cuentan:

a) Las relativas a la falta de la redacción de RA en la planificación de la asignatura en concordancia con las materias de cursado simultáneo, las correlativas posteriores, las asignaturas del ingreso y las asignaturas de las Tecnologías Básicas, lo que permitiría ir tendiendo hacia una FPC desde el Álgebra, no como compartimento estanco sino en relación al área Matemática y las restantes áreas.
b) La falta de planificación de actividades para la participación lo más activa posible de los estudiantes, teniendo presente, además de los factores cognitivos y metacognitivos, el número de alumnos, recursos de infraestructura y docentes (contemplados en las actividades anteriores), factores afectivos, motivacionales, sociales, de desarrollo y diferencias individuales, como aconsejan especialistas, entre ellos McCombs y Whisles. Estos últimos factores, en general no tenidos en cuenta, han quedado "al descubierto" en el periodo de educación a distancia debido a la pandemia por COVID-19.
c) Un sistema de evaluación deficiente, que no involucra la coevaluación, la evaluación diagnóstica inicial y no ha tenido en cuenta la incorporación de Rúbricas Analíticas, que contribuirían a que el sistema fuese más formativo y desarrollador de competencias. Las evaluaciones actuales están enfocadas, sobre todo, en el resultado y poco en el proceso; se debería migrar hacia el diseño de evaluaciones que involucren, lo más integralmente posible, el resultado y el proceso pues, como se expresa en el Segundo Documento del Curso de Formación por Competencias, Aprendizaje Centrado en el Estudiante y Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería,

   "El estudiante desarrolla competencias tanto en la Mediación Pedagógica como en el proceso de Evaluación." ([3], pág.13).

Para transformar el Programa vigente en un Syllabus, se revisaría el mismo con el equipo docente, primero y la Dirección de Ciencias Básicas, en segunda instancia. A priori, se agregarían los siguientes elementos:

- *Información Académico Administrativa* Se colocarían el Departamento de pertenencia, el Plan de Estudios, los créditos (en términos de RTF), clases (días y horarios), clases de consulta (horarios y lugar físico de atención), inicio de clases, finalización de clases, asignaturas correlativas posteriores y anteriores (vistas en el Ingreso a la Facultad).
- *Justificación:* En la planificación hay algunos datos y, en documentos institucionales, otros; pero, parece lógico que los estudiantes que recién ingresan a la Facultad tengan en un solo documento toda la información necesaria para el ciclo lectivo que iniciarán.

- *Contenidos Mínimos* **(**según figuran en el plan de estudios revisado, indicando las resoluciones respectivas de aprobación)
Justificación: No figuran en la planificación actual y puede ser información útil para docentes de otros espacios curriculares; si bien, son tenidos en cuenta en la planificación de la asignatura que se realiza según los requerimientos solicitados por la Institución mediante ordenanzas.

- *Equipo Docente*
Justificación: Es aclaratorio para los alumnos tener los datos del equipo docente en un único documento para ubicar los profesores en lugares de la Facultad, dependiendo de días y horarios, por ejemplo. Esta información está en otro formulario obligatorio de la cátedra que no es la planificación.

En este punto, es interesante destacar que se le daría un rol más activo al equipo como tal, es decir, instar gradualmente, a tomar decisiones y evaluarlas (entre otras posibilidades), pues la participación de los auxiliares de docencia en el equipo, no es frecuente.

Colocar al equipo docente en el mismo documento en que aparece información útil para alumnos, colegas, autoridades, etc. muestra integración, articulación, compromiso y coherencia al interior del espacio curricular, puesto que todos los docentes serían responsables de la información ofrecida. La idea no es sólo agregar al equipo por la información en sí misma, sino por la existencia de un equipo de apoyo de cátedra.

- *Objetivos de la Asignatura* Se agregarían objetivos específicos y se revisarían los objetivos generales *Argumento:* Los objetivos específicos permiten aclarar contextos de aplicación de los conceptos, alcances, profundidad de los mismos, diferenciaciones entre distintos tratamientos (algebraicos, geométricos, etc.). En resumen, permiten aclarar los objetivos de los docentes como mediadores del proceso.

- *Presentación de la Asignatura* Se colocaría el encuadre académico y epistemológico-conceptual de la Asignatura, la relación de la Asignatura con: el Perfil de Egreso, las Competencias de Egreso Específicas y Genéricas, los Alcances del Título, los Descriptores de Competencias y los Aprendizajes previos a que hace referencia el "Syllabus". Este ítem, de gran importancia, involucraría mucho trabajo previo para consensuar, en primera instancia en el área matemática y luego con las áreas correlativas.
Argumento: La fundamentación está en el hecho de mostrar justificadamente la necesidad del espacio curricular como integrador, en la Formación de Ingenieros, para la comunidad; dando la mayor transparencia posible sobre los aportes que genera Álgebra en la FPC, con ACE de Ingeniería, según los Estándares de Segunda Generación.

- *Desarrollo de la Asignatura* Se agregaría: Descripción y Relación entre Resultados de Aprendizaje, Criterios de Evaluación, Mediación Pedagógica, Saberes conocer, hacer y ser, y Tiempo del Estudiante (presencial y no presencial).
Argumento: Esto implicaría trabajo extra del equipo docente, pero permitiría concientizar sobre las competencias docentes necesarias y, desarrollarlas, para que el rol del profesor tienda al de mediador pedagógico, el cual, gradualmente y continuamente, logrará el aprendizaje autorregulado del estudiante, futuro ingeniero.

- *Recomendaciones de Estudio*
Argumento: En realidad, es frecuente que los docentes le den indicaciones a los alumnos sobre estrategias de estudio para los diferentes contenidos y situaciones; por ejemplo: cómo encarar un ejercicio de lógica, cómo pensar un problema de combinatoria, qué estrategias le conviene usar en una evaluación parcial, etc.
Los alumnos, también acostumbran a pedir "Tips" para encarar sus producciones.
Por lo expresado, es conveniente colocar por escrito recomendaciones de estudio, de abordaje de evaluaciones, etc., en función, al menos, de la experiencia docente, las características del espacio curricular y las características de los Estudiantes de Ingeniería. Se aclara que para tener mayor conocimiento sobre los estilos de aprendizaje de los estudiantes se realizaría algún test, por ejemplo el Test de Felder y Silverman al inicio del ciclo lectivo.

- *Sistema de Evaluación:* En este ítem se diferenciaría entre las técnicas e instrumentos que serían utilizados en la evaluación del aprendizaje de recursos y las correspondientes a las evidencias de aprendizaje para cada RA. Se agregaría la evaluación diagnóstica y se elaborarían rúbricas para evaluar recursos y RA.
Argumento: Según el modelo de FPC, el Sistema de Evaluación, es un pilar fundamental que brinda información necesaria para reajustar el proceso dentro del ciclo lectivo. En el espacio curricular tenemos insuficiencias y/o falencias en este aspecto, por la marcada tendencia a evaluar sólo contenidos, SC. Debería fortalecerse este sistema con el objetivo de robustecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en el marco conceptual deseado.

- *Estructuración del Curso y Diseño del Cronograma de Clases* Actualmente se realiza un cronograma de clases indicando las semanas, los temas y los profesores a cargo de cada clase, que se denomina institucionalmente "Formulario P2" y está en la página de la Facultad a disposición de los docentes para ser completado al comienzo de cada año lectivo. En el Syllabus de la cátedra se incorporaría este documento agregando: listado de las actividades que se desarrollarán en el encuentro presencial (de docentes y estudiantes), indicación del tiempo de cada una de ellas, actividades previas a la clase y actividades posteriores a la clase que deben realizar los estudiantes, en horario no presencial, actividades de aprendizaje autónomo, momentos de evaluación de recursos y de situaciones de integración y momento de recuperación de actividades no cumplidas.
Argumento: Es evidente que esta estructura ayuda a la organización del curso, permitiendo incorporar medidas remediales en forma flexible y coherente con los RA deseados.

- *Planes de Contingencia* Las guías de resolución de problemas, etc., deben estar diseñadas y puestas a disposición de antemano en el Syllabus.
Argumento: La cátedra, al comienzo del ciclo lectivo, coloca el Programa y la Guía de Trabajos Prácticos en el Aula Abierta (aula virtual) a disposición de los estudiantes. Sería conveniente colocar este material dentro del Syllabus que tiene el resto de la información necesaria para el ciclo lectivo.
En la etapa de pandemia, tan particular, se ha observado la necesidad de contar con planes de contingencia diseña-

dos con anterioridad, que garanticen la continuidad, con calidad, de los procesos educativos.

- *Listado de Trabajos Prácticos* Como se indicó anteriormente, en el Syllabus, se agregaría el listado de Trabajos Prácticos a ser desarrollados en el cursado.

- *Recursos Necesarios* Se agregaría la necesidad de disponer de aulas con capacidad suficiente para atender a los alumnos. En el año 2020 se inscribieron en Álgebra 519 alumnos.
Argumento: La Facultad mantiene muy bien las aulas y los pizarrones, pero no hay disponibilidad de dos aulas simultáneas, con capacidad suficiente para atender a 130 alumnos en cada una de ellas, en los horarios históricos de la cátedra.

- *Reglamento de Cátedra* Agregaría las normas de trabajo y de ética en la asignatura, no colocadas de forma escrita en la actualidad, si bien, son expresadas en forma oral en todas las comisiones de la cátedra al comienzo de cada ciclo lectivo.
Argumento: La escritura en un documento permite formalizar y ayuda a cumplir las reglas o normas de convivencia propias de la cátedra, con su equipo de trabajo, dentro de la institución universitaria en la que desarrollamos nuestra tarea.

- *Conocimiento del Syllabus por parte de los Estudiantes* Por la importancia del Syllabus, al menos, como instrumento de contrato implícito, como registro permanente de actividades y como herramienta de aprendizaje para alumnos, docentes, Institución y Comunidad, se daría a conocer previamente al comienzo del curso lectivo mediante el Aula Abierta (aula virtual) de que dispone la cátedra en la Institución.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Se incorporaría al comienzo del ciclo el test de Felder y Silverman o alguno similar, para ser usado como guía en la propuesta de actividades para los distintos grupos de alumnos de la Facultad (Ingeniería en Petróleo, Civil, Mecatrónica, Industrial y Licenciatura en Computación).

En principio, se propone pensar con el equipo de cátedra en trabajar con una metodología de micro Ingeniería Didáctica, en el sentido de Artigue para encarar el diseño y posterior puesta en marcha del Syllabus [9].

Se propone como Plan de mejoras, en primera instancia, trabajar con el equipo docente de la cátedra, teniendo como orientación el "Modelo Operativo de trabajo a nivel de un espacio curricular", en el diseño de actividades "bien reflexionadas" (que consideren, entre otros aspectos, las HNP del trabajo del estudiante), que tiendan gradualmente al aprendizaje autónomo de los estudiantes y que puedan ser evaluadas, en primera instancia, dentro del ciclo lectivo, para procurar ajustes inmediatos. A posteriori, se puede proponer evaluación/es en el ciclo lectivo posterior/es para realizar los reajustes necesarios.

Trabajar con el equipo docente de la cátedra y con el área de Apoyo Académico de la Institución en la confección de Rúbricas que respondan los estudiantes para ser utilizadas como mapas de progreso del proceso y nos permitan la retroalimentación (proceso concebido de formación continua) y rúbricas para nuestra propia evaluación como docentes del equipo de cátedra, Álgebra, dentro de la Institución formadora de Ingenieros.

Solicitar a la Dirección de Ciencias Básicas, reuniones de trabajo para acordar líneas de acción con los equipos docentes de las materias de cursado simultáneo, las materias correlativas superiores, las del ingreso y, posteriormente, con los equipos docentes de las Tecnologías Básicas con una primer inquietud de seleccionar los RA que guíen al espacio curricular y, tratar de consensuar la posibilidad de desarrollar la planificación de contenidos y actividades incluyendo el HNP del estudiante (no tenido en cuenta en el modelo de planificación actual).

Referencias

1. CONFEDI. *Competencias Genéricas. Desarrollo de competencias en la enseñanza de la ingeniería argentina.* San Juan. Universidad Nacional de San Juan. (2006).
2. CONFEDI. Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina: Libro Rojo de CONFEDI. Rosario. CONFEDI. (2018).

3. Kowalski, V. A., Morano, d. E., Erck, I. M., Enriquez, H. D., Cirimelo, S.D. *Formación por Competencias, Aprendizaje Centrado en el Estudiante y Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería.* Misiones. Universidad Nacional de Misiones. (2019).
4. Programa y Planificación de Álgebra 2022. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo.
5. Narvaez, A. M. Rediseño de la planificación de Álgebra orientada a un enfoque basado en competencias. Parte I. En L. Gomez y G. Cuadrado, *Investigación y Educación en Ciencias de la Ingeniería*. Volumen II. Mendoza, Argentina: UTN. Facultad Regional Mendoza. (2019).
6. Ordenanza Nº2/2004-C.D. Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Industrial.
7. Resolución 1254/2018. Ministerio de Educación. Alcances del Título-Determinación. Buenos Aires: Boletín Oficial del 18 de mayo de 2018. (2018).
8. Kowalski, V. El Tiempo del Estudiante. En V. Kowalski et al, *Formación por Competencias, Aprendizaje Centrado en el Estudiante y Estándares de Acreditación de Segunda Generación para Ingeniería*, pp. 56 a 65. Misiones: Universidad Nacional de Misiones. (2019).
9. Artigue, M. Ingeniería Didáctica. En P. Gomez (ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericano. Méjico. (1995).
10. Chevallard, I. La Transposición Didáctica. Del Saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.(1991).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

La Evaluación de Competencias y el Uso de Tecnologías

María E. Rodriguez[1], Eva Casco[1], Aldana Tibaldo[1], Romina Durunda[1]
[1] Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaisse 610 Santa Fe, Argentina
ecasco@frsf.utn.edu.ar

Resumen. La inquietud de readaptar la formación a las nuevas necesidades, hace que los procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentren constantemente en proceso de discusión, virando firmemente a estimular el desarrollo de competencias. Nos proponemos generar una herramienta, donde como docentes podamos diagnosticar y evaluar competencias genéricas tecnológicas adquiridas por el alumno en el ciclo básico. Para ello se pretende trabajar sobre un curso de Análisis Matemático II de segundo año de la carrera de Ingeniería Industrial, en el tópico "Función Vectorial", proponiendo la realización de una actividad grupal mediada por el uso de las TICs. La evaluación de esta actividad estará enfocada en el aprendizaje significativo y será resuelta mediante la utilización de una rúbrica que permita una valoración objetiva de cada alumno por sobre su desempeño individual y grupal frente a la actividad. La metodología presentada revaloriza los procesos de aprendizaje y favorece el desarrollo de competencias.

Palabras Clave: Evaluación, Competencias, Aprendizaje significativo, TIC.

1 Introducción

Estimular el desarrollo de competencias es una de las máximas aspiraciones de la educación y también una de las más difíciles de lograr. La 63° Asamblea del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (Rosario, 1 de junio de 2018) aprobó la propuesta "estándares de segunda generación" para la acreditación de carreras de ingeniería en el país, la cual constituye un avance sustantivo, que promueve un cambio paradigmático en la formación de ingenieros, ponen su foco en el estudiante y en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con la expectativa de desarrollar y fortalecer las competencias en el graduado. La propuesta, también conocida como "El libro rojo del CONFEDI", [1] establece que el egresado de una carrera de ingeniería debe poseer un currículo con un balance equilibrado de competencias y conocimientos académicos, científicos, tecnológicos y de gestión, con formación humanística.

En la sección V del mencionado libro, "Condiciones curriculares comunes para las carreras de ingeniería", se clasifican dos competencias que debe poseer el graduado, y se definen como:

1 Genéricas: cada entidad universitaria, en su marco institucional y dentro del proyecto académico individual, determinará para sus carreras, la estrategia de desarrollo para asegurar en el perfil de egreso las competencias comunes y necesarias a todas las carreras de ingeniería.

2. Específicas:el plan de estudios debe garantizar el desarrollo de las competencias específicas para las actividades reservadas definidas en la terminal y verificar su cumplimiento, además de la formación en el proyecto académico de la carrera, de los alcances de título que defina la institución, con la profundidad y calidad propia de un título de ingeniero.

En la bibliografía científica actual, se observan numerosas contribuciones respecto al análisis de competencias en la formación de ingenieros, lo que evidencia su importancia dada la preocupación e interés en la temática. [2-7]

Respecto al enfoque por competencias, se puede decir que es una nueva forma de afrontar la enseñanza, es un planteamiento que refuerza la orientación hacia la práctica profesional, conforma una aproximación más pragmática al ejercicio profesional, pero que precisa de conocimientos especializados, por lo que se requiere de una adecuada combinación entre teoría y práctica. Las competencias pueden resumirse como todo conjunto de conocimientos y habilidades necesarios para desarrollar alguna actividad: la capacidad para actuar eficazmente en el logro de un objetivo. A su vez se destaca que las competencias orientan la enseñanza hacia la acción, integran diversos componentes del aprendizaje, implican procesos cognitivos distintos del aprendizaje asimilativo, implican actuaciones en situaciones complejas [8].

Por otro lado, es primordial que el alumno logre el aprendizaje significativo, no cabe diseñar una actividad de evaluación para saber si el estudiante lo ha alcanzado o no, lo que procede es detectar el grado de efectividad de este, realizado a través de actividades y tareas susceptibles de ser abordadas o resueltas a partir de diferentes grados de significatividad de los contenidos implicados en su desarrollo o resolución [9].

El aprendizaje significativo es un proceso de aprender con sentido. En consecuencia, para formarse significativamente el nuevo conocimiento debe interactuar con la estructura de conocimiento existente, por lo que no es suficiente solamente que el alumno quiera aprender, es necesario que pueda aprender, para lo cual los contenidos han de tener un enfoque lógico y psicológico. [10]

En este sentido, el grupo de docentes e investigadores pretende propiciar y evaluar el desarrollo en el alumno de competencias genéricas tecnológicas como “identificar, formular y resolver problemas de ingeniería, utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en este área, así como competencias sociales, políticas y actitudinales, el desempeñarse y comunicarse de manera efectiva en equipos de trabajo.

Bajo este marco, el objetivo del presente trabajo es proponer una actividad que permita valorar las competencias obtenidas por los alumnos en las asignaturas del ciclo básico, a partir de la utilización de TICs, para evaluar la contribución desde el aprendizaje significativo del alumno.

2 Métodos

La actividad se focalizará en un contenido mínimo de la asignatura Análisis Matemático II (AMII), cuya evaluación podría contribuir a un portafolio de la asignatura, formado por distintos instrumentos de valoración que proporcionen información válida y confiable acerca del mérito de las metas alcanzadas, con el fin de servir de guía para tomar decisiones, solucionar problemas y promover la comprensión de los fenómenos implicados.

Se considera a la evaluación y sus resultados como parte esencial del proceso de enseñanza, se la define como parte integral del aprendizaje, se entiende dentro de un proceso dinámico que se desarrolla, y se transforma según surge la necesidad y mejora la comprensión del proceso. [11]

Es importante notar que toda actividad evaluativa significa una valoración y, por lo tanto, debe ser comprendida como una aproximación a la realidad. [12]

El instrumento de evaluación que se propone se enmarca en una de las tendencias actuales, los portafolios consideran la recopilación y archivo de trabajos y producciones significativas como muestras documentadas de logros personales. [13]

Para este trabajo se abordará el contenido mínimo Función Vectorial. Los sujetos de evaluación serán los alumnos del segundo año de la carrera de ingeniería industrial U.T.N. Facultad Regional Santa Fe y las competencias que se analizarán serán las establecidas por el CONFEDI bajo el nombre “genéricas”.

Ellas serán evaluadas atendiendo a los resultados del aprendizaje, considerando el aprendizaje significativo. Por ello, los aspectos específicos de las dimensiones se detallan a continuación:

- La motivación: se puede asegurar que el mayor o menor grado de significatividad del aprendizaje dependerá en gran parte de la fuerza de esa tendencia a aprender significativamente.
- La comprensión: se pretende la construcción de significados, para lo cual se requiere buscar la relación entre los conocimientos previos y los nuevos. Se trata de una concordancia muy especial a la que frecuentemente se le llama comprensión de los contenidos.
- La funcionalidad: también nombrado como aprendizaje funcional, es aquel que nos permite utilizar los conocimientos adquiridos para resolver problemas en contextos diferentes. Por lo tanto, de activarse estos procesos de razonamiento, el estudiante podrá estar en condiciones de encontrar la funcionalidad de los conocimientos adquiridos.

- La participación activa: se empieza a dar cuando el estudiante asume un papel activo y trabaja sobre la información recibida. Se integra por diferentes momentos en los que el estudiante reflexiona sobre su propio proceso: analizar valorar, actuar y detectar las dificultades y los medios para resolverlos, además de extraer conclusiones que le sirvan para afrontar otros retos de aprendizaje.
- La relación con la vida real: se refleja en la satisfacción de necesidades reales para los estudiantes y reflejan un grado de significatividad mayor.

Para ello, la metodología propuesta comienza cuando los docentes presentan el tema en clases. Una vez expuesto el contenido, los alumnos se organizarán en grupos de tres integrantes y trabajarán leyendo, con el objetivo de desarrollar competencias para identificar, formular y resolver problemas, así como desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.

Luego, cada grupo resolverá un problema de la guía práctica de la asignatura (basada en el libro recomendado por la cátedra [14]) desarrollando competencias de liderazgo y colaboración, propiciando el pensamiento crítico y la resolución de problemas, disponiendo de espacios de consultas presenciales de los profesores involucrados.

En una primera instancia se presentarán las resoluciones en forma escrita a fin de evacuar dudas y contar con una primera revisión por parte de los docentes. En la misma se presentan los procedimientos análiticos y los resultados gráficos obtenidos con el software.

Una vez trascurridos 10 días, oralmente deberán demostrar la resolución del problema mediante la aplicación del concepto, explicando la resolución analítica y la ejecución de una animación (simulación), en el Software Geogebra. Dicho software es elegido por la cátedra ya que es un software libre, los alumnos están familiarizados con él porque lo han utilizado en la secundaria, tiene una interfaz clara y de fácil de manejar. Como ventajas además se pueden destacar [15]:

- Permite crear materiales interactivos (representaciones gráficas, simulaciones dinámicas)
- Incluye cálculos algebraicos
- Fomenta la participación activa de los estudiantes
- Logra la motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje

Al finalizar la exposición, los resultados son presentados en una rúbrica (véase Fig. 1). Este instrumento de evaluación, puede definirse como una guía precisa que valora los aprendizajes y productos realizados. Permite que los alumnos evalúen su propio trabajo al ofrecerles simultáneamente criterios claros de lo que supone una actuación satisfactoria. [16-17]

Fig. 1. Rúbrica.

3 Resultados y Conclusiones

Se considera que la organización en grupos propiciará liderazgo, esfuerzos conjuntos entorno a objetivos, negociación de soluciones (mediación; esfuerzo de las personas por prevenir conflictos o resolverlos; realizar acuerdos; arbitrar; etc.) y conexión personal (empatía; reconocer y responder adecuadamente a los sentimientos y preocupaciones de la gente; trabajar en equipo; persuadir; ser asertivo), etc. [18]

El tipo de valoración contribuye a una evaluación sumativa de la asignatura AMII, desde la valoración formativa de cada contenido, apostando en este caso, al aprendizaje colaborativo, pues se realizará la división del grupo amplio de la clase en pequeños equipos heterogéneos que sean representativos de la comisión en cuanto a los distintos niveles de rendimiento y se valorará el trabajo grupal que debe realizarse para conseguir los objetivos propuestos.

En lo que respecta a los contenidos a evaluar, estos incluyen el dominio cognitivo del concepto y su aplicación en otros contextos, el afectivo relacionado a actitudes personales y grupales, y procedimental en el desarrollo de habilidades, destrezas, organización del tiempo, etc. para la solución del problema planteado.

Las técnicas de evaluación usadas serán la observación, entrevista y de desempeño. El sistema de evaluación será tanto cualitativo como cuantitativo. Los criterios adoptados para evaluar a los alumnos se basarán en la realización de los trabajos y la presentación oral de los mismos.

Para ello, se considerará la exposición individual, la presentación de la resolución del problema y las respuestas a las preguntas realizadas por los docentes. Luego se evaluará la exposición y presentación de la solución grupal. En última instancia, luego de valorar el desempeño de cada alumno y del grupo, los docentes realizarán los aportes que contribuyan a la mejora académica y al desempeño en la vida real.

Como docentes se recurre a las didácticas activas, con la intención de resultar mediadores, adaptando los recursos didácticos, mediante las tecnologías emergentes, para lograr potenciar los procesos de aprendizaje. El uso de software es una exigencia curricular, esta actividad propiciará su revalorización, no sólo como herramienta para resolver cálculos sino como motivador del aprendizaje y favorecedor en el desarrollo de competencias.

Esta propuesta, con un enfoque basado en competencias, fomenta el aprendizaje significativo, priorizando la propia experiencia del alumno como eje central, cuya evaluación se basa en una retroalimentación que permite un desarrollo y aprendizaje continuo, logrando que el alumno alcance independencia, mejore su autonomía y la cooperación con otros, y le permita estar mejor preparado para afrontar futuros problemas profesionales.

Mediante este trabajo se pretende contribuir a la calidad educativa en nuestra institución y a la mejora continua de nuestras prácticas docentes.

Referencias

1. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería -CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina - Libro rojo de CONFEDI, Roberto Giordano Lerena, Sandra Cirimelo, (2018).
2. Dominighini, C.; Cataldi, Z.; Juanto, S. Reflexiones sobre la formación de ingenieros. Fundamentos de química. Aportes del Programa de Tecnología Educativa y Enseñanza de Ingeniería. *VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021*. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
3. Scagnetti, O.; Casco, E.; Ramírez, S. Una experiencia para desarrollar las competencias en la formación de ingenieros. *VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021*. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
4. Culzoni, C.; Alegre, L.; Farías, M.; Cinat, P. Competencias en experiencias de mecánica utilizando un teléfono celular. *VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021*. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
5. Cafferata, S.; Culzoni, C.; Juanto, S.; Kanobel, M. C.; Paruelo, J. Grado de avance del proyecto "La modelización como recurso para la integración de conocimientos y el desarrollo de competencias". *VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021*. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
6. Cura, R. O.; Girón, P.; Krumrick, E.; Marinsalta, M. M.; Sacco, L. Evaluación del desarrollo de competencias en carreras de Ingeniería (UTN FRBBFRN-FRSN). VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
7. Roldán, S., Suárez, C. La lecto-escritura en el primer nivel de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Regional Santa Fe. VIII Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería-JEIN 2021. (2022) DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.893.2021
8. Zabalza Beraza, M. A. El trabajo por competencias en la enseñanza universitaria. (2007).
9. Coll, C. Enseñar y aprender en el mundo actual: desafíos y encrucijadas. Pensamiento Iberoamericano, 7, 47-66. http://www.educacionysociedad.org/images/img_noticias/docu4e92a454ee178_10102011_452am.pdf. (2010).
10. Soria Aznar, M.; Giménez, I.; Fanlo, A. J.; Escanero Marcen, J. F. El mapa conceptual: una nueva herramienta de trabajo. Diseño de una práctica para fisiología. http://www.unizar.es/eees/innovacion06/COMUNIC_PUBLI/BLOQUE_IV/CAP_IV_5.pdf (2007). Accedido el 23 de Junio de 2022
11. Brown, S; Glasner, A. Evaluar en la Universidad. Problemas y nuevos enfoques. Buckingham: Open University Press. http://cuaderno.pucmm.edu.do/index.php/cuadernodepedagogia/article/view/17/16 (2003).
12. Cabona, F.; Wierszylo, L. La evaluación de los aprendizajes. Material de curso Didáctica General para Docentes. Secretaría académica Universidad Tecnológica Nacional. (2015).
13. Davini, M. C. Métodos de enseñanza. *Didáctica general para maestros y profesores.* Buenos Aires. Santillana. (2008).
14. Stewart, J., Romo, J. H. *Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas* (6a. ed.). México. (2008).
15. Leal Ramírez, S.; Lezcano Rodríguez, L. E.; Gilbert Benítez, E. M. Usos innovadores del software GeoGebra en la enseñanza de la matemática. VARONA, núm. 72, (2021). https://www.redalyc.org/journal/3606/360670798011/html/
16. Lanzillotta, S.; Billodas, A. El uso de rúbricas para evaluar la actuación de los estudiantes en la resolución de problemas. https://www.exactas.unlp.edu.ar/uploads/docs/jeanscen_lanzillotta_1.pdf. Accedido el 23 de Junio de 2022
17. Florina Gatica, L.; Uribarren Berrueta, T. ¿Cómo elaborar una rúbrica? *Investigación en Educación Médica*; 2(1):pp. 61-65 Elsevier México (2013).
18. Casco, E., De Santis, E., Tibaldo, A., Verrengia, M. "El uso de tecnologías, la comprensión y la evaluación". VI Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico Tecnológicas (IPECyT), (2018).

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales para la Modelación Matemática en Ingeniería

Natali, Osvaldo [1], Pastore, Liliana B [1] Roitman, Claudia A.[1], Stump, Pablo [2]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Vélez Sarsfield 1611
{ osvaldo natali, liliana_pastore, claudia.roitman}@unc.edu.ar,
[2] Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Vélez Sarsfield 1611
pablostumpf@unc.edu.ar

Resumen. La contribución de la matemática a la resolución de problemas de ingeniería es esencial. Por este motivo, un equipo de profesores, ha colaborado desde las materias de primer año, aportando los conocimientos necesarios para que los estudiantes lleguen con una buena base a segundo año, donde cursan Análisis Matemático II. En esta asignatura se realizó la investigación. El contenido trabajado fue ecuaciones diferenciales. Estas se presentan en diversas aplicaciones de la Ingeniería. Para esta experiencia se realizó una actividad que consistió en una investigación sobre distintos procesos en donde las ecuaciones diferenciales ordinarias intervienen y la posterior realización una monografía basada en la Modelación Matemática. El cierre de la actividad consistió en una ponencia oral de los grupos de trabajo. Los estudiantes manifestaron que dicha actividad les ayudo a terminar de comprender el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales,.Modelación matemática, Competencias.

1 Introducción

Es innegable la contribución de la matemática en la resolución de problemas de ingeniería, es por ello que su estudio, comprensión y aplicación revisten un carácter de vital importancia.

Entre las diversas dificultades que enfrentan los docentes que imparten las materias correspondientes a las ciencias básicas de la ingeniería, se puede mencionar: la articulación de las mismas, tanto horizontal como transversalmente; hacer evidente su colaboración en la formación del egresado, responder a la inquietud que manifiestan los estudiantes sobre el papel que tiene la materia dentro de la carrera.

Por este motivo, un equipo de profesores, ha colaborado desde las materias de primer año (Introducción a la Matemática, Análisis Matemático I y Física I), aportando los conocimientos básicos, para llegar con una buena base matemática a segundo año donde se cursa la materia Análisis Matemático II.

En Análisis Matemático II se imparten los conceptos necesarios para la resolución de los diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales tienen gran utilidad en las diversas ramas de la Ingeniería. Es por ello que se plantea esta experiencia, en la cual, se propone a los estudiantes, la realización de una monografía, basada en la Modelación Matemática, en el cual se aplique las ecuaciones diferenciales (por ejemplo: describir un fenómeno físico, etc.).

Además, este tipo de trabajos tienen por finalidad acercar a los estudiantes (desde el inicio de su carrera), a la forma en que un profesional se desempeñará a lo largo de su vida laboral. Por ello es que, también su implementa-

ción colaborará con la formación del perfil del egresado, aportando, no solo en las competencias genéricas tecnológicas sino también en las sociales, políticas y actitudinales, es decir: identificar, formular y resolver problemas de ingeniería, utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería, desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo, comunicarse con efectividad y aprender en forma continua y autónoma.

Al estar involucradas varias materias de diversos años, se optó por realizar un proceso de investigación, el cual, se caracteriza por ser una poderosa herramienta con la que cuentan los docentes para cuestionar y mejorar sus prácticas. La muestra que se tomó fue por conveniencia, es decir, la que el docente de Análisis Matemático II tenía a su disposición.

Para implementar la monografía se utilizaron espacios en las clases de la materia, con el fin de informarles a los estudiantes las características de la tarea, los objetivos que se perseguían y los materiales con que trabajarían

2 Marco Teórico

En este trabajo se propone utilizar la modelación matemática, mediante la utilización de ecuaciones diferenciales, con el fin de acercar a los estudiantes a situaciones problemáticas en contextos reales.

La enseñanza de la matemática en las carreras de Ingeniería suele presentar dificultades u obstáculos que hacen que los estudiantes no terminan de comprender algunos temas; la pregunta de siempre es "*esto que estoy aprendiendo, ¿para qué me* sirve? ¿Lo voy a usar en mi carrera?". O bien, *"esto tan abstracto, ¿tiene alguna aplicación?"*

Autores como Bachelard y Brousseau, (citados por Plaza Galvez y Villa-Ochoa [1]) se han dedicado a identificar cuales son los obstáculos que se presentan en la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería.

Basado en los trabajos de Brousseau, Barrantes [2] se propone trabajar en el aula situaciones problemáticas con el propósito de identificar obstáculos y cómo superarlos. Además de los obstáculos didácticos, también suelen presentarse los cognitivos**.** Se refieren a conocimientos que han sido convenientes para la solución de problemas en un lapso de tiempo y que luego resultan inapropiados para enfrentar problemas distintos como lo plantean Palarea y Socas [3]

Dichos obstáculos se almacenan en la mente de los estudiantes. Involucra también, modelos de pensamiento, habilidades de resolución, comprensión lectora y capacidad de análisis.

Plaza Galvez y Villa-Ochoa, en su estudio sobre obstáculos, advirtió que algunos estudiantes lo manifestaron durante el proceso de modelación matemática en cursos de Ecuaciones Diferenciales; los principales obstáculos identificados fueron de carácter conceptual (escasa fortaleza en elementos previos al desarrollo del tema), cognitivo (análisis, clasificación y comprensión de las soluciones) y didáctico **(**no se establecen significados y conexiones entre las ecuaciones diferenciales y el fenómeno estudiado).

Los trabajos de Camarena Gallardo [4] citados en [5] caracterizan al proceso de modelización matemática como una estrategia didáctica en la formación de ingenieros. Si se decide trabajar de este modo, la modelización debe ser estimulada en el aula [4] para que refuerce en los estudiantes la capacidad de reflexión y análisis frente a un escenario complejo como es la solución de un problema.

3 Aplicación de ecuaciones diferenciales en problemas de Ingeniería

3.1 Contexto

La implementación de la propuesta fue realizada en la materia Análisis Matemático II, común para todas las carreras de ingeniería, cuyos cursos regulares, se dictan durante el primer semestre del año. En el segundo semestre, se realiza el redictado de la asignatura.

La cantidad de comisiones en donde se impartió la asignatura durante la primera mitad del año 2021 fueron 13, con un promedio de 100 estudiantes en cada uno de ellos. Los horarios de los mismos respetan las tres franjas horarias propuestas por la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Córdoba, y son: turno mañana, tarde y noche. Tanto en el 2020 como el 2021, la materia fue dictada en forma virtual sincrónica, mediante el uso del aplicativo Google Meet. Además, cada curso posee su aula virtual, además se ser utilizada

como medio de comunicación oficial, tiene: material de estudio, guías de trabajos prácticos, videos de clases, simulacros de parciales y toda la información que cada docente considere importante para el normal funcionamiento del cursado de la asignatura.

La materia tiene dos instancias de evaluación que son dos parciales escritos que se desarrollan en forma individual, pudiendo recuperar uno de ellos. La promoción se obtiene aprobando los dos parciales, ya sea en la primera instancia o aprobando uno de ellos y recuperando el otro. La regularidad se alcanza con la aprobación de un único parcial en cualquiera de las instancias.

En este contexto de masividad, se decidió trabajar solamente con un curso, para poder realizar un mejor seguimiento del proceso de elaboración del trabajo práctico solicitado. El incentivo para realizar el mismo, además de la aplicación tangible de las ecuaciones diferenciales en casos concretos consistió en ver como las ecuaciones diferenciales aparecen en múltiples procesos en las diferentes carreras que los estudiantes han elegido; procesos que estudiaran en profundidad en asignaturas que aparecen a lo largo de la carrera. Por otro lado, los estudiantes debieron contactarse con los docentes de dichas asignaturas para orientarlos en el tema elegido y de esa manera lograr un primer acercamiento con asignaturas que cursarán posteriormente. Otro incentivo muy importante se relaciona con el trabajo colaborativo; se sabe que en toda profesión los grupos de trabajo son importantes, más si son interdisciplinarios.

Los grupos formados para este trabajo están constituidos. por estudiantes de diversas carreras lo cual indica que cada integrante puede brindar aportes con una mirada particular desde la carrera elegida.

Finalmente, desde el grupo de investigación creemos importante que, desde los primeros años de las diversas carreras, los estudiantes comiencen a familiarizarse con la elaboración de escritos (informes, monografías, etc) y con presentaciones orales ante pares y docentes.

3.2 Monografía

La propuesta de trabajo presentada y ejecutada por los estudiantes de la materia Análisis Matemático I durante el primer semestre de 2021 consistió en la formación de equipos de 3 participantes (Salvo algunas excepciones) para desarrollar una monografía. El grupo debió elegir un tema de modelado matemático, en el cual, aplicó Ecuaciones Diferenciales. La monografía debió seguir el formato solicitado de acuerdo al documento adjuntado en el aula virtual.

Además de la monografía, se debe realizar una breve presentación en PowerPoint, donde el equipo explica en qué consiste el trabajo, el cálculo de las soluciones, su análisis y las conclusiones que obtuvieron a partir del trabajo realizado.

También se incentiva el uso del aplicativo Python para realizar las gráficas de las curvas integrales, para ello se cuenta con un modelo de notebook con la teoría y ejemplos para su uso. Otros aplicativos que se pueden utilizar son Octave/Matlab.

Cada equipo debe elegir un líder el que será el encargado de la gestión y comunicación del estado del trabajo ante el docente encargado del curso. Durante el proceso de elaboración de la monografía, los estudiantes fueron presentan los avances logrados para su visualización por parte del docente con el objetivo de realizar las sugerencias necesarias para ir mejorando la propuesta. El tiempo previsto para la entrega y posterior presentación oral fue de 20 días desde el momento de la definición del tema a desarrollar. Finalizada la actividad se presentó a los estudiantes un instrumento escrito para evaluar la propuesta.

4 Recolección de datos

Luego de la realización de la monografía, la correspondiente exposición y el debate entre los estudiantes, el docente entregó a cada participante una encuesta, que se utilizó como instrumento de evaluación de la intervención pedagógica realizada.

La encuesta contenía aspectos tanto didácticos como pedagógicos referidos a modelación de diversos problemas que se suscitan en ingeniería, mediante la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La primera pregunta era de carácter formal, en el sentido de ver cómo se encontraba el estudiante en relación a las asignaturas correlativas necesarias para cursar Análisis Matemático II.

Se comenzó a analizar el instrumento de evaluación a partir de la pregunta 3.

El instrumento de recolección de datos utilizado fue el siguiente:

4.1 Encuesta

Pregunta 1. Indique el estado en que se encuentra con las materias correlativas

Materia	Regular	Aprobada/ indicar la nota
Introducción a la Matemática		
Análisis Matemático I		
Álgebra Lineal		

Pregunta 2. ¿Es recursante?
- Si
- No

Pregunta 3. La presentación de la monografía, ¿le permitió reforzar el estudio de las ecuaciones diferenciales vistas en clase?
- Si
- No

Pregunta 4. Indique aspectos positivos en relación con su proceso de aprendizaje al realizar la monografía.

Aspectos Positivos

Pregunta 5. Indique aspectos negativos en relación con su proceso de aprendizaje al realizar la monografía.

Aspectos Negativos

5 Análisis de los Resultados

En este apartado se analizarán y tabularán los resultados obtenidos en las encuestas.

Pregunta 1. Estado en que se encuentra con las materias correlativas

Fig. 1. Porcentaje de estudiantes que aprobaron Introducción a la Matemática.

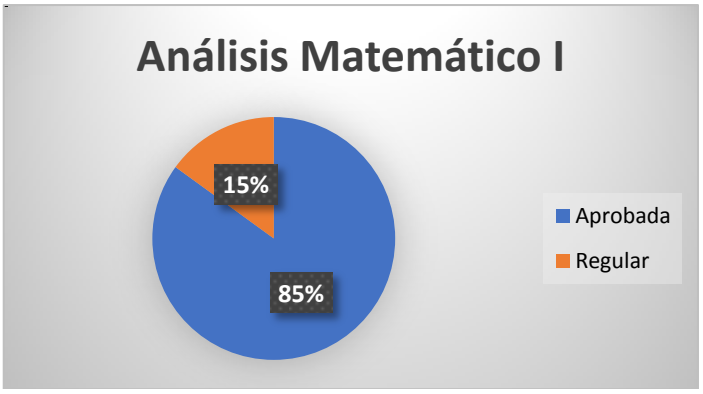


Fig. 2. Porcentaje de estudiantes que aprobaron Análisis Matemático I.

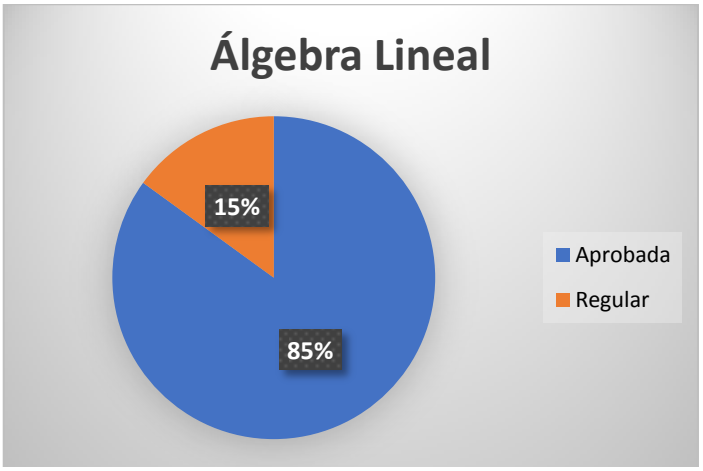


Fig. 3. Porcentaje de estudiantes que aprobaron Álgebra Lineal.

Pregunta 2. ¿Es recursante?

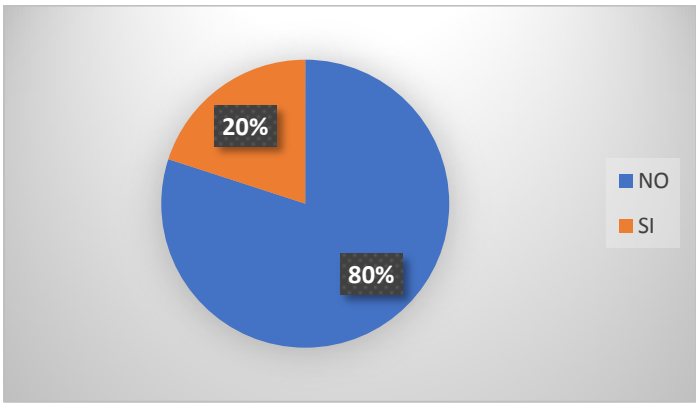


Fig. 4. Estudiantes recursantes.

Pregunta 3. La presentación de la monografía, ¿le permitió reforzar el estudio sobre ecuaciones diferenciales?

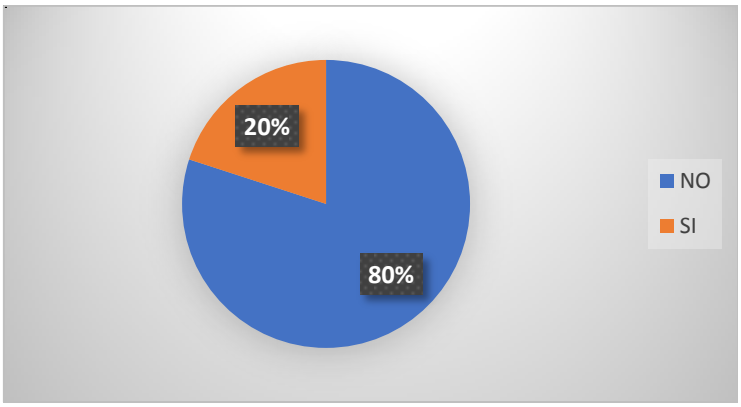


Fig. 5. Actividad didáctica refuerza conocimientos sobre ecuaciones diferenciales.

Pregunta 4. Aspectos positivos
Se pudo agrupar las respuestas en tres categorías:

a- Nos permitió conocer temas de asignaturas vinculadas con la matemática (40)
b- Pudimos ver la aplicación directa de las ecuaciones diferenciales (30)
c- Aprendimos a trabajar en grupo (30)

Pregunta 5. Aspectos negativos
Se pudo agrupar las respuestas en tres categorías:

a- Ninguno 85
b- Nos costó entender algunas aplicaciones porque no conocíamos bien el tema (10)
c- En general, nos fue difícil encontrarnos para trabajar en grupo (80).

Pregunta 6. ¿Ha realizado actividades que relacionen conceptos matemáticos con aplicaciones directas en ingeniería, en otras asignaturas de su carrera?

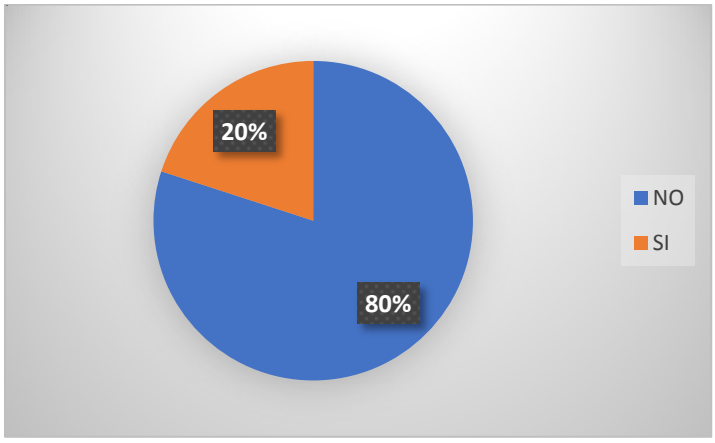


Fig. 6. Actividad didáctica similar en otras materias.

6 Conclusiones y trabajos futuros

En base a los resultados obtenidos a partir del instrumento de evaluación de la propuesta entregado a los estudiantes, podemos arribar a las siguientes conclusiones:

- La mayoría de los estudiantes tienen aprobadas las asignaturas correlativas, lo cual da un indicio de que los contenidos básicos para comenzar a desarrollar los temas de Análisis Matemático II se pueden garantizar. Los pocos estudiantes que tienen regularizadas alguna de las tres asignaturas correlativas, también tienen incorporado los conocimientos básicos; no se sabe cuál es la razón por la cual todavía no han rendido dichas materias. Por otro lado, la mayoría está cursando por primera vez la asignatura Análisis Matemático II (son muy pocos los recursantes).
- El hecho de que tuvieran que investigar distintos procesos que se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales les permitió reforzar los conceptos de ecuaciones diferenciales; el hecho de que vieran como un proceso se puede modelar con estas ecuaciones ayudó a que resignificaran las aplicaciones de las mismas por estar enmarcadas en un contexto real, propio de la ingeniería.
- En el análisis de los aspectos positivos se pudieron agrupar las respuestas en tres categorías: la primera se relaciona con la transversalidad, es decir que pudieron indagar sobre temas de asignaturas que están cursando junto con Análisis Matemático II y con otras que tendrán en años posteriores. Esto da sentido al estudio de la asignatura ya que los estudiantes ven que tiene una aplicación directa en procesos relacionados con la ingeniería. Lo relacionado con el trabajo grupal, lo podemos asociar al trabajo cooperativo, contexto óptimo para el desarrollo del aprendizaje y que los estudiantes destacan como algo positivo. Esta forma de trabajo se plantea poco en las materias básicas debido a la cantidad de estudiantes por comisión y por el tiempo que se necesita para llevarla a cabo; sin embargo, podemos decir que es recomendable en base a lo que respondieron los estudiantes. Muy pocos encontraron aspectos negativos en esta forma de trabajo. Los pocos que brindaron algún dato está relacionado, no con la metodología (estudio de modelos) sino con la falta de información y formación en el tema elegido. Aclaramos que ellos podían consultar con profesores de asignaturas afines al tema propuesto. El otro aspecto negativo detectado, se refiere a una cuestión operacional y de organización para el trabajo en grupo.
- Con respecto al último punto que figura en el instrumento, se pudo observar que solo algunas carreras trabajan la Modelación. La mayoría no lo hace, quizás por la razón esgrimida más arriba en cuanto a la cantidad de estudiantes por comisión y por los tiempos que demanda su realización.

En esta actividad se les pidió a los estudiantes que investigaran sobre procesos que se pudieran modelar mediante ecuaciones diferenciales. En una segunda etapa, está previsto plantearles una situación y que ellos busquen modelizar con una ecuación diferencial para después resolverla y extraer conclusiones del proceso.

Este trabajo abre otras líneas para seguir trabajando, como por ejemplo la posibilidad de evaluar utilizando la estrategia de modelos.

Referencias

1. Plaza Galvez, L.F ;. Villa-Ochoa, J.A. Obstáculos Detectados en la Formación de Ingenieros. Una revisión Literaria. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte.* Vol 1, N° 58, pp: 223-241 (2019).
2. Barrantes, H. Los Obstáculos Epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Vol.1 N° 2, pp. 1-7 (2006).
3. Palarea, M ; Socas, M. Algunos Obstáculos Cognitivos en el Aprendizaje del Lenguaje Algebraico. *Revista Suma.* N°16, pp. 91-98 (1994).
4. Peña Paez, L.M. ; Morales Garcia, J.F. La modelación matematica como estrategia de enseñanza-aprendizaje. El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería.* Vol. 11, N° 21, pp. 64-71 (2016).
5. Camanera Gallardo, P. La modelación matematica en la formación del ingeniero.*Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.* Vol 5. N°3, pp. 1-10 (2012)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Situación problemática en R Studio: Instrumento de aprendizaje para la prueba de Bondad de Ajuste de Pearson

Marisa Battisti Arduin[1], Nanci Odetti[1], Flavio Lovatto[1]
[1] Departamento Matemático, Facultad de Ingeniería,Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta Prov. 11 Km 10, Oro Verde (Dpto. Paraná), Entre Ríos, Argentina
{marisa.battisti, nanci.odetti, flavio.lovatto}@uner.edu.ar

Resumen. Durante los últimos años, los docentes universitarios de las asignaturas de la disciplina Matemática se ven en la necesidad imperiosa de cambiar el enfoque de la enseñanza basada en contenidos, a una enseñanza basada en competencias. El presente trabajo es una propuesta que busca seguir esta orientación educativa, con el objetivo de abordar la Prueba de Bondad de Ajuste de Pearson, utilizando un recurso de enseñanza elaborado en R Studio y mediante el logro de la competencia de resolución de problemas. Si bien existen numerosos ejercicios de aplicación del tema en los materiales bibliográficos, se observa que no son tantas las actividades estrechamente relacionadas con la Bioingeniería. Por esta razón se pensó en una situación problemática diferente, más contextualizada, que pretende ser motivadora y aprovechar, además, las ventajas de la simulación de datos.

Palabras Clave: Resolución de problemas, Probabilidad, Software estadístico, Distribución chi cuadrado.

1 Introducción

La enseñanza basada en competencias es una orientación educativa que está en auge debido a que pretende elevar la calidad educativa en las carreras de Ingeniería, fomentando el egreso de profesionales capaces de ejercer su actividad en la realidad que lo rodea no solo con lo que debe saber, sino también sabiendo hacer [1].

Este *saber hacer* no emerge de la simple adquisición de conocimientos, sino que es producto de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, que amerita ser reconocido expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo.

Según el documento elaborado por Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI) del año 2014 [2], se entiende por competencia a la "capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas y valores, permitiendo movilizar distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales".

Durante los últimos años, los docentes universitarios se ven en la necesidad imperiosa de cambiar el enfoque de la enseñanza basada en contenidos de las asignaturas de la disciplina Matemática a una enseñanza basada en competencias, la cual conduce a considerar en la formación del estudiante: los contenidos académicos, los procedimentales y los actitudinales que están involucrados con el desarrollo de las competencias [1]. Este nuevo entramado significa planificar la enseñanza considerando la diversidad de contenidos y sus aplicaciones, previendo actividades nuevas que potencien el aprendizaje.

El presente trabajo es una propuesta que busca seguir esta orientación educativa basada en competencias, y ha sido elaborada por el equipo docente de la cátedra Probabilidad y Estadística, asignatura de carácter cuatrimestral y correspondiente al segundo año de la carrera de Bioingeniería, impartida en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina.

Durante el dictado de la materia, se comienza, en una primera etapa, abordando los conceptos y las principales

leyes que garantizan el cálculo de probabilidades, luego se estudian las variables aleatorias discretas y continuas, las funciones de distribución de probabilidad o de densidad de probabilidad, además de distribuciones teóricas como la Binomial, Poisson, Normal y Exponencial, entre otras. En una segunda instancia se desarrollan los fundamentos de la estimación y la prueba de hipótesis, concluyendo con las denominada Prueba de Bondad de Ajuste de Pearson.

Este contenido no sólo tiene su ubicación al final del programa por su grado de complejidad, sino porque articula un gran número de conceptualizaciones para su tratamiento: desde los cálculos sencillos de probabilidades, pasando por las distribuciones teóricas ya mencionadas, hasta todo el bagaje necesario para efectuar un contraste estadístico, incluyendo la formulación de las hipótesis correspondientes, el cómputo de un estadístico de prueba a partir de los datos muestrales, la obtención de un valor P o p-value y la decisión final con su debida conclusión respecto al interrogante originado.

Al ser dicho contenido un tópico dotado de complejidad, pero a su vez cargado de significación dentro de la disciplina Estadística, el equipo de cátedra considera que debe ser explotado aún más mostrando al grupo de estudiantes las posibilidades de implementación del mismo en problemas inherentes a su futuro campo de actuación.

Se coincide en la idea de que el estudiante como tal logra mejores aprendizajes cuando alcanza a dimensionar el empleo de un nuevo contenido en el ámbito de la carrera que eligió llevar a cabo. Motivo por el cual, se pensó en una actividad de aplicación del contenido en cuestión y que tenga al alumnado como protagonista en la resolución de la misma.

Habitualmente, la clase teórica en la cual se aborda esta temática comienza con el desarrollo del bagaje que amerita su puesta en práctica, la redacción de las hipótesis de la prueba, el cálculo del estadístico y su distribución de probabilidad. Luego son mostrados algunos ejemplos relativamente sencillos a fines de poder ilustrar lo impartido en casos más concretos. Los ejercicios que se afrontan en clases prácticas sobre el tema implican evaluar mediante dicho contraste si, por ejemplo, la puntuación obtenida al lanzar un dado es una variable aleatoria con comportamiento probabilístico Binomial a partir de una serie de resultados de 50 tiradas de un dado balanceado, o bien, comprobar que la distribución de los grupos sanguíneos en una cierta región es uniforme, recurriendo a los datos de una muestra de 200 sujetos.

Existen numerosos ejemplos más en los materiales bibliográficos, pero no necesariamente se observa que sean actividades estrechamente relacionadas con la Bioingeniería. Además, se detectan ciertas distancias entre contar con una serie de datos recabados y organizados en una tabla para poder hacer los cálculos necesarios, frente a simular los datos, organizarlos y a partir de allí encarar la resolución del problema. Es decir, se ponen muchas más capacidades en juego cuando se tienen los datos en crudo, originados por una simulación mediante software por ejemplo.

Sobre la situación expuesta, los docentes de la asignatura se posicionan en un acercamiento hacia un proceso de innovación didáctica emergente, adhiriendo a las palabras de Libedinsky [3], buscando la intersección entre lo que se desea alcanzar desde el equipo de cátedra (la utilización de un contenido específico) y algo que puede ser de interés para el estudiante de Bioingeniería (la factible utilidad del contenido en su contexto).

El objetivo de la metodología aquí propuesta es abordar la Prueba de Bondad de Ajuste de Pearson, utilizando un recurso de enseñanza diseñado en R Studio, y fomentando el logro de la competencia: "Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería" que es una competencia tecnológica de las diez competencias de egreso genéricas consignadas en el Libro Rojo del CONFEDI [4].

A partir de las ventajas que ofrece mencionado software (en su versión en línea: R Studio Cloud), se simulará una caja de Petri con ciertas bacterias en ella y se aplicará este contraste estadístico para evaluar si la distribución de los microorganismos sigue un modelo de probabilidad teórico específico.

2 Desarrollo de la propuesta

La situación de aprendizaje consiste en iniciar la clase de teoría dentro de uno de los laboratorios de computación de la facultad y pedir a los estudiantes, reunidos de a pares, comiencen por leer el enunciado de la actividad propuesta. Hecho esto, deberán ejecutar la sintaxis proporcionada en R Studio Cloud (https://rstudio.cloud/) y generar, cada grupo, su propia "caja de Petri" con las bacterias distribuidas en ella. Al ser una simulación con una distribución pseudo aleatoria de las bacterias, cabe aclarar que sucesivas ejecuciones del código generarán resultados similares, pero no iguales.

Una vez obtenida, deberán comenzar a pensar cómo resolver el problema y el docente podrá efectuar interrogantes como:

- ¿Cuál/es variables están implicadas en el problema? ¿Cómo se clasifican?
- ¿Es conocida su distribución de probabilidad? ¿Son conocidas su media y su varianza?
- ¿Qué desea probarse? ¿cuáles serían las hipótesis de interés? ¿Existe alguna prueba estadística que permita validar esa hipótesis? ¿Cuál?

Luego de obtener ciertas ideas al respecto, el docente podrá mostrar la necesidad de desarrollar una nueva prueba de hipótesis, la cual permitirá evaluar si una variable aleatoria tiene determinada distribución de probabilidad o no.

Después del adecuado abordaje teórico del contenido envuelto, se continuará resolviendo la situación problemática inicial, a fines de ejemplificar el nuevo test estadístico y dar respuesta al interrogante fundamental.

Esta tarea está pensada para implementarse antes de culminar el segundo cuatrimestre del año académico en curso.

2.1 Enunciado de la actividad

Un bioquímico ha preparado un plato de Petri con una muestra de bacterias. El medio de cultivo empleado ha sido LB-Agar, dejando la placa en un lugar oscuro y cálido durante seis días.

Transcurrido ese plazo el bioquímico ha observado con un microscopio la placa notando que los microorganismos se han reproducido en gran medida.

Para reproducir una situación similar a la experimentada, le pedimos que ejecute la presente sintaxis en R Studio Cloud (véase algoritmo 1).

Algoritmo 1. Sintaxis de simulación de la caja de Petri con bacterias en R Studio Cloud.

```
  #Simulacion de una colonia de bacterias en un plato de Petri
  plot(x=c(-2,2),y=c(-2,2),type =”n”, xlab=””,ylab=””,asp =1,axes=FALSE)
  #dibuja el plato de Petri
  curve(sqrt(4-x^2),from=-2,to=2,col=”darkgray”,lwd=4,add =TRUE)
  curve(-sqrt(4-x^2),from=-2,to=2,col=”darkgray”,lwd=4,add=TRUE)
  #resalta los cuadros internos
  rect(xleft=-1,ytop=1.5,xright=1,ybottom=-1.5,border=NA,col=”paleturquoi-
se”)
  rect(xleft=-1.5,ytop=1,xright=1.5,ybottom=-1,border=NA,col=”paleturquoi-
se”)
  #dibuja el reticulado
  abline(v=seq(from=-2,to=2,by=0.5),lty=3,lwd=1.5,col=”royalblue1”)
  abline(h=seq(from=-2,to=2,by=0.5),lty=3,lwd=1.5,col=”royalblue1”)
  #dibuja las bacterias
  N<-100
  x<- runif(n=N*2,min=-2,max=2)
  y<- runif(n=N*2,min=-2,max=2)
  xd<-x[which(x^2+y^2 <= 3.8)]
  yd<-y[which(x^2+y^2 <= 3.8)]
  points                (xd,yd,pch=19,col=”sienna1”,cex=rnorm(n=length(xd),-
mean=0.6,sd=0.1))
  #cuentalas
  cuenta<-  function(x0,x1,y0,y1)  {cnt<-  sum(as.numeric((xd>=x0  &xd<x1  &
yd>=y0 & yd<y1)))
  text(x=mean(c(x0,x1)),y=mean(c(y0,y1)),as.character
       (cnt),col=”black”,cex=1.2,family=”mono”,font=2)
  }
  for(x in c(-1,-0.5,0,0.5))
  for(y in c(1,0.5,0,-0.5,-1,-1.5))
      cuenta(x,x+0.5,y,y+0.5)
  for(y in c(0.5,0,-0.5,-1)) {
```

```
cuenta(-1.5,-1,y,y+0.5)
cuenta(1,1.5,y,y+0.5)
```

El profesional está interesado en estudiar el número de bacterias que se distribuyen en cada uno de los 32 cuadrantes de igual superficie de su placa y supone que el mismo es una variable aleatoria con distribución de Poisson. A continuación, les pedimos:

a. Empleando la imagen que ha observado el bioquímico en su microscopio y que han simulado en R Studio Cloud, efectúe el test de hipótesis correspondiente para probar que efectivamente el número de bacterias por recuadro es una variable con distribución probabilística de Poisson.

b. En caso de que el profesional esté en lo correcto, brinde una estimación del número promedio de bacterias por cuadrante registradas al cabo de seis días de cultivo.

2.2 Resolución de la actividad

Luego de ejecutada la sintaxis en el software correspondiente, cada equipo de trabajo tendrá una imagen con su propia "caja de Petri" (véase Fig. 1), recomendando que presionen sobre la opción de Vista Zoom para obtener una imagen más acabada y completa de la caja de Petri. Cabe aclarar aquí que al ser una simulación con una distribución pseudo aleatoria de las bacterias, sucesivas ejecuciones del código generarán resultados similares, pero no iguales. Por lo tanto, no todos los grupos tendrán iguales cantidades de bacterias dentro de sus cajas.

Con las preguntas generadas por el docente al inicio, el estudiantado estará en condiciones de definir la variable aleatoria bajo estudio y formular las hipótesis del contraste estadístico adecuado para comprobar la suposición del bioquímico.

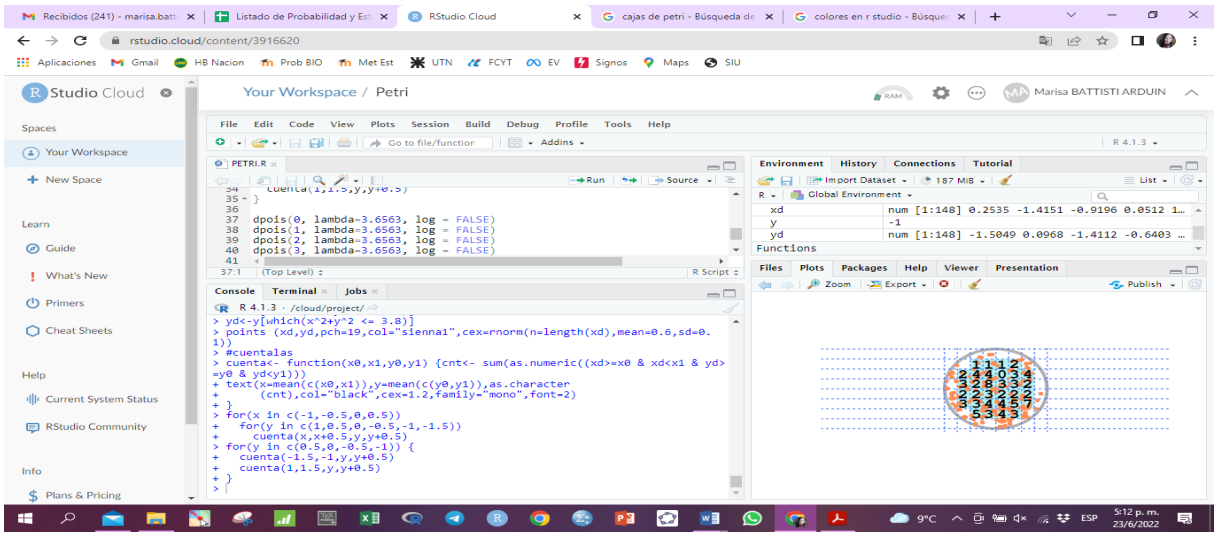


Fig. 1. Vista del área de trabajo en R Studio Cloud luego de ejecutada la sintaxis propuesta

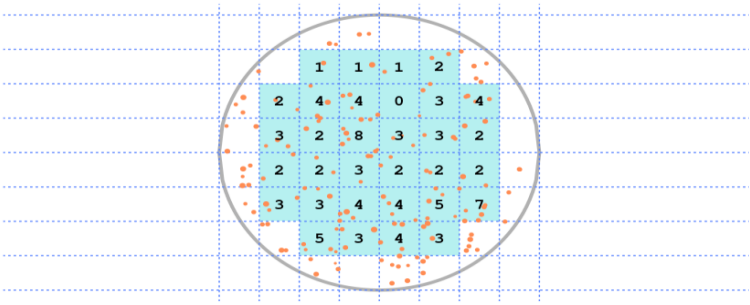


Fig. 2. Vista Zoom de la ventana Plots obtenida en R Studio Cloud: simulación de la caja de Petri con bacterias agrupadas y contabilizadas en cuadros.

Definirán la variable aleatoria discreta X que representa el "número de bacterias por cuadrante de la placa de Petri luego de 6 días de cultivo". El contraste estadístico adecuado será la prueba de Bondad de Ajuste de Pearson, la cual sirve para evaluar qué tan bien se ajustan los datos experimentales a una distribución de probabilidad en particular. El test se basa en el nivel de ajuste existente entre la frecuencia de ocurrencia de las observaciones en la muestra recabada y las frecuencias esperadas que se obtienen a partir de la distribución hipotética [5]. Si la discrepancia entre los valores es de tal magnitud que pudiera deberse al azar, se concluye que la muestra puede haber sido extraída de una población con la distribución supuesta [6].

Las hipótesis que requerirán establecer para resolver esta situación problemática son las siguientes.

$H_0 : X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (es cierta la suposición del bioquímico).

$H_1 : No \quad H_0$ (no es cierta la suposición del bioquímico).

En la cual corresponde al parámetro de intensidad de la distribución de Poisson, ya abordada con anterioridad en la asignatura, y de la que saben además que tanto su media como su varianza es igual a dicho parámetro, es decir $\mu_X = \sigma_x^2 = \lambda$.

Con la imagen de la caja de Petri generada deberán confeccionar una tabla con las diferentes clases (clase i) y los valores observados correspondientes (o_i). En este sentido, precisarán contabilizar y resumir los datos referentes a la cantidad de cuadros que: no tienen bacteria alguna, aquellos que tienen una sola bacteria, y así hasta culminar, agrupando convenientemente en la última clase el número de cuadros que tienen cinco bacterias o más (véase Tabla 1).

Tabla 1. Conteo de número de bacterias y número de recuadros (valores observados) en la caja de Petri simulada en R Studio Cloud a partir de la sintaxis de la situación problemática.

Nro. de bacterias	Nro. de recuadros (o_i)
0	1
1	3
2	9
3	9
4	6
5 o más	4

El estadístico de esta prueba se define como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \qquad \textbf{(1)}$$

cuya distribución de probabilidad es Chi-cuadrado con $\upsilon = k - r - 1$ grados de libertad, siendo k la cantidad de clases y r la cantidad de parámetros que requieren estimarse. En el cálculo de dicho estadístico, intervienen las denominadas frecuencias esperadas, e_i, que se calculan multiplicando la cantidad de datos de la muestra (n) por la probabilidad (p_i) de pertenecer a la clase i-ésima de la tabla bajo la premisa planteada en la hipótesis nula.

En este problema, las probabilidades deberán computarlas recurriendo a la distribución de Poisson.

El alumnado recordará que

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2... \quad \textbf{(2)}$$

motivo por el cual, precisarán estimar previamente el valor de λ, ya que es desconocido. Atendiendo a que este valor es la media de la distribución de probabilidad, la estimación de este parámetro resultará de sumar los productos de entre cada valor de x por su frecuencia y dividiendo el total entre la suma de todas las frecuencias [6]:

$$\hat{\lambda} = \frac{0.(1)+1.(3)+2.(9)+3.(6)+4.(6)+5.(4)}{32} = 2{,}875 \quad \textbf{(3)}$$

En efecto, computarán las probabilidades puntuales con el valor del parámetro estimado y luego obtendrán las frecuencias esperadas.

$$p_1 = P(X=0) = f(0) = \frac{e^{-2{,}875}.(2{,}875)^{0}}{0!} = 0{,}0564 \Rightarrow e_1 = p_1.n = (0{,}0564).(32) = 1{,}8053 \quad \textbf{(4)}$$

$$p_2 = P(X=1) = f(1) = \frac{e^{-2{,}875}.(2{,}875)^{1}}{1!} = 0{,}1622 \Rightarrow e_2 = p_2.n = (0{,}1622).(32) = 5{,}1903 \quad \textbf{(5)}$$

$$p_3 = P(X=2) = f(2) = \frac{e^{-2{,}875}.(2{,}875)^{2}}{2!} = 0{,}2332 \Rightarrow e_3 = p_3.n = (0{,}2332).(32) = 7{,}4610 \quad \textbf{(6)}$$

$$p_4 = P(X=3) = f(3) = \frac{e^{-2{,}875}.(2{,}875)^{3}}{3!} = 0{,}2234 \Rightarrow e_4 = p_4.n = (0{,}2234).(32) = 7{,}1502 \quad \textbf{(7)}$$

$$p_5 = P(X=4) = f(4) = \frac{e^{-2{,}875}.(2{,}875)^{4}}{4!} = 0{,}1606 \Rightarrow e_5 = p_5.n = (0{,}1606).(32) = 5{,}1392 \quad \textbf{(8)}$$

$$p_6 = 1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5) = 0{,}1642 \Rightarrow e_6 = p_6.n = (0{,}1642).(32) = 5{,}2544 \quad \textbf{(9)}$$

En estos cálculos podrán emplear el software R Studio, con la función "dpois()", la cual permite obtener probabilidades puntuales de la distribución de Poisson (véase Fig. 3). Luego, tendrán la posibilidad de añadir al cuadro anterior una nueva columna, resultando la Tabla 2. Recurriendo a las conceptualizaciones teóricas nuevamente, es necesario que se cumpla la condición de que las frecuencias esperadas sean mayores o iguales a 5 para todas las clases [5]. Por esta razón, surgirá la necesidad de que agrupen clases adyacentes pues, en este caso, las clases con 0 y 1 bacterias poseen frecuencias esperadas inferiores a 5 unidades. Reagrupando, resultarán $k = 5$ clases como se resume en la Tabla 3, identificando con asterisco los valores que resultaron del acople de dos celdas de la tabla precedente.

De los cálculos anteriores resultará el valor del estadístico de prueba evaluado en los datos observados.

Se sabe que el estadístico sigue la distribución Chi-cuadrado con $\upsilon = k - r - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$, entendiendo que el número de parámetros estimados es $r = 1$, ya que debieron estimar el parámetro lambda de la distribución de Poisson. En suma, tendrán que llevar a cabo el cálculo del p-value para esta prueba, el cual podrán obtener empleando la función "pchisq()" de R Studio.

```
> dpois(0, lambda = 2.875, log = FALSE)
[1] 0.05641614
> dpois(1, lambda = 2.875, log = FALSE)
[1] 0.1621964
> dpois(2, lambda = 2.875, log = FALSE)
[1] 0.2331573
> dpois(3, lambda = 2.875, log = FALSE)
[1] 0.2234424
> dpois(4, lambda = 2.875, log = FALSE)
[1] 0.1605993
```

Fig. 3. Cálculo de probabilidades puntuales de la distribución de Poisson usando la función "dpois()" en R Studio Cloud.

Tabla 2. Frecuencias observadas y frecuencias esperadas.

Nro. de bacterias	Nro. de recuadros (o_i)	Frecuencias esperadas (e_i)
0	1	1,8053
1	3	5,1903
2	9	7,4610
3	9	7,1502
4	6	5,1392
5 o más	4	5,2544

Tabla 3. Frecuencias observadas y frecuencias esperadas con agrupación de dos celdas adyacentes.

Nro. de bacterias	Nro. de recuadros (o_i)	Frecuencias esperadas (e_i)
*0 a 1	*4	*6,9956
2	9	7,4610
3	9	7,1502
4	6	5,1392
5 o más	4	5,2544

Resultando

$$p - value = P(\chi^2 \geq \chi^2_{obs}) = P(\chi^2 \geq 2{,}5224) = 0{,}5287 \quad \textbf{(10)}$$

deberán optar acertadamente por el no rechazo de la hipótesis nula del test, pudiendo concluir que no existen evidencias suficientes para afirmar que el número de bacterias no sigue una distribución de Poisson, y por ende, el profesional está en lo cierto con su suposición.

Para culminar la resolución de la actividad, precisarán resolver el inciso (b) brindando una estimación del número promedio de bacterias por cuadrante del cultivo, obteniendo $\hat{\lambda} = 2{,}875$.

3 Conclusiones y trabajos futuros

El contraste de Bondad de Ajuste es un recurso de elevada relevancia pues gran cantidad de los procedimientos estadísticos utilizados en la praxis, dependen en un sentido teórico de la suposición de que las observaciones reunidas procedan de una distribución de probabilidad específica [5].

Se considera que la importancia del contenido amerita una actividad diferente como cierre de la asignatura, que fomente la utilización de software en la resolución de un problema con datos propios del contexto en que se desempeña el alumnado y las ventajas que involucra la simulación en estadística.

Se pretende seguir incorporando actividades de estas características, pensando en nuevas propuestas didácticas para el abordaje de los contenidos, con entornos motivadores y facilitadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje, propiciando la metacognición de saberes.

Referencias

1. Lazarte, I. M.; Flores, C. V.; Doria, M. V.; Haustein, M. C.: Propuesta de una secuencia didáctica para la asignatura Probabilidad y Estadística desde el enfoque basado en competencias*. Actas del IV Congreso Argentino de Ingeniería y X Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería*, pp. 121-136 (2018).
2. CONFEDI: *Competencias en Ingeniería.* Universidad Fasta Ediciones (2014).
3. Libedinsky, M.: *La innovación educativa en la era digital*. Paidós (2016).
4. CONFEDI: *Libro Rojo de CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina.* Universidad Fasta Ediciones (2018).
5. Walpole, R.; Myers, R.; Myers, S. y Ye, K.: *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Pearson (2012).
6. Daniel, W.: *Bioestadística: Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Limusa Wiley (2002)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Enfoque por Competencias en la Enseñanza de Distribuciones Probabilísticas Aproximadas Utilizando Recursos Diseñados en GeoGebra

Diana R. Kohan[1], Marisa Battisti Arduin[1]
[1] Departamento Matemático, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta Prov. 11 Km 10, Oro Verde (Dpto. Paraná), Entre Ríos, Argentina
{dikohan, mbattisti}@ingenieria.uner.edu.ar

Resumen. El presente artículo es un reporte del cambio efectuado en la metodología de enseñanza y aprendizaje del tópico Distribuciones Probabilísticas Aproximadas, en el marco de la asignatura Probabilidad y Estadística, dictada en las carreras de grado la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina. Con intenciones de alcanzar mejores procesos de aprendizaje se realizaron dos instrumentos de enseñanza en GeoGebra que fueron utilizados tanto en la clase teórica como en la práctica para resolver una serie de situaciones problemáticas. Se percibe que la actividad pudo aportar a la formación de la competencia de resolución de problemas en el futuro ingeniero, puesto que el estudiante debió cuestionarse la implementación de ciertas metodologías de resolución, en contraposición con el habitual desarrollo mecánico de los procedimientos, sin preguntarse si estos se alineano no con los fundamentos teóricos.

Palabras Clave: Resolución de problemas, Distribuciones aproximadas, Instrumentos de enseñanza, GeoGebra.

1 Introducción

Desde la década del noventa, la formación por competencias es tendencia en el campo de la educación en ingeniería a nivel mundial. En palabras de Diaz Barriga [1], el enfoque en sí mismo puede mostrar mayor riqueza si logra incorporarse de manera real en la tarea docente. Es por esta razón, que los docentes de asignaturas propias de la Matemática se ven en la necesidad de elaborar nuevas situaciones de aprendizaje que permitan fomentar la adquisición de alguna competencia.

El Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) ha trabajado en la Modernización de la Enseñanza de la Ingeniería, definiendo el perfil del Ingeniero Argentino, estructurando un proceso de formación basado en el modelo de aprendizaje centrado en el estudiante; y brindando estándares de acreditación para el aseguramiento de la calidad educativa [2]. Este nuevo modelo de enseñanza de la ingeniería propone un currículo con un balance equilibrado de competencias y conocimientos académicos, científicos, tecnológicos y de gestión, con formación humanística [3].

Vale aclarar aquí que se entiende por competencia a la "capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas y valores, permitiendo movilizar distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales" [3].

Probabilidad y Estadística es una asignatura del segundo año de las carreras de Bioingeniería, Licenciatura en Bioinformática e Ingeniería en Transporte, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina. A la luz de lo antes expuesto, el equipo docente de la cátedra ha llevado a cabo un cambio efectuado en el año 2021 en la metodología de enseñanza y aprendizaje de un contenido del programa analítico, basando la misma en la competencia de resolución de problemas.

En este sentido en el dictado de la asignatura y luego de abordar el Teorema Central del Límite, es inmediato el desarrollo de la distribución Normal como limitante de la distribución Binomial y de la distribución de Poisson

bajo ciertos requerimientos teóricos. Si bien en la práctica son abordadas diferentes actividades de aplicación, los estudiantes no logran ver la importancia de la herramienta ni tampoco vislumbran la pertinencia de su implementación a la hora de resolver problemas concretos.

A raíz de la coyuntura detectada, la acción seguida ha sido generar una situación de aprendizaje inclinada hacia un mejor aprendizaje de los contenidos de las Distribuciones Probabilísticas Aproximadas, utilizando GeoGebra y tendiendo a la formación de la competencia "Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería" [3]. De esta manera, se pretende que el estudiante piense de manera crítica aplicando el conocimiento a la práctica en la resolución de problemas.

2 Fundamentación

Dadas las características de la época que transita la sociedad hoy en día, incorporar la tecnología a los procesos de enseñanza y aprendizaje cobra vital importancia. El agregado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) a las tareas de enseñanza provoca una interacción próxima con el estudiante, desarrollando habilidades en el campo tecnológico e informático fortaleciendo los entornos de aprendizaje [4].

Por esta razón, añadir las TIC mediante un correcto diseño de los materiales y los recursos, marca una gran diferencia en el uso activo que hará el alumno de ellos, caracterizándose por un mayor atractivo y quizás potencie aún más el aprendizaje si proporcionan interactividad [5].

Siguiendo a Pea (citado en [6]), la tecnología que ofrecen hoy las computadoras y los dispositivos móviles, cuando son utilizados de manera adecuada, tiene la capacidad de generar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los alumnos. Adhiriendo a las palabras del mencionado autor, las computadoras se conciben como extraordinarias herramientas cognitivas por ser el medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en el pensamiento, en el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Permiten al estudiante pensar matemáticamente, operando no sólo con números, sino también con símbolos, almacenando y manipulando objetos, para luego elaborar interacciones entre ellos. Es de esta manera, que el aspecto representacional y de cálculo de la tecnología posibilitan el desarrollo de imágenes visuales de los conceptos y sus conexiones, que les puede ayudar a los estudiantes a elaborar imágenes mentales correctas y comprender de forma adecuada las relaciones subyacentes entre diferentes objetos matemáticos.

En palabras de Duval (como se cita en [7]) se dice que un estudiante comprende un concepto matemático, cuando es capaz de representarlo en al menos dos registros de representación. A la hora de elegir un software para las clases de Matemática, el software libre GeoGebra es ampliamente utilizado en muchas áreas como Geometría, Álgebra y Cálculo, en diferentes niveles educativos, y se caracteriza principalmente por integrar tres diferentes registros de representación que se pueden usar simultáneamente, cuando se desarrolla una actividad de aprendizaje, estos son: algebraico, gráfico y hoja de cálculo [7]. Se entiende que esta es una cualidad pues el manejo de múltiples formas de representación dinámica e interactiva enriquece el significado de los conceptos matemáticos mostrados a los estudiantes [8]. El diseño del software GeoGebra permite que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y representaciones.

Otra ventaja del uso de GeoGebra reside en el diseño y la implementación de instrumentos de enseñanza creados en él, ya que es posible crearlos y aplicarlos en poco tiempo, con una formación básica y sin conocimientos avanzados sobre su manejo, obteniendo resultados vistosos.

Un rasgo distintivo de este software es que brinda la posibilidad de enlazar dinámicamente gráficas, fórmulas algebraicas y entradas de la hoja de cálculo en forma simultánea, siendo visibles sobre una misma pantalla. Destacando que en el área de Probabilidad, cobran relevancia la hoja de cálculo, la ventana de graficación, la calculadora de probabilidades y los deslizadores [9].

Las distribuciones de probabilidad tienen representación simbólica, gráfica y numérica. Sin embargo, el enfoque tradicional de enseñanza focaliza en el cálculo de probabilidades recurriendo a la representación numérica (tablas de probabilidad) y simbólica (fórmulas de la distribución), prestándole escasa relevancia a la representación gráfica, que ayuda a visualizar importantes propiedades de las distribuciones, como lo son la tendencia central, la forma y la variabilidad.

Un acercamiento más integral a las distribuciones teóricas debe incluir, según Insunza[9] además del cálculo de probabilidades, el análisis de la extensión de la distribución a través de su gráfica, los valores más o menos probables, y el efecto de los parámetros en las propiedades de las distribuciones.

A partir de esto, se deduce que la implementación de GeoGebra en las clases de Probabilidad y Estadística

puede aportar al aprendizaje de las conceptualizaciones de la asignatura en un entorno de acción diferente, promoviendo la exploración, la experimentación, el desarrollo de ideas y las habilidades de los estudiantes [10].

Se menciona que la cátedra ya comenzó a implementar instrumentos de enseñanza en GeoGebra, mostrando la aplicabilidad del Teorema de Bayes en el cálculo de Sensibilidad y Especificidad de pruebas diagnósticas, también a través de la competencia de resolución de problemas [11].

Se cree que con esta nueva propuesta pudieron formarse además las siguientes capacidades, dentro de las citadas por el CONFEDI [12]: identificar y organizar los datos pertinentes al problema, delimitarlo y formularlo de manera clara y precisa, y generar diversas alternativas de solución.

3 Metodología

La clase teórica inició presentándose una serie de situaciones problemáticas referidas a la temática en cuestión. Para poder encarar un proceso de resolución, los estudiantes debieron hacer una lectura detallada de cada consigna y luego evaluar cuáles variables aleatorias estaban implicadas en el problema, si son discretas o continuas y cuál es su distribución de probabilidad. Para los cálculos de probabilidades debieron efectuar el pasaje del lenguaje coloquial al simbólico, llevando a cabo un planteo con la notación correspondiente.

Cuando procedieron a realizar los cálculos necesarios de manera manual, se vieron obstaculizados por no contar con tablas de probabilidades acumuladas para valores grandes de los parámetros de las distribuciones implicadas.

De esta manera, surgió la necesidad inminente de desarrollar contenidos teóricos para poder solventar las dificultades y dar respuesta a cada interrogante planteado.

Al estudiar los diferentes teoremas que permiten llevar a cabo las aproximaciones correspondientes, se fueron mostrando los dos instrumentos de enseñanza en GeoGebra. El estudiantado pudo acceder a ellos desde sus dispositivos móviles, presionando los enlaces disponibles en el aula virtual. Les fue intuitivo mover los deslizadores y observar lo ocurrido con las gráficas, ejemplificando las generalizaciones postuladas.

Para oficiar el cierre de la clase, se procedió a resolver dos de las situaciones propuestas, ejemplificando la aplicación de las propiedades vistas y los recursos diseñados.

La clase práctica consistió en resolver los problemas restantes y algunos ejercicios clásicos de aplicación que comúnmente se encuentran en los textos universitarios, agrupando las actividades según el tipo de aproximación que debía utilizarse para efectuar los cálculos de probabilidades, poniendo el foco en las llamadas correcciones por continuidad cuando se recurre a la distribución normal para aproximar distribuciones discretas.

En todo momento se insistió en que los estudiantes debían no sólocomputar las probabilidades sino también evaluar la pertinencia y el por qué de aplicar la distribución aproximada mediante los instrumentos brindados. Es allí donde precisaron de una lectura adecuada de los problemas, extrayendo los principales datos de la distribución exacta e incluso viendo si correspondía o no valerse de alguna de las herramientas brindadas mediante el recurso interactivo.

En esta instancia, los estudiantes no fueron guiados por el docente sino que se vieron en la necesidad de ser ellos mismos los protagonistas de la clase. De este modo, el accionar del profesor se vio restringido a cerrar las actividades, organizando la puesta en común de los procedimientos de resolución puestos en juego por los jóvenes para resolver las actividades.

A continuación, se detallan algunas de las situaciones problemáticas que trabajó el estudiantado y se consignan los pasos que permiten la construcción de los instrumentos de enseñanza en GeoGebra.

3.1 Problemas abordados

Algunas de las situaciones problemáticas presentadas a los estudiantes:

- *Problema 1:* Briggs y King desarrollaron una técnica de trasplante nuclear, en la cual el núcleo de una célula de una de las etapas finales del desarrollo de un embrión se trasplanta en un cigoto para ver si el núcleo puede soportar un desarrollo normal. Si la probabilidad de que un solo trasplante sea exitoso es del 65%, determine la probabilidad de que entre 100 trasplantes la cantidad de exitosos sea: a) mayor a 70; b) al menos 55 pero no más de 72; c) solo 68.
- *Problema 2:* El Ministerio de Salud está interesado en estudiar el número de ablaciones que se realizan anualmente en la provincia de Entre Ríos, siendo que en años anteriores se han realizado en promedio 38 de tales

procedimientos. Calcule la probabilidad de que en el año en curso ocurran: a) entre 32 y 40 ablaciones en la provincia, ambos extremos inclusive; b) al menos 19 ablaciones en nuestra provincia; c) a lo sumo 48 ablaciones en la provincia.

- *Problema 3:* Una central de datos tiene 1000 unidades de disco. Suponiendo que una unidad de disco falle en un día dado con una probabilidad de 0,002. Se pide: a) Calcule el número promedio de unidades de disco que fallan a diario. b) Obtenga la probabilidad de que en un día sucedan entre 2 y 7 fallas, ambos extremos inclusive. c) Halle la probabilidad de que en un día ocurran sólo 5 fallas.
- *Problema 4:* Un gran sistema cuenta con 10 000 unidades de disco, en las que cada una tiene la misma probabilidad de falla que en el ejercicio 3. Determine: a) la probabilidad de que en el sistema fallen menos de 25 discos. b) la probabilidad de que en el sistema fallen solo 29 discos.
- *Problema 5:* La calidad de los discos de computadora se mide por el número de pulsos faltantes. Una determinada marca es tal que el 80% de los discos producidos no tienen pulsos faltantes. Si se inspeccionan n discos de esta marca y se contabilizan la cantidad X de ellos que no tienen pulsos faltantes. a) Si se inspeccionan n=20 de estos discos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 13 discos no presenten pulsos faltantes? b) Si se inspeccionan n=160 de estos discos, ¿cuál es la probabilidad de que entre 115 y 125 discos no presenten pulsos faltantes, ambos extremos incluidos?

3.2 Instrumento de enseñanza para aproximación de la distribución Binomial

Se construyeron dos instrumentos de enseñanza en GeoGebra que luego fueron subidos al repositorio de libre acceso de dicho software (https://www.geogebra.org/).

En la Figura 1 se aprecia el recurso interactivo diseñado para la distribución Binomial (también disponible en https://www.geogebra.org/m/gj6rwmmw). En él se puede apreciar el gráfico de las probabilidades puntuales mediante el diagrama de barras para la distribución Binomial de parámetros n y p (notar que por defecto GeoGebra construye histogramas con rectángulos centrados en los posibles valores de la variable aleatoria Binomial), y las casillas que permiten tildar la representación de la distribución Normal con la media μ y desvío estándar σ y el diagrama de barras para la distribución de Poisson con parámetro de intensidad λ.

Es sabido que puede emplearse la distribución de Poisson para aproximar probabilidades binomiales cuando la cantidad de ensayos es un número muy grande y p, o el número $(1-p)$, se acerque mucho a 0. Y además también es posible recurrir a la distribución Normal cuando n es lo suficientemente grande, tomando como lineamiento que ambos productos np y $n(1-p)$ sean de al menos 5 unidades.

A partir del recurso en GeoGebra, es sencillo ver y mostrar a los estudiantes qué ocurre al cambiar los valores de n y p comparando las gráficas de la distribución exacta Binomial con las dos distribuciones aproximadas, evaluando su pertenencia en cada caso.

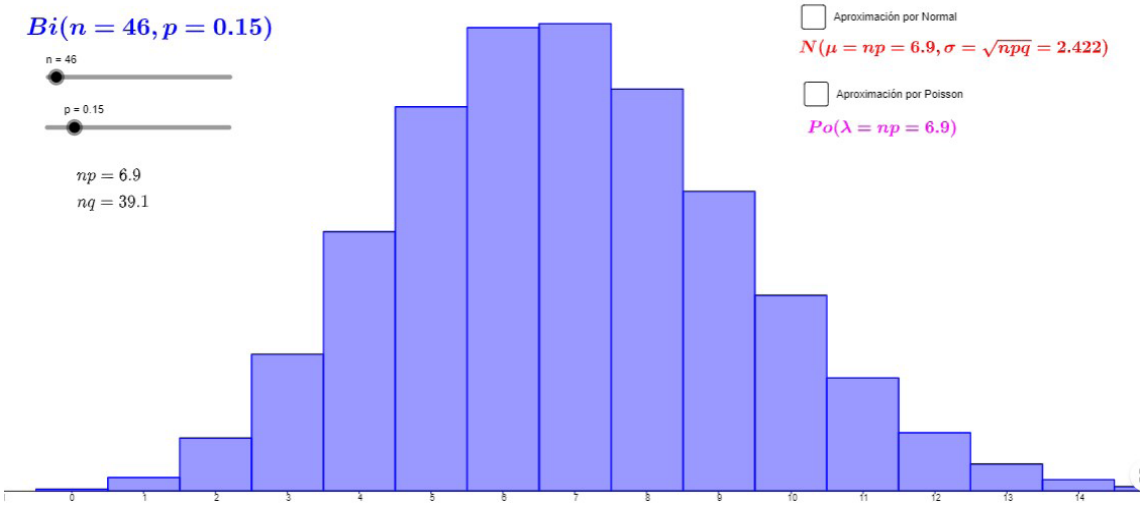


Fig. 1. Vista del recurso interactivo diseñado en GeoGebra para la distribución Normal y Poisson como limitantes de la distribución Binomial.

A modo de ejemplo, se exhibe la vista del recurso con la gráfica de una distribución Binomial con $n = 550$ y $p = 0{,}25$ en color azul, y la correspondiente curva normal en rojo y el diagrama de barras de la distribución de Poisson con la misma media, en color rosado (Figura 2). Sin efectuar ningún gráfico, es de notar que aproximar mediante Poisson no sería adecuado puesto que la probabilidad de un éxito no es lo suficientemente pequeña. Gráficamente se puede apreciar que el diagrama de barras rosado difiere bastante del diagrama azul propio de la distribución exacta. Por el contrario, al ser grande la cantidad de éxitos y los productos np y $n(1-p)$ mayores que 5 unidades, es correcto emplear la distribución Normal como aproximación de esta distribución Binomial, percibiendo que la curva normal roja es similar al diagrama de barras de la distribución exacta.

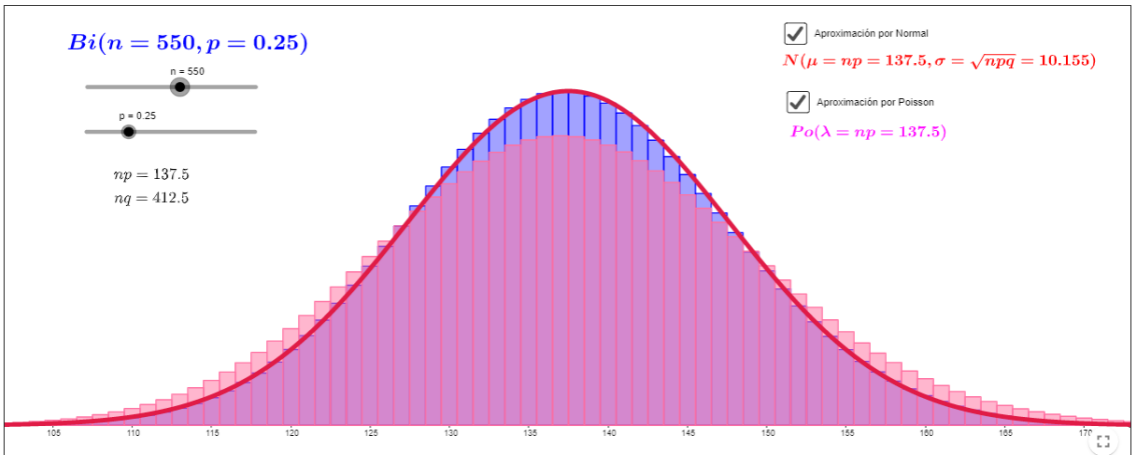


Fig. 2. Vista del recurso interactivo diseñado en GeoGebra para la distribución Normal y Poisson como limitantes de la distribución Binomial.

Otro es el caso cuando se tiene una distribución Binomial con $n = 700$ y $p = 0{,}006$ (véase Figura 3). Al ser p cercano a cero y n grande, la aproximación de Poisson es la adecuada, y gráficamente las distribuciones de probabilidad puntual son similares, apreciando que el diagrama de barras de la Poisson (rosado) es prácticamente igual que el de la distribución exacta (azul). Sin embargo, la aproximación por la distribución Gaussiana no es una alternativa adecuada puesto que uno de los productos np y $n(1-p)$ es inferior a 5 unidades, hecho que también se distingue en el recurso, al ver la distancia entre el diagrama de barras de la distribución exacta y la curva normal.

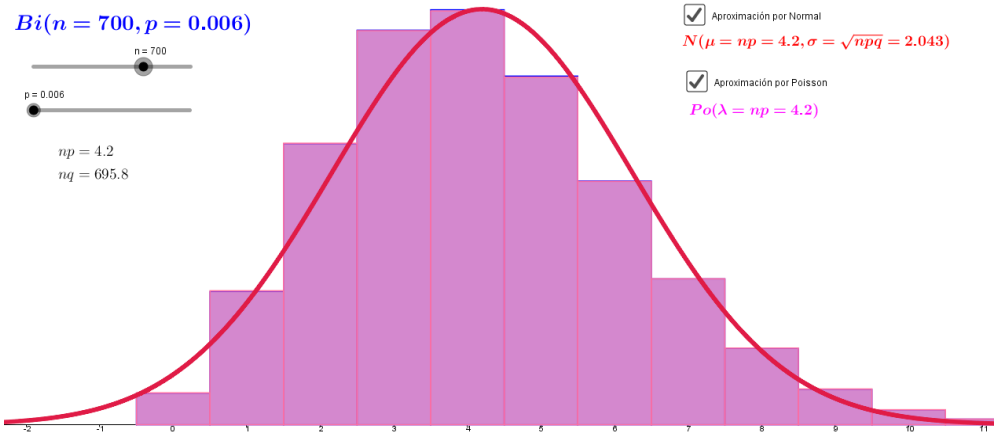


Fig. 3. Vista del recurso para la distribución con Binomial con $n = 700$ y $p = 0{,}006$.

Para la elaboración de este instrumento en el software GeoGebra, se comenzó incorporando dos deslizadores en la vista gráfica: uno para la probabilidad de un éxito (p) y otro para la cantidad de ensayos (n) de la distribución Bi-

nomial. Siendo la principal cualidad de esta herramienta que el usuario puede, moviendo el cursor, cambiar dicho valor y observar cómo en un esquema estas variaciones alteran total o parcialmente dicha estructura.

Posteriormente, con la Barra de entrada al pie de la pantalla de GeoGebra se ingresa con el comando DistribuciónBinomial(<Número de ensayos>, <Probabilidad de éxito>) la gráfica de la distribución Binomial, fijándose como parámetros los objetos n y p que se crearon en el paso anterior.

Luego, se añade también por la Barra de entrada y en forma de objetos dependientes, los números y calculados a partir de los valores de los objetos *n* y *p*.

Después, se ingresa el comando Normal(<Media>, <Desviación estándar>, x, <Acumulada (true/false)>)), siendo la media y el desvío los objetos y , respectivamente, e indicando "false" para que grafique la función de densidad de la distribución Normal. La función que origina esta gráfica es luego vinculada a través de una casilla de control que brindará la posibilidad al usuario de mostrar la curva cuando esté tildada, u ocultarla en caso contrario. De un modo similar, se agrega el comando Poisson(<Media>, <Acumulada (true/false)>) en la Barra de entrada, estableciendo como media el valor del objeto y "false" para que grafique la distribución de probabilidad puntual de la distribución de Poisson. Inmediatamente, se asigna dicha función a otra casilla de control.

Para culminar el proceso de construcción se agregan *textos dinámicos* con los nombres de las distribuciones y sus parámetros, que varían al mover los deslizadores, y se edita la vista gráfica para que sus dimensiones se ajusten a los valores variables de *n* y *p*, sin entorpecer el objetivo del recurso. En efecto, se establece mostrar la porción del plano con abscisas en el intervalo $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$, escrito en función de los objetos antes declarados, y las ordenadas acotadas superiormente en $g(\mu) + 0{,}01$, siendo *g* la expresión de la función de densidad de la distribución Gaussiana y $g(\mu)$ el valor máximo de la misma.

3.3 Instrumento de enseñanza para aproximación de la distribución de Poisson

Con una serie de pasos similares, se estructuró el otro instrumento de enseñanza (Figura 4) que consistió en un recurso interactivo ideado para la distribución de Poisson (puesto a disposición del público en https://www.geogebra.org/m/g7bggzts). En el mismo se observa el gráfico de las probabilidades puntuales para la Poisson con parámetro de intensidad λ, en color violeta (notar que por defecto GeoGebra construye histogramas con rectángulos centrados en los posibles valores de la variable aleatoria Poisson), y las casillas que permiten tildar la representación de la distribución Normal con la media $\mu = \lambda$ y el desvío estándar $\sigma = \sqrt{\lambda}$, en color rojo. Basándose de este recurso, es fácil mostrar que la aproximación es buena cuanto mayor sea el valor de λ, notando que ambas gráficas se asemejan más, conforme aumente dicho parámetro.

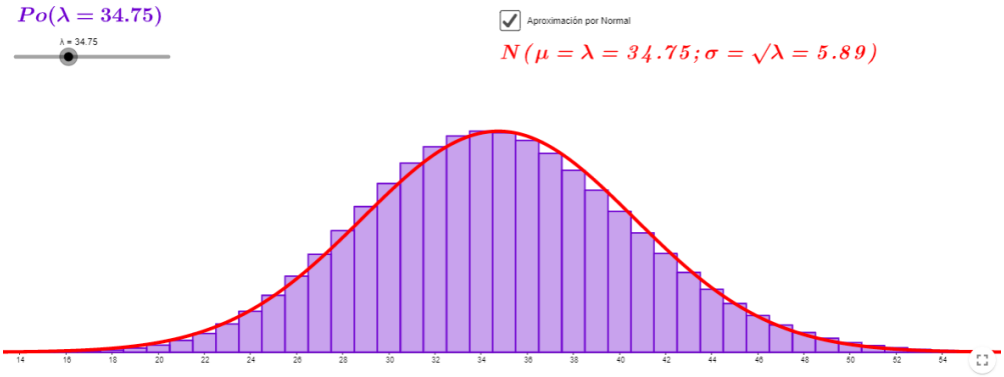


Fig. 4. Vista del recurso interactivo diseñado en GeoGebra para la distribución Normal como limitante de la distribución de Poisson.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Comparando los resultados alcanzados por los estudiantes en los problemas evaluados de este contenido en los exámenes parciales antes y después de haber aplicado la metodología, se observaron mejores calificaciones globales. Este hecho habilita al equipo de cátedra a continuar implementando estos recursos interactivos en el presente año.

Se percibe que la actividad posibilitó espacios en los cuales el estudiante debió cuestionarse la implementación de ciertas metodologías de resolución, que asiduamente desarrolla de manera mecánica sin preguntarse si los procedimientos empleados se alinean con los fundamentos teóricos.

Se cree que a pesar de que GeoGebra es un software ávidamente usado para Álgebra y Geometría, la propuesta enmarcada brinda un aporte metodológico que busca contribuir a la comprensión de conceptos probabilísticos a partir de una herramienta tecnológica de distribución libre.

No obstante, frente a la masividad de actividades y propuestas de enseñanza mediadas por TIC, se adhiere al posicionamiento de nunca anteponer la tecnología a la pedagogía [5], contemplando que las nuevas herramientas son un medio para mejorar los procesos de enseñanza de aprendizaje y no un fin en sí mismo.

Por lo cual es tarea de este grupo docente continuar pensando en implementaciones pertinentes de la tecnología que aporten de manera efectiva valor agregado a las actividades planificadas para alcanzar buenos resultados de aprendizaje en los estudiantes.

Referencias

1. Díaz Barriga, A.: El enfoque de las competencias en la educación. *Perfiles educativos*, Vol. 28, No. 111, pp. 7-36 (2006).
2. Lazarte, I. M.; Flores; Díaz, M. C.: Rediseño del Programa de Probabilidad y Estadística de carreras de Ingeniería para potenciar el aprendizaje por competencias. *Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA*, No. 6, pp. 481-489 (2020).
3. CONFEDI: Libro Rojo de CONFEDI. Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina. Universidad Fasta Ediciones (2018).
4. Rodríguez Uribe, L. A.: GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior. *Repositorio Institucional UMNG*. https://repository.unimilitar.edu.co/handle/10654/17042 (2017). Accedido el 9 de Junio de 2022.
5. Gámez Mellado A.; Marín Trechera, L. M.: Distribuciones estadísticas: un ejemplo de uso de GeoGebra en enseñanza universitaria. Épsilon, Vol. 74, pp. 33-42(2010).
6. Insunza Cazares, S. Dificultades en el desarrollo de una concepción estocástica de las distribuciones muestrales utilizando un ambiente computacional. *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, No. 2,pp. 197-205 (2015).
7. Mercado Martínez, M.: Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, No. 2, pp. 309-317 (2013).
8. Batanero, C.: *Didáctica de la Estadística.* Universidad de Granada (2001).
9. Insunza Cazares, S.: GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. *Libro de actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (2014).
10. Caro, A.: Introducción al cálculo de probabilidades con GeoGebra*. Memorias del Encuentro Digital de Educación Matemática: prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos* (2014).
11. Kohan, D.; Battisti, M.: Sensibilidad y Especificidad: Enfoque basado en la competencia de resolución de problemas. El enfoque por competencias en las ciencias básicas. *Casos y ejemplos en educación en ingeniería.CONFEDI-CIIE* (2019).
12. CONFEDI: Competencias en Ingeniería. Universidad Fasta Ediciones (2014)

EMCI Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería
UNER Facultad de Ingeniería
UTN PARANÁ

Una mirada actual al estudio de la Matemática en carreras de Ingeniería

Abud, Daniel Juan Alberto[1]
[1] Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1611. Ciudad Universitaria. Córdoba
daniel.abud@yahoo.com

Resumen. Este es un trabajo que se formula a partir de ciertas preguntas que, quien suscribe, se ha cuestionado a lo largo de su carrera como docente de Matemática en Ingeniería. En virtud de los cambios que se están efectuando últimamente en los planes de estudios de las carreras de Ingeniería, ¿en qué consiste el cambio social y educativo en este contexto de liquidez social? ¿Cómo se podrían compatibilizar las antiguas estructuras de las carreras de Ingeniería con la modernidad líquida? ¿Cómo debería ser la preparación del curriculum de ingeniería? Particularmente, en Matemáticas. Con este breve escrito se pretende aportar un conjunto de inquietudes que enriquezcan inicialmente el debate sobre la temática en cuestión, centrándose, en una mirada social y contextualizadora al estudio de la Ingeniería. En especial, interesa la relación de la Matemática en contextos de Ingeniería. Y cuál debería ser el perfil del profesor de Matemática en Ingeniería.

Palabras Clave: Carreras de ingeniería, Cambio social, Curriculum, Perfil docente, Matemática, Modernidad líquida.

1 Introducción

A modo de introducción y de contextualización, haremos un recorrido en la línea de tiempo. En la historia hay edades que, más o menos, todos ubicamos bien. En lo que se refiere a Europa, la Edad Antigua va desde las primeras civilizaciones hasta la caída del Imperio Romano de Occidente, en el año 476; la Edad Media, desde esta fecha hasta el descubrimiento de América, en 1492; la Edad Moderna, desde ese momento hasta la Revolución Francesa de 1789; y, desde entonces, estaríamos en la llamada Edad Contemporánea. Pero, hay otra posibilidad de distinguir eras históricas, que se basa en los conceptos de ciencia, tecnología y razón, y sus papeles en el proceso histórico: se puede hablar de modernidad y posmodernidad.

Para evitar confusiones, el término moderno aparece por primera vez en el siglo XVI como una forma de señalar la separación del presente con el pasado. Y, aunque en el siglo XVII, los filósofos naturales experimentales se distinguían a sí mismos de las prácticas del pasado en el debate entre antiguos y modernos, fue Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1771-1831) quien dio la primera definición formal de modernidad como la persistente recreación del yo y las condiciones de vida. Desde Hegel, existe quien da en llamar modernidad al período que va desde la Revolución Francesa (1789) hasta el final de la Segunda Guerra Mundial (1946).

En 1947, los ingenieros y arquitectos comienzan a hablar de la existencia de un estilo posmoderno y, conforme avanza la Guerra Fría, los filósofos y sociólogos articulan el significado (o mejor, significados) de posmodernidad, palabra prácticamente no aceptada en ámbitos propios de la Ingeniería. Modernos y posmodernos varios coinciden en que la posmodernidad es la era en la que estamos desde los ochenta.

Ya ubicados, temporalmente, es la idea de este trabajo vincular todo ese devenir histórico general con la Ingeniería y su currículum de estudio, especialmente en el área Matemática. Dado el alcance de este trabajo, al menos, se tratará de plantear el esquema inicial de estudio, para luego continuar en trabajos posteriores.

La formación por competencias de los alumnos de ingeniería aparece como una tendencia irreversible, casi una exigencia. El objetivo es reflexionar sobre la concepción actual de la sociedad respecto del egresado universitario

ingeniero —que lo ve como un ser competente, dotado de competencias, capaz de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea— y la consecuente necesidad de las universidades —y la sociedad— de ser efectivas en ese fin y de saber, además, cuán efectivas resultan en cuanto a dotar de competencias a sus profesionales.

Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales.

Las empresas exigen de los jóvenes ingenieros graduados un cierto nivel de competencias para el desempeño profesional que no siempre traen consigo. De hecho, muchas sostienen que, necesariamente, deben dedicar los primeros tiempos de la vida laboral del ingeniero en la empresa a que "*aprenda a hacer*" a partir de los conocimientos que tiene.

Para favorecer el desarrollo de competencias, se requiere tener claridad sobre cuáles son las competencias que deben ser consideradas en todos los estudios de ingeniería. Ello supone pensar la formación de grado del ingeniero desde el eje de la profesión, es decir, desde el desempeño, desde lo que el ingeniero efectivamente debe ser capaz de hacer en los diferentes ámbitos de su quehacer profesional y social en sus primeros años de actuación profesional.

1.1 Historia del pensamiento y la ingeniería

Profundizando, podemos decir que, tras Hegel, la modernidad se refiere a dos narrativas maestras: a saber, el desarrollo de la promesa de la Ilustración de la liberación a través de la razón, y la unificación de todas las ramas del conocimiento mediante la extensión de los métodos racionales de la ciencia y la tecnología, antecedentes de la Ingeniería. Por otro lado, Jürgen Habermas (n. 1929) sostiene que ambas narrativas se han empleado para legitimar a la ciencia y a la tecnología en el ámbito social desde 1800 [1]. La ciencia, para los teóricos de lo moderno, es una práctica representativa, una reproducción de la naturaleza, cuyas características son el resultado del consenso racional entre los que la practican, quienes, a su vez, establecen verdades científicas independientes de los intereses sociales. Desde el momento en que el consenso implica la ausencia de conflicto, desde el punto de vista moderno, la ciencia es un instrumento racional de paz.

Hay pensadores, como se ha mencionado a Habermas o Bruno Latour (n. 1947), que creen que la modernidad es un proyecto inacabado que aún merece la pena proseguir, con el objetivo de conseguir una sociedad libre de conflictos en la que la comunicación clara y racional es posible [2]. Desde la perspectiva modernista, la historia de la ciencia y la tecnología se encuadra claramente dentro de las narrativas teleológicas de progreso, racionalización, secularización, burocratización e, incluso, de Estado-Nación. En general, los profesores de Ingeniería se inclinan más hacia este tipo de pensamiento. Dado que la Ingeniería consiste en crear obras, con el conocimiento cabal de la Física y de la Economía, utilizando el lenguaje matemático, la descripción del mundo circundante y su representación son las preocupaciones principales.

En cambio, los orígenes de la posmodernidad podrían trazarse hasta la crítica de la razón de Friedrich Nietzsche (1844-1900) y otros a finales del XIX. Pero no será hasta después de las atrocidades del Tercer Reich que se empezó a dudar seriamente del proyecto moderno de liberación y unificación mediante la razón. La posmodernidad no solo rechaza estas dos narrativas maestras de la modernidad, sino también la idea de que la representación, tanto en las artes como en las ciencias, pueda ser un espejo preciso de la realidad objetiva [3].

Los posmodernos como, por ejemplo, Jean-François Lyotard (1924-1998), reconceptualizan las ciencias como actividades orientadas hacia la reproducción de las prácticas de investigación más que a la producción de resultados acerca del mundo. Lo que Lyotard llama performatividad en las ciencias puede apreciarse en la inclinación de las ciencias hacia la interdisciplinaridad y el trabajo en equipo. En la incesante búsqueda de lo nuevo (la invención de nuevos vocabularios, prácticas, reglas de investigación, consensos, ingeniería), la ciencia posmoderna es una forma de conocimiento que no reproduce lo conocido, sino que, constantemente, busca lo desconocido y lo indeterminado. Amplía las fronteras de lo conocido [4].

Pero ¿cómo se traslada todo esto a la práctica cotidiana en la enseñanza de la Ingeniería? Puede que nuestros esquemas de pensamiento, y, por ende, nuestros planes de estudios con sus antiguos métodos, ya hayan quedado arcaicos. Es probable que no estén acordes a los tiempos en que vivimos. Sería necesario adaptarlos a los modos de pensamiento de nuestros jóvenes alumnos.

Con este escrito, se pretende aportar un conjunto de elementos que enriquezcan el debate sobre la temática en cuestión, centrándose, como bien dice el título, en una lectura alternativa del estudio de la Enseñanza en Ingeniería, a partir del pensamiento sistémico de ciertos autores como, por ejemplo, Niklas Luhmann y otros que nos hacen repensar cómo se debería estudiar esta disciplina. Cuando se dice alternativa, se piensa en el concepto de costo de oportunidad como eje rector.

Solo que aquí, en este escrito, se hará un breve planteo del problema para ubicarnos contextualmente dado que, por la extensión del trabajo, no será posible desarrollarlo en profundidad.

2 Bases para una Propuesta de Diseño de Currículum en Ingeniería

Inicialmente, es importante reiterar que la visión alternativa respecto del estudio en Ingeniería, que presentaremos a continuación, se encuentra anclada en el paradigma funcional-estructuralista, más explícitamente, en su vertiente sistémica. ¿Qué significa esto?

En la década de los sesenta y principios de los setenta, y a raíz justamente de la labor de un sociólogo alemán, Niklas Luhmann, ha empezado a elaborarse una visión estrictamente descriptiva y con pretensión de teoría omnicomprensiva de lo social. Su teoría conocida como sistémica es heredera del paradigma estructuralista. Por ende, concibe lo social como suma cero, donde lo que se privilegia es el todo, y no los miembros o actores que forman parte de la escena social, con toda su carga de conflicto. Esto, lo conduce a colocar el acento en la funcionalidad, invirtiendo por lo tanto la relación estructura/función que, hasta el momento, dominaba la sociología clásica [5].

En el año 1956, se creó el planes de estudios de la carrera de ingeniería civil como pensando en el profesional que deberá salir a trabajar a su campo y que no tiene recursos a la mano para desarrollar su tarea profesional. Se modificó en el año 1975, y luego se cambió nuevamente en el año 1981. En el año 1997 tuvo otros cambios, siempre pensando en la inserción de un profesional ingeniero dentro de la sociedad. Hoy, las cosas han cambiado mucho.

Analizándolo desde la perspectiva de N. Luhmann, la sociedad –a partir de este punto de vista sistémico– se transforma en un verdadero entramado de redes comunicacionales que varían constantemente, evolucionando hacia niveles de mayor diferenciación y complejidad. Este nuevo modelo es comparable, según el filósofo del postestructuralismo francés que ya se ha mencionado, Jean-François Lyotard, con el movimiento browniano de las partículas, ya que se acentúa en él la disolución del lazo social. De todas maneras, esto no quiere decir que cada uno hace lo que quiere, porque compararlo así puede significar que subyace la idea del caos. No, no es así. Simplemente, se refiere a desestructurar ciertos viejos lazos y entramados que hacían de la enseñanza en ingeniería una estructura rígida. Que, en algunos pasajes de la historia, se parecían a cuestiones inevitables. Además, siguiendo ciertas leyes físicas, en cada caos existe un cosmos, en todo desorden hay un orden secreto.

Según Luhmann, su teoría totalizadora no pretende marcar un deber ser, sino que se contenta con aportar una radiografía, lo más completa posible de lo que es la sociedad [6]. Y eso es lo que el ingeniero necesita para trabajar. Cuando se aboca a crear una obra, debe conocer perfectamente su entorno físico y se deberá ajustar a la escasez de los recursos con los que cuenta.

De lo expuesto, que es solo una presentación escueta de un pensamiento tan complejo como el de Luhmann, se derivan implicancias importantes en lo que respecta al concepto de sociedad. En este caso, aplicándolo a la enseñanza de la ingeniería se puede asegurar que la preparación de un planes de estudios encarado desde las competencias es un pequeño avance hacia una mirada diferente. Se podrá profundizar mucho más cuando se produzcan verdaderos profesionales de mentalidad abierta a la aplicación de diversas disciplinas. Hoy eso no ocurre todavía.

Como su pensamiento es tan ecléctico, complejo y omniabarcador, surgieron una serie de conceptos cuya aplicación se estudiará, tal como se ha desarrollado en este seminario. Es por eso que iniciaremos esta parte del trabajo enunciando y analizando una serie de ellos, no todos, por supuesto, sino los que se consideran centrales dentro del pensamiento luhmaniano y que, de alguna forma, guardan estrecha relación con la temática que abordaremos en este ensayo monográfico. Dichos conceptos son sistema, entorno, mundo, autorreferencia, autopoiesis, complejidad, la lógica de la diferencia.

Luhmann reconoce que es evidente que sin seres humanos no hay sociedad, que la sociedad como sistema presupone a los seres humanos. Al afirmar que los hombres son entorno del sistema social, está afirmando que los hombres son condición y presupuesto de la existencia y configuración de ese mismo sistema. Pero nunca son parte integrante del mismo. Es decir que se deberá pensar en un planes de estudios que considere al sistema de manera integral y relacionado con el mundo. Pero la sociedad no es simplemente un sistema. Es un sistema –como ya hemos dicho antes– autorreferente y autopoiético [7].

Desde los presupuestos de esta teoría, la sociedad es un sistema cerrado que se crea continuamente a sí mismo, que es autorreferente en esa creación y que, mediante su autorreproducción autopoiética, no solo crea sus propios elementos, sino también su propia estructura [8].

Entonces, la propuesta de diseño de currículum debe contemplar una secuencia de espacios curriculares de for-

ma tal que abarque las necesidades del mundo entero y se adecue a las circunstancias actuales.

Todo cuanto pertenece a la sociedad es creado por ella misma. Las condiciones de su propia existencia se encuentran dentro de sus propios límites, y no necesita nada del exterior para poder existir como tal. Claro es que, al ser un sistema, no puede existir sin su entorno: la sociedad es siempre sistema en un entorno. Pero su clausura es condición de su propia apertura, y es la que posibilita los contactos que la sociedad, como sistema, puede establecer con su entorno. Vale decir que las disciplinas intervinientes en el planes de estudios de Ingeniería tendrán que estar relacionadas de manera de conformar un verdadero sistema.

Las obras de ingeniería sirven para la sociedad, entonces, se debe buscar lo que realmente ella necesita. Y, yendo más allá, no solo lo que necesita, sino además lo que se debe mejorar. Por lo expuesto es que Luhmann no duda en plantear una descripción del conjunto de la sociedad como sistema omnicomprensivo de relaciones comunicativas. Es precisamente esta insistencia en la comunicación la que permite no solo distinguir al sistema social como tal, sino oponerse frente a otras características que presuponen componentes de la sociedad distintos de la comunicación.

Los profesores de las carreras de Ingeniería, en su gran mayoría, no están preparados para un cambio de pensamiento. La gran crítica de Habermas a Luhmann se centra en su teoría de sistemas, a la cual encuadra como un buen ejemplo de la razón funcionalista y que califica de biologicista por su adscripción al paradigma de la autopoiesis. Pero la mente de los profesores de Ingeniería necesita de mucha preparación. Habrá una apertura mental cuando se discutan temas con otras lecturas. Eso no está ocurriendo por ahora.

Se supone, rudimentariamente, que una parte del objetivo de la enseñanza es la transmisión de los conocimientos, pero, con la llegada de las TIC a la educación, el foco cambia: deja de estar centrado en la mera entrega de información al estudiante y pasa a centrarse en el estudiante [9].

Hay que enseñar a aprender para que este aprendizaje sea útil durante toda la vida, lo que implica que hay que transmitir capacidades y habilidades para que el estudiante se adapte a la sociedad en constante cambio [10]. Estos constantes cambios en la educación del siglo XXI han propiciado el surgimiento de nuevas teorías. Un ejemplo de ello es el conectivismo, el cual afirma que la capacidad de aumentar el conocimiento es más crítica que lo que se conoce actualmente.

El mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el "*saber*"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "*saber hacer*"). Esto se ve claramente, y es asumido así, por las universidades a partir de la Declaración de Bolonia de 1999 y la declaración de "la educación como un servicio público" de la Convención de Salamanca de 2001 [11].

Además, sostiene que resulta vital la habilidad de realizar distinciones entre la información importante y la que no lo es. También, es fundamental la habilidad de reconocer cuándo una nueva información altera un entorno basado en las decisiones tomadas anteriormente. Por lo tanto, nuestra habilidad para aprender lo que necesitaremos mañana es más importante que lo que sabemos hoy [12].

Luhmann sintió que la sociedad era simplemente un sistema social en el que un subsistema político recientemente diferenciado tenía primacía funcional. Luhmann analiza el enfoque marxista de una sociedad basada en la economía: en esta teoría, se entiende que el concepto de sociedad económica denota un nuevo tipo de sociedad en el que la producción, y más allá de eso, un sistema de necesidades fundado metabólicamente, reemplazan a la política como centro del proceso social. Justamente, la economía es uno de los ejes fundamentales de la ingeniería. La única opción válida es la eficiencia económica en ingeniería.

La noción de que la economía posee una primacía funcional es compatible con la circunstancia bien conocida de que el subsistema político no solo se hizo cada vez más diferenciado (de religión, moral y costumbres, si no de la economía misma), sino que también continuó aumentando en tamaño y complejidad interna a lo largo del curso de toda la época capitalista. Para la primacía funcional, solo tiene que implicar que la complejidad interna de un subsistema dado es la mayor, y que la nueva etapa de desarrollo de la sociedad se caracteriza por tareas y problemas que se originan principalmente en esta esfera.

En este siglo de la globalización impulsada por los avances científicos y tecnológicos, es cada vez más evidente que la fortaleza económica de una sociedad depende principalmente de su capital humano. El mundo está cambiando día tras día, con la velocidad de los nuevos saberes. Por esa razón, cada día que pasa es más importante la universidad.

Las naciones están dejando atrás una época en que la producción de bienes y servicios y la acumulación de capital estaban basadas en los recursos naturales. El nuevo capital es el capital humano. El valor económico del capital humano mundial ya es nada menos que cuatro veces mayor que el mero capital físico, según estimaciones del Banco Mundial.

En este marco, la universidad argentina presenta tres problemas centrales:

1. La mayoría de los ingresantes no concluye sus estudios universitarios.
2. Hay pocos graduados en las carreras científico-tecnológicas.
3. Es escasa la presencia de alumnos pobres en estas carreras.

En las carreras de ingeniería se suma el grave problema que, solo el 31,50 % de los ingresantes, se gradúa en el ciclo normal previsto de cinco años. Y el país necesita cada vez con mayor necesidad, ingenieros. Entonces, planteo: ¿cómo debemos orientar los procesos de enseñanza-aprendizaje para que se reciban en tiempo nuestros alumnos?

Este trabajo tiene la intención de plantear el problema con miras al contexto sociocultural que estamos viviendo, en el marco de las nuevas ideas filosóficas acerca de la pedagogía y su posterior aplicación.

2.1 Perfil del Profesor de Matemática en carreras de Ingeniería

En este punto, nos preguntamos ¿qué perfil debe tener el profesor de Matemática en carreas de Ingeniería? La respuesta es que deberá enseñar lo que el alumno necesitará en su vida profesional. Es decir, teleológicamente, deberá enseñar Matemática útil a la tarea profesional. No se está diciendo que se debe banalizar la enseñanza. Muy por el contrario, cuidando todo el rigor matemático usual. El profesor deberá ajustar y calibrar el modo de enseñar para que, el día de mañana, el futuro egresado de ingeniería vuele tan alto como sea necesario en formulaciones matemáticas, pero dando respuesta a los problemas de la ingeniería.

Para ser más claro aún, por caso, un ingeniero que deberá realizar una tarea profesional determinada, y que obviamente cobrará por dicho trabajo. No puede brindar un resultado:

$$\mathbb{A}x + \mathbb{B} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

esgrimiendo que el sistema es incompatible y que no tiene solución. El cliente de un trabajo profesional de ingeniería siempre espera un resultado. En cambio, la finalidad de un matemático será otra. Para ese profesional ese resultado está perfecto. Imposible de concebir en Ingeniería. El problema es teleológico. Son finalidades diferentes [13].

Por otro lado, quienes de nuestros alumnos serán investigadores científicos. O, quiénes de nuestros alumnos serán profesores el día de mañana.

En recientes encuestas realizadas a los alumnos de Mecánica Analítica de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, el 99% de los alumnos no elegiría ser científico ni profesor.

A la sazón, cuál será su elección: *dedicarse a la profesión de ingeniero*. Entonces, ¿qué perfil de docente necesitamos para nuestra carrera de ingeniería? Con lo cual, queda más que claro que quien les enseña debe, sí o sí, conocer la profesión de ingeniero.

Para favorecer el desarrollo de competencias, el primer paso es tener claridad sobre cuáles son las competencias que deben ser consideradas en todos los estudios de ingeniería y específicamente en cada terminal o especialidad.

Ello supone pensar la formación de grado del ingeniero desde el eje de la profesión, es decir desde el desempeño, desde lo que el ingeniero efectivamente debe ser capaz de hacer en los diferentes ámbitos de su quehacer profesional y social en sus primeros años de actuación profesional [14], [15].

3 Conclusiones y trabajos futuros

Se ha intentado encuadrar a la Ingeniería, específicamente a su currículum, dentro de lo que los autores contemporáneos llaman la posmodernidad, buscando insertar este pensamiento en las estructuras de pensamiento de los profesores de las carreras de Ingeniería. La ingeniería desarrolla obras y dispositivos novedosos para cubrir necesidades y mejorar la calidad de vida de la sociedad. La preocupación permanente es cómo se la debe enseñar. Por otro lado, la misma sociedad ha ido cambiando, es decir que esto merece una dedicación continua y estudiada. El profesional ingeniero debe interpretar las necesidades y las ambiciones de la sociedad.

La responsabilidad de la toma de decisiones recae en la gestión académica de las carreras de ingeniería, y esta requiere de insumos confiables y adecuados a la realidad propia de cada institución y de cada contexto académico,

si se pretende efectividad en los resultados, en este caso, en la dotación de competencias en los graduados ingenieros.

En tal sentido, el trabajo interdisciplinario entre ingenieros y profesionales de ciencias de la educación es clave en este tipo de investigaciones y debe ser incorporado como parte fundamental del proceso de gestión académica.

Si el desafío de las facultades de ingeniería pasa por la necesidad de formar "*seres competentes*" respecto de "*la meta*", y eso requiere cambiar el modelo actual de formación por uno orientado a la dotación de competencias, este tipo de investigaciones son un aporte significativo para el análisis, diseño e implementación de tal proceso de cambio.

Referencias

1. Habermas, J.: *El discurso filosófico de la Modernidad (doce lecciones)*. Taurus, pp. 397-453. (1989)
2. Latour, B.: *Nunca fuimos modernos. Ensayos de antropología simétrica*. Siglo XXI Editores. (2012)
3. Eco, U.: *La Edad media ha comenzado ya. La Nueva Edad Media*. Alianza Editorial, pp. 7-34. (1995)
4. Lyotard, J. F.: *La condición posmoderna. Informe sobre el saber*. Ed. Cátedra-Teorema. (1987)
5. Luhmann, N.: *Sociedad y Sistema: la ambición de la teoría*. Pensamiento Contemporáneo 8(1). Paidós/ICE de la UAB. (1990)
6. Luhmann, N.: *Teoría de la sociedad y pedagogía*. Paidós, pp. 9-62. (1996)
7. Abud, D.: *Economía Básica*, Editorial Solsona, ISBN Nº 978-987-33-6920-9, Córdoba, año 2015.
8. Luhmann, N.: *Complejidad y modernidad: De la unidad a la diferencia*. Ed. Trotta, pp. 245-256. (1998)
9. Delling, R. M.: *Towards a theory of distance education*. [Ponencia]. ICDE Thirteenth World Conference. (1985)
10. Garrison, D. R.: *Understanding distance education: A framework for the future*. Routledge. (1989)
11. Abud, D.; Nieri, E.: *La linealidad en Economía en la Enseñanza en carreras de Ingeniería*, en el XXI Encuentro Nacional y XIII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería, en Santiago del Estero, del 24 al 26 de octubre, publicado en Actas del EMCI 2018, ISBN 978-987-4433-22-0. Villa María, Córdoba, Argentina pp. 85 (2018)
12. Siemens, G.: *Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital*. http://www.diegoleal.org/docs/2007/Siemens (2004)
13. Abud, D.: *Lote Económico Análisis desde la Ingeniería* publicado en Actas del EMCI 2017, ISBN 978-987-720-151-2, pp. 85- 90. Santiago del Estero, Argentina. (2017)
14. Morin, E.: *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Ediciones Nueva Visión (2001)
15. Giuliano, G.: *Interrogar la Tecnología. Algunos fundamentos para un análisis crítico*. Nueva Librería. Buenos Aires, 125-130. (2007)

Índice alfabético por autores

Abud, Daniel	541-546 pp.
Álvarez, Mario Gustavo	448-456 pp.
Amaya, Vanina Alejandra Cristina	252-262 pp.
Arce, Andrea Silvia	347-355 pp.
Arias, Silvia Edith	18-26 pp.
Aznar, María Andrea	146-153 pp.
Baccelli, Sandra Graciela	357-363 pp.
Balbi, Milena María	9-17 / 59-70 pp.
Barrea, Leonardo	434-440 pp.
Battisti, Marisa	526-533 / 534-540 pp.
Bayés, Agustina	42-49 pp.
Belfiori, Lorena	318-324 pp.
Beneyto, Claudia Virginia	9-17 pp.
Berejnoi, Carlos	263-269 pp.
Bernal, Cristian Ricardo	134-145 pp.
Bertossi, Valeria Iliana	134-145 pp.
Bianchini, Barbara	373-381 pp.
Borré, Claudia	270-277 pp.
Bouciguez, María Beatriz	71-77 pp.
Brandolín, Jorge Rafael	382-391 pp.
Brstilo, Caren Loreley	252-262 pp.
Cagnina, María Agostina	197-204 pp.
Caligaris, Marta Graciela	174-186 / 477-483 pp.
Cánaves, Gabriel	491-502 pp.
Carrere, Carolina	332-339 / 340-346 pp.
Casco, Eva	513-517 pp.
Casco, Eva Silvana	417-423 pp.

Cassan, Rosana	242-251 pp.
Castro, María	85-93 pp.
Chan, Débora Mirta	399-407 pp.
Chiapparoli, Wadi	94-105 pp.
Chiuro, Carlos	127-133 pp.
Costa, Pierina	35-41 / 392-398 pp.
Costa, Viviana	42-49 pp.
Costa, Viviana Angélica	289-296 pp.
Dádamo, Monica	491-502 pp.
D'Alessandro, Lucas Iván	424-433 pp.
De Federico, Sara	491-502 pp.
De Munno, Cecilia	484-490 pp.
De Santis, Eduardo	408-416 pp.
Del Bono, Dana	18-26 pp.
Demarchi, Analía	467-476 pp.
Di Domenicantonio, Rossana	154-163 pp.
Díaz Dávila, Laura Cecilia	18-26 pp.
Distéfano, María Laura	146-153 / 357-363 pp.
Duarte, Alejandro	35-41 / 392-398 pp.
Durunda, Romina	513-517 pp.
Echevarria, Graciela Del Valle	197-204 pp.
Escher, Leandro	340-346 pp.
Favieri, Adriana	107-115 pp.
Favieri, Adriana Gladys	477-483 pp.
Ferreyro, Mariano	71-77 pp.
Figueroa, Stella Maris	146-153 pp.
Franco, Juan Manuel	307-317 pp.
Gagliardo, Alejandra	457-466 / 467-476 pp.

Gago, Eduardo Alberto	205-215/ 216-224/ 252-262 / 424-433 pp.
Galli, María Gabriela	399-407 pp.
García, Mabel	164-173 pp.
García, Mariana Soledad	318-324 pp.
García, Román	434-440 pp.
Georgetti, Marco Antonio	59-70 pp.
Giraudo, Marta Beatriz Viviana	9-17 pp.
Gomes, Eloiza	364-372 pp.
Gualpa, Solange	325-331 pp.
Haye, Elizabet	78-84 pp.
Hernández, Araceli	297-306 pp.
Hirschfeld, Gisela	18-26 pp.
Jacamo, Sonia	85-93 pp.
Kanobel, Maria Cristina	318-324 / 347-355 / 399-407 pp.
Klempnow, Andreas	94-105 pp.
Kohan, Diana	534-540 pp.
Kovac, Federico	297-306 pp.
Langoni, Laura	164-173 pp.
Langoni, Laura Beatriz	154-163 pp.
Lapycky, Iván	332-339 pp.
Laugero, Lorena Fernanda	174-186 pp.
Lima, Gabriel	364-372 / 373-381 pp.
Londero, Magali Solange	307-317 pp.
Lovatto, Flavio	526-533 pp.
Maggi, Claudio Norberto	51-58 pp.
Martín, Héctor Daniel	2-8 / 51-58 pp.
Martín, Milton Tadeo	477-483 pp.
Martínez, Joel Alberto	187-196 pp.

Mascheroni, Ada Elena	205-215 / 424-433 pp.
Milesi, Solange	325-331 pp.
Miyara, Alberto	242-251 / 340-346 pp.
Montenegro, Fabiana	457-466 / 467-476 pp.
Morel, Jorge Omar	187-196 pp.
Narváez, Ana	503-512 pp.
Natali, Osvaldo	518-525 pp.
Navas, Laura	27-34 pp.
Odetti, Nanci	526-533 pp.
Otero, Fernando	127-133 pp.
Palmieri, Fernando	94-105 pp.
Paskoky, Pablo	448-456 pp.
Pastore, Liliana Beatriz	518-525 pp.
Pastorelli, Sonia Pompeya	408-416 pp.
Pereira Da Silva, Leonardo Eichelberger	187-196 pp.
Pereson, Marcos Nahuel	51-58 pp.
Pinto, Rieuse	373-381 pp.
Pintos, Susana	27-34 pp.
Piovan, Marcelo Tulio	51-58 pp.
Pita, Gustavo de Dios	332-339 pp.
Pozzebon, Carolina Gabriela	252-262 pp.
Puccinelli, Cecilia	408-416 pp.
Quercia, María Carmen	357-363 pp.
Ramírez, Roxana Guadalupe	382-391 / 399-407 pp.
Ramírez, Sandra Cristina	408-416 / 417-423 pp.
Ravera, Emiliano	325-331 / 332-339 / 340-346 pp.
Regner, Mario Alejandro Di Blasi	441-447 pp.
Righetti, Gabriela	116-126 pp.

Rodríguez, Elisa	35-41 / 392-398 pp.
Rodríguez, Georgina Beatriz	174-186 / 477-483 pp.
Rodríguez, María Elvira	513-517 pp.
Roitman, Claudia Alejandra	278-288 / 518-525 pp.
Romero, Matías Francisco	205-215/216-224 pp.
Rueda, Analía	484-490 pp.
Ruíz, Joaquín	325-331 pp.
Salaj, Carlos Javier	59-70 pp.
Salomone, Matías	35-41 / 392-398 pp.
Santucho, Pedro Manuel Atilio	278-288 pp.
Scagnetti, Olga Etel	417-423 pp.
Segura, Sandra	484-490 pp.
Seminara, Silvia	116-126 pp.
Silva, Alessandro	364-372 pp.
Smidt, Javier	225-233 pp.
Speranza, Tiago	2-8 pp.
Stumpf, Pablo	518-525 pp.
Szekieta, Paola Andrea	205-215 / 424-433 pp.
Taborda, Liliana	78-84 pp.
Tibaldo, Aldana	513-517 pp.
Tirner, Jirina	9-17 pp.
Tófalo, Graciela E. Yugdar	382-391 pp.
Tomazzeli, Gabriela	503-512 pp.
Torroba, Patricia Laura	234-241 pp.
Trípoli, María de Las Mercedes	225-233 / 234-241 pp.
Vagge, Mariana	154-163 pp.
Vaira, Stella	78-84 pp.
Vega, Noemi	503-512 pp.

Vilchez, Paola Andrea	197-204 pp.
Williner, Betina	107-115 pp.
Zapata, Melina B.	382-391 pp.
Zeniquel, Manuel	59-70 pp.
Zurbriggen, Marcelo Matías	216-224 pp.